

수정 SPR 기법에 의한 힘을 받는 평판문제의 적응적 p -체는 세분화

p -Adaptive Mesh Refinement of Plate Bending Problem by Modified SPR Technique

조 준 형* · 이 회 정** · 우 광 성***
Jo, Jun-Hyung · Lee, Hee-Jung · Woo, Kwang-Sung

ABSTRACT

The Zienkiewicz-Zhu(Z/Z) error estimate is slightly modified for the hierarchical p -refinement, and is then applied to L-shaped plates subjected to bending to demonstrate its effectiveness. An adaptive procedure in finite element analysis is presented by p -refinement of meshes in conjunction with *a posteriori* error estimator that is based on the superconvergent patch recovery(SPR) technique. The modified Z/Z error estimate p -refinement is different from the conventional approach because the high order shape functions based on integrals of Legendre polynomials are used to interpolate displacements within an element, on the other hand, the same order of basis function based on Pascal's triangle tree is also used to interpolate recovered stresses. The least-square method is used to fit a polynomial to the stresses computed at the sampling points. The strategy of finding a nearly optimal distribution of polynomial degrees on a fixed finite element mesh is discussed such that a particular element has to be refined automatically to obtain an acceptable level of accuracy by increasing p -levels non-uniformly or selectively. It is noted that the error decreases rapidly with an increase in the number of degrees of freedom and the sequences of p -distributions obtained by the proposed error indicator closely follow the optimal trajectory.

Keywords : Modified Zienkiewicz-Zhu(Z/Z) error estimate, superconvergent patch recovery technique, hierarchical p -refinement, L-shaped plates, selective p -distribution

요 지

계층적 p -세분화를 위해 Zienkiewicz-Zhu 오차평가법이 약간 수정되었으며, 이 방법의 유효성을 보이기 위해 힘을 받는 개구부를 갖는 Reissner-Mindlin C^0 -평판에 적용하였다. 유한요소해석상의 적응적 체분을 결정하는 단계는 초수렴 패취복구기법에 기초를 둔 사후오차평가자와 연계된 p -세분화에 의해 제안되었다. 요소내의 변위장을 정의하기 위해 적분형 르장드르 고차 형상함수가 사용되는 반면 복구응력을 보간하기 위해 파스칼의 삼각수에 기초를 둔 같은 차수의 고차다항식이 사용되는 이유로 수정 Z/Z 오차평가는 종래의 방법과 다소 차이를 보여준다. 가우스 적분점에서의 응력을 최적화하기 위해 필요한 다항식으로 표현되는 응력함수를 얻기 위해 최소제곱법이 사용되었다. 고정된 요소망에 거의 최적의 형상함수 차수의 분배를 찾기 위한 전략이 논의되었는데, 허용되는 정확도를 얻을 수 있을 때까지 각 요소마다 형상함수의 차수를 불균등하게 증가시키는 방법으로, 소위 최적의 선택적 p -분배를 자동으로 결정하도록 되어 있다. 연구결과로부터 적응적 p -체는설계 단계가 진행됨에 따라 자유도의 증가에 따라 오차량은 급격히 감소되는 것을 알 수 있었고, 제안된 오차 지시자에 의한 적응적 p -체는 세분화는 최적 p -분배 진행방향에 근접하는 것을 볼 수 있었다.
핵심용어 : 수정 Zienkiewicz-Zhu 오차평가, 초수렴 패취복구기법, 계층적 p -세분화, L-형 평판, 선택적 p -분배

