

파진행 문제를 위한 Paraxial 경계조건의 유한요소해석

Finite Element Analysis with Paraxial Boundary Condition

김 회 석* · 이 중 세**

Kim, Hee-Seok · Lee, Jong-Seh

ABSTRACT

For the propagation of elastic waves in unbounded domains, absorbing boundary conditions at the fictitious numerical boundaries have been proposed. In this paper we focus on both first- and second-order paraxial boundary conditions(PBCs) in the framework of variational approximations which are based on paraxial approximations of the scalar and elastic wave equations. We propose a penalty function method for the treatment of PBCs and apply these into finite element analysis. The numerical verification of the efficiency is carried out through comparing PBCs with Lysmer-Kuhlemeyer's boundary conditions.

Keywords: *absorbing boundary, paraxial boundary, variational approximations, penalty function method*

1. 서 론

다양한 동적문제의 해석적 연구에 있어서의 합리적인 접근방법은 이 문제들을 무한 또는 반무한 영역에서 파의 진행문제로서 고려하는 것이지만 대부분의 문제들이 비균질성 및 복잡한 형상 때문에 해석적인 해(closed form solution)를 찾는 것이 거의 불가능하다. 따라서 수치적인 방법을 이용하는 것이 필요하며, 유한차분법, 유한요소법, 경계요소법 및 이들을 조합하는 방법 등이 쓰이고 있다(이중세, 손윤기, 1998). 그러나 무한영역을 유한의 요소영역으로 모형화 할 경우에 파가 제한된 대상 모형의 유한 경계에 도달한 후 반사 현상이 발생하게 되며 이로 인해 구조계 전체의 응답에 큰 영향을 미치게 된다. 따라서 무한영역을 모형화 하는데 있어서 반사파의 영향을 상쇄시켜주는 인공적인 경계가 필요한데, 이러한 인공적인 경계를 흡수경계(absorbing boundary)라고 하며 파진행 문제에 널리 사용되고 있다. 지금까지 점성감쇠기를 요소의 경계에 부착시키는 방법(Lysmer-Kuhlemeyer, 1969), Dirichlet & Numann 경계조건을 조합하는 방법(Smith, 1974; Givoli, 1992), 파의 분산관계를 이용하는 방법(Lindman, 1975; Clayton-Engquist, 1977; Higdon, 1992; Krenk, 2002), 외삽법(extraploation)을 이용하는 방법(Liao-Wong, 1984), 완충지대(buffer zone)를 요소의 경계에 부착시키는 방법(Hu, 1996; Komatitsch-Tromp, 2003; Basu-Chopra, 2004), 유한요소법과 경계요소법을 조합하는 방법(Karabalis-Beskos, 1985; Estorff, 1991), 그리고 무한요소를 이용하는 방법(Yerli-Ternel-Kiral, 1998; Kim-Yun, 2000) 등 여러 연구자들에 의해 많은 흡수경계들이 제안되었다. 이중 Clayton-Engquist(1977)에

* 정회원 · 한양대학교 토목공학과 박사과정 Email: lagoon@ihanyang.ac.kr

** 정회원 · 한양대학교 토목공학과 교수 Email: jonglee@hanyang.ac.kr

의해 제안된 흡수경계는 파의 분산관계를 근사화 시킨 경계조건(paraxial boundary condition)을 이용한 것으로서, 성능이 우수할 뿐만 아니라 근사화 단계에 따라 성능을 조절 할 수 있으며 수치해석시 계산적인 부담을 주지 않는다. 그러나 경계조건이 복잡한 편미분 방정식으로 표현되어 있어 유한차분해석으로의 적용은 용이하나 유한요소해석으로의 적용이 어렵다. 이러한 문제를 해결하기 위해 Cohen(1983)은 경계면에서 탄성과 방정식과 paraxial 경계조건을 중첩하여 경계적분을 수행함으로써 유한요소 해석을 수행하였다. 그러나 이러한 방법은 경계를 복잡하게 만들 뿐만 아니라 성능 또한 우수하지 못하다(Kellezi, 2000).