* 한국전력공사 서울전력구건설처, 공학박사 : meta2phy@kepco.co.kr

** 영남대학교 건설환경공학부, 석사과정 : firelhj@lycos.co.kr

*** 영남대학교 건설환경공학부, 교수 : kswoo@ynu.ac.kr

1. 서론

본 논문에서는 기존에 제안된 p -체는 세분화 방법의 검증을 하기 위해 역학적 거동이 보다 복잡한 휨을 받는 L-형 평판문제에 적용하였다. p -체는 세분화에 사용된 오차평가기법은 Z/Z에 의해 제안된 응력값 복구를 이용하는 방법이 일차적으로 모색되었으며, 기존의 방식을 적응적 p -체는 세분화를 위해 다소 수정하였다. 즉, Z/Z 접근법으로 불리는 SPR 기법을 계층적 형상함수에 기초를 두는 기존의 p -version 유한요소법에 적용할 때 나타나는 결과와 오차를 평가하였다. 이 때 평면응력 문제나 평면변형 문제의 유한요소해석 후에 계산되는 2차원 응력 대신 휨모멘트와 전단력으로 정의되는 합응력을 복구하는 방식을 취했다. 이를 기반으로 형상함수의 차수를 요소망에 합응력의 수준이 높은 곳에서는 고차의 형상함수로, 낮은 곳에서는 저차의 형상함수를 불균등(non-uniformly)하게 또는 선택적으로 배치하는 선택적 p -분배(selective p -distribution) 방식이 사용된다. 아울러 본 연구에서는 Z/Z의 초수렴해를 정해로 가정하는 것은 물론, Babuska가 제안한 p -Version 유한요소법의 오차추정식에 기초를 둔 외삽방정식에도 근거하여 정해를 추정한 후 사후오차평가를 별도로 실시하였다. 이 두 가지 방법을 서로 비교하여 제안하고 있는 오차평가 알고리즘의 적정성을 평가하였다. 연구결과로부터 적응적 p -체분설계 단계가 진행됨에 따라 자유도의 증가에 따라 오차량은 급격히 감소되는 것을 알 수 있었고, 제안된 오차지표(error indicator)에 의한 적응적 p -체는 세분화는 최적 p -분배 진행방향에 근접하는 것을 볼 수 있었다.

2. 적응적 평판해석을 위한 사후오차평가 알고리즘

본 논문에서 사용된 요소는 Reissner-Mindlin C° -평판이론에 기초를 두었고, 기본적인 형태는 다음과 같다.

$$M_{ij} + Q_i = 0 \quad (1)$$

$$-Q_{i,i} = 0 \quad (2)$$

$$M_i = D_{ij} L_{jk} \theta_k \quad (3)$$

$$Q_i = \alpha_{ij} (-\theta_j + w_{,j}) \quad (4)$$

$$M_i^n = M_{ij} n_j = \widehat{M}_i^n \quad M_1^n = M_s \quad M_2^n = M_{ns} \quad (5)$$

$$Q_i = \widehat{Q}_i \quad \text{on } \Gamma_2$$

$$w = \widehat{w}, \quad \theta_i = \widehat{\theta}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (6)$$

이 식들에서 M_{ij}, Q_i 는 합응력을 나타내고 D_{ij} 는 평판의 휨강성, α_{ij} 는 평판의 전단강성, L_{jk} 은 미분연산자, θ_k 와 w 는 회전각과 처짐을 나타내는 변위이다. Γ_1, Γ_2 는 또한 경계조건을 나타낸다. 기존의 h -법과 p -법 사이에는 사용되는 형상함수와 형상함수의 차수에 따라 달라지는 가우스 적분점 등의 차이점이 존재하므로 Z/Z에 의해 h -법에 적용된 초수렴렛복구(SPR) 기법의 수정이 불가피하게 된다. 즉, p -version 유한요소법의 수행으로부터 산정된 합응력값(M_i^p, Q_i^p)을 최소제곱법으로 보간하여 얻어진 복구합응력(이하 M_i^*, Q_i^*)과 M_i^p, Q_i^p 를 일반적인 n 차원의 벡터로 인정하고, 두 벡터의 차를 나타내는 $e_{MQ} (= M^* - M^p$ 그리고 $Q^* - Q^p$) 벡터의 노름(norm)을 구하는 식을 이용해 에너지노름을 식 (7)과 같이 정의할 수 있다.

$$\|e_{MQ}^*\|_E^p = \left\{ \int_{\Omega} (M_i^* - M_i^p) D_{ij}^{-1} (M_j^* - M_j^p) d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega} (Q_i^* - Q_i^p) \alpha_{ij}^{-1} (Q_j^* - Q_j^p) d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

여기서, $\|e_i\|^2$ 는 i 번째 요소에서의 에너지노름, Ω_i 는 i -번째 요소의 체적, $[D]$ 는 재료상수행렬 (constitutive matrix)을 나타낸다. 한편, M^* 는 평활화된 복구합응력(smooth stress resultant)을 나타낸다. 식 (8)은 a_j, ϕ_j 는 보간을 위한 상수와 Pascal의 삼각수에 의한 기저함수(basis function)를 나타낸다. 한편, 다항식의 차수 p 는 유한요소해석시 사용되는 형상함수의 차수와 동등한 수준으로 근사하였다. 근사는 식 (3),(4),(5)에 의해 최소제곱법으로 수행되었다.

$$M^*(x,y) = \sum_{j=1}^k a_j \Phi_j, \quad Q^*(x,y) = \sum_{j=1}^k a_j \Phi_j \quad (8)$$

$$\int_{\partial a_i} \|e(x,y,a_j)\|^2 d\Omega = 0 \quad (9)$$

$$-M_i^p (P_k)_i + (P_{kj})_i (a_j)_i = 0 \quad (10)$$

$$-Q_i^p (P_k)_i + (P_{kj})_i (a_j)_i = 0 \quad (11)$$

한편, 요소별로 수렴정도를 판단하기 위해 M, Q -공간상의 상대적 거리를 측정할 수 있는 η 를 식(12)로 정의한다. η 는 각 해석단계에서 수렴정도를 판단할 수 있는 오차지표로 사용된다. 식 (13)의 의미는 전체 M^* 및 Q^* 함수가 공간에서 나타내는 거리와 e_o^* 함수가 공간에서 나타내는 거리의 비를 나타내고 식 (14)은 전영역의 오차를 나타낸다. 식 (15)은 팻취가 겹친 요소에서 함응력의 노름값이며 식 (16)은 팻취가 겹친 요소에서 요소별 발생하는 오차를 나타낸다. 아래 식에서 η_{Ω} : 해석영역 전체의 오차, n : 해석단계, m : 특정 요소가 각 팻취에 속한 회수를 나타낸다.

$$\eta_{\Omega}^n = \frac{\|e_{MQ}^*\|_{\Omega}^n}{(\|M^* Q^*\|_{\Omega}^{n^2} + \|e_{MQ}^*\|_{\Omega}^{n^2})^{\frac{1}{2}}} \times 100(\%) \quad (12)$$

$$\|M^* Q^*\|_{\Omega}^{n^2} = \left\{ \sum_{e=1}^{\Omega} \|M^*\|_e^{n^2} + \sum_{e=1}^{\Omega} \|Q^*\|_e^{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$\|e_{MQ}^*\|_{\Omega}^n = \left\{ \sum_{e=1}^{\Omega} \|e_{MQ}^*\|_e^{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

$$\|M^*\|_e^n = \left\{ \sum_{i=1}^m \|M^*\|_e^i \right\} \frac{1}{m}, \quad \|Q^*\|_e^n = \left\{ \sum_{i=1}^m \|Q^*\|_e^i \right\} \frac{1}{m} \quad (15)$$

$$\|e_{MQ}^*\|_e^n = \left\{ \sum_{i=1}^m \|e_{MQ}^*\|_e^i \right\} \frac{1}{m} \quad (16)$$

한편, 팻취가 겹칠 경우 한 개의 요소에 겹쳐진 횡수만큼의 에너지노름 값이 계산될 수 있다. 본 연구에서는 이 경우 각 노름(norm)값의 국부적 평균을 고려중인 요소의 노름으로 인정했다. 이 값을 각 요소에서 요소의 차수를 상승시키는 지표로 이용한다.

$$\eta_e^m = \frac{\|e_{MQ}^*\|_e^n}{(\|M^* Q^*\|_e^{n^2} + \|e_{MQ}^*\|_e^{n^2})^{\frac{1}{2}}} \% \quad (17)$$

$$\xi_e = \frac{\eta_e^m}{\eta_\Omega} \quad (18)$$

식 (17),(18)에서 m 은 특정 요소가 각 팻취에 속한 회수, η_e^m 는 노름값의 국부적 평균값을 이용해 계산된 요소의 상대오차를 나타낸다. 따라서, 새로운 오차지표 ξ_e 는 식 (18)로 정의하였다. 즉, $\xi_e > 1$ 일 경우 p 의 차수를 증가시키게 된다.

$$\zeta_\Omega = \sqrt{\frac{U_{ex}^L - U_p^i}{U_{ex}^L}} \times 100(\%) \quad (23)$$

3. 수치해석 예제

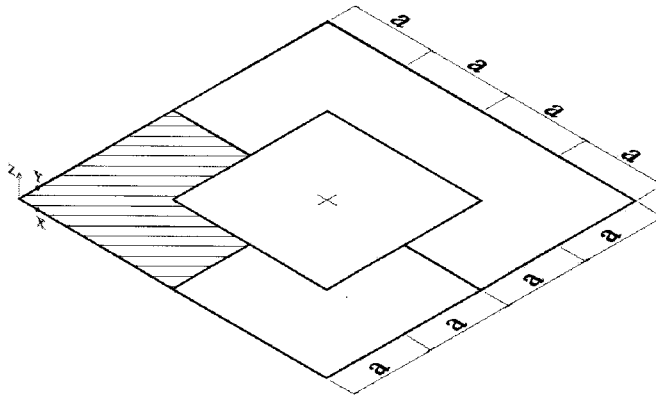


그림 1. 힘을 받는 L-형 평판

해석예제는 그림 1과 같이 적응적 유한요소법의 예제로 많이 사용되는 힘을 받는 L-형 평판을 선택하였다. 영역은 $a=0.125$ 이며 두께는 0.01이다. 재료상수는 각 $E=10.29$, $\nu=0.3$ 으로 설정했고 등분포하중 1.0을 재하하였다. 외부경계의 사변을 모두 고정단으로 설정하고 내부경계의 사변은 자유단으로 했다. 또한 그림에 나타난 길이의 단위는 모두 cm를 나타낸다. 처음 시작되는 초기체눈은 모두 $p=1$ 차로 고정하였다. 체눈설계는 그림 2와 그림 3에 나타난 바와 같이 대칭성을 감안하여 1/4모델을 해석하였으며 12-요소, 27-요소로 초기 요소망을 구축하였다. 각 해석단계에서 형상함수는 불균등하게 분포되었으며 Energy Norm을 이용해 상

대오차를 계산하여 수렴정도를 판단하였다. 그림 4는 12-요소를 사용했을 때 차수의 분배상황을 나타낸다. 등분포하중을 재하하였으므로 형상대로 1/8 대칭축을 중심으로 차수분배가 대칭으로 나타났다. 또한 평판의 모멘트 특이(moment singularity)가 일어나는 내부직각부위에서 고차의 형상함수가 사용된 것을 볼 수 있다. 오차량도 5%이하를 만족하는 수준으로 해석이 되었다. 그림 5의 27-요소를 사용했을 때의 차수 분배상황도 12-요소의 경우와 유사하게 나타난다. 모멘트특이가 일어나는 내부 직각부위에서 고차의 형상함수가 사용된 것을 확인할 수 있다. 표 1은 본 논문에서 제안하고 있는 오차지수를 나타내었고 그 값은 5% 내외의 값에서 수렴하고 있음을 볼 수 있다. 그림 6은 약 300 자유도 정도에서 요소망에 상관없이 비슷한 변형에너지값을 나타내고 있다.

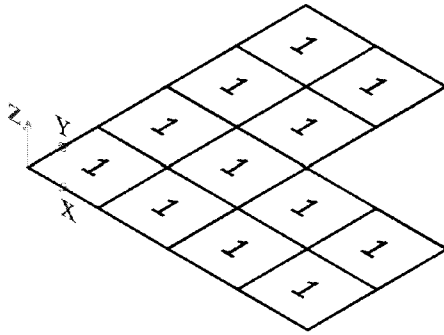


그림 2. 12-요소 모델

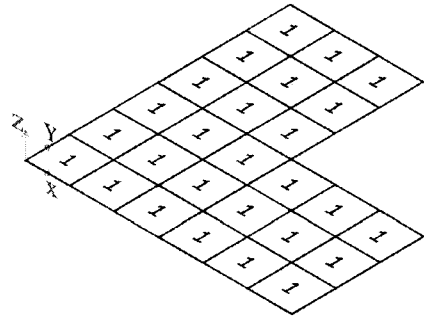


그림 3. 27-요소 모델

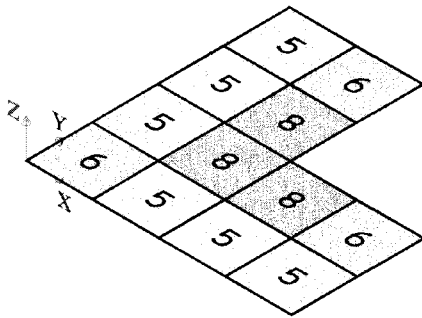


그림 4. 12-요소모델의 9번째 반복후의 오차($\eta_{\Omega} = 3.69\%$)

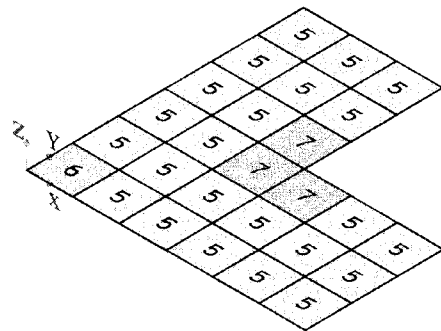


그림 5. 27-요소모델의 8번째 반복후의 오차($\eta_{\Omega} = 2.16\%$)

4. 결론 및 고찰

평면문제에 적용되어 유효함을 보인 적응적 p -세분화는 평판의 휨문제에 적용되어도 역시 유효함을 알 수 있었다. 응력과 함응력을 사용하는 일반적인 상황의 유한요소체에 대해서 적응적 p -세분화는 안정적인 결과를 도출함이 입증되었다. p -세분화의 경우 응력의 변화가 완만한 곳에서 저차함수, 즉 자유도의 양을 줄이고 함응력 또는 응력의 변화가 급한 곳은 고차함수 즉 자유도의 수를 늘려서 계산하기 때문에 그 효율성은 더 높다고 할 수 있다. 즉, 필요한 곳에 더 많은 자유도를 분배하는 개념이라 할 수 있다. 이러한 개념은 더 나아

가 같은 요소의 비선형 문제에서도 훨씬 더 효율적인 해를 찾아낼 수 있는 수단을 제공할 것으로 생각된다.

표 1 자유도에 따른 해석영역 전체의 오차 η_Ω

No. of Iteration	12 -element model			No. of Iteration	27 -element model		
	NDF	η_Ω (%)	η_Ω/DOF (%)		NDF	η_Ω (%)	η_Ω/DOF (%)
1	32	6.5280E+01	2.040E+00	1	75	6.7435E+01	8.991E-01
2	100	3.3549E+01	3.355E-01	2	231	2.1807E+01	9.440E-02
3	168	1.5916E+01	9.474E-02	3	387	6.7019E+00	1.732E-02
4	272	4.9397E+00	1.816E-02	4	508	4.6378E+00	9.129E-03
5	308	4.1440E+00	1.345E-02	5	568	4.4021E+00	7.750E-03
6	347	4.0179E+00	1.158E-02	6	607	4.3247E+00	7.125E-03
7	395	5.0677E+00	1.283E-02	7	673	4.1443E+00	6.158E-03
8	480	9.2299E+00	1.923E-02	8	730	5.2720E+00	7.222E-03
9	526	3.9622E+00	7.533E-03	9	826	4.2634E+00	5.162E-03
10	526	3.9622E+00	7.533E-03	10	838	4.2248E+00	5.042E-03

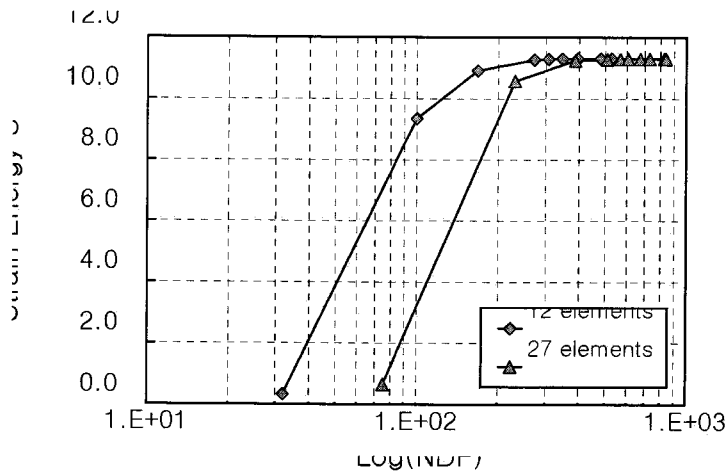


그림 6 각 요소망에 따른 변형에너지 수렴

참고문헌

- 우광성, 조준형, 안재석 (2003) 사후 오차평가에 의한 적응적 p -체는 세분화, 대한토목학회논문집, 23(2A), pp.177-185
- 우광성, 이동진, 조준형 (2006) 적응적 p -Version 유한요소법에서 정규크리깅에 의한 응력복구기법, 대한토목학회 논문집, 26(4A), pp.677-687
- 우광성, 조준형, 박미영 (2006) 2차원 균열판의 p -적응적 유한요소해석을 위한 정규크리깅 보간법의 적용, 한국전산구조공학회 논문집, 19(4), pp.429-440