본 논문에서는 penalty function method를 이용하여 전체 에너지 범함수(kinetic & total potential energy functional)와 paraxial 경계조건을 함께 변분정식화 함으로서 유한요소해석을 수행하였다. 이러한 방법은 paraxial 경계조건이 전체 에너지 범함수에 포함되어 지배방정식이 구성되므로 경계조건을 고려하기 위한 추가적인 수학적 처리과정과 보간함수의 정의가 요구되지 않는다. 그러나 paraxial 경계조건은 1차 및 2차의 편도함수들로 구성되어 있으므로 수치적분시 2차 편미분이 가능한 보간함수와 1차 및 2차 편도함수들에 대한 Jacobian 행렬이 요구된다. 따라서 본 논문에서는 수치적분시 serendipity 요소를 사용하고 1·2차 편도함수에 대한 Jacobian 행렬을 정의함으로써 유한요소해석을 수행하였다. 또한 개발된 유한요소프로그램을 이용하여 paraxial 경계조건과 점성감쇠기를 이용하는 Lysmer-Kuhlemeyer(1969) 경계조건의 성능을 비교하였다.

2. Paraxial 경계조건

Paraxial 경계조건은 스칼라 및 탄성과 방정식의 paraxial 근사화(approximation)를 통해 유도되는 흡수경계조건으로서, 진행하는 파(wave field)를 해석하고자하는 영역 안으로 진행하는 파와 영역 밖으로 진행하는 파로 분리하여 영역 밖으로의 파에 대해 paraxial 근사화를 수행함으로써 유도된다. 이러한 경계조건은 시간과 공간에 대해 국부적(local)이며 해석이 가능한 초기경계치 문제를 형성한다(Engquist-Majda, 1977). 또한 수치해석시 안정하며 계산적으로 효과적이다(Clayton-Engquist, 1977). Paraxial 경계조건은 그림 1로부터 정의되는 식 (1)의 파의 분산관계(dispersion relation)로부터 유도된다.

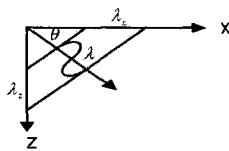


그림 1 파의 분산관계

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{2\pi}{\lambda/\cos\theta} = k \cos\theta \\ k_y &= \frac{2\pi}{\lambda_y} = \frac{2\pi}{\lambda/\sin\theta} = k \sin\theta \\ k^2 &= k_x^2 + k_y^2 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 λ_x , λ_z , k_x , 그리고 k_z 는 각각 x 방향 및 z 방향 파장(wave length)과 파수(wave number)이며, λ 와 k 는 임의방향 파장 및 파수이다.

시간과 공간에 대해 국부적인 경계조건을 얻기 위해 식 (1)을 근사화시키면 식 (2)를 얻을 수 있다.

$$(k_x/\omega)\mathbf{I} = -\left(\mathbf{A} + \mathbf{B}(k_y/\omega) + \mathbf{C}(k_y/\omega)^2\right) + O(k_y/\omega)^3 \quad (2)$$

여기서 \mathbf{I} 는 단위행렬이고 \mathbf{A} , \mathbf{B} 그리고 \mathbf{C} 는 결정해야할 임의의 행렬이며, 이들은 주파수 영역에서 정의

된 식 (3)의 균질한 등방성 매체에서의 탄성과 방정식에 삽입되어 산정된다.

$$-\mathbf{I} + \mathbf{D}_1 (k_x/\omega)^2 + \mathbf{H} (k_x/\omega)(k_y/\omega) + \mathbf{D}_2 (k_y/\omega)^2 = \mathbf{0} \quad (3)$$

식 (3)에서 ω 는 각주파수(angular frequency)이며 \mathbf{D}_1 , \mathbf{H} 그리고 \mathbf{D}_2 는 다음과 같이 정의된다. 여기서 ρ 는 매질의 밀도이며 λ 와 μ 는 재료 상수(Lame's constant)이다.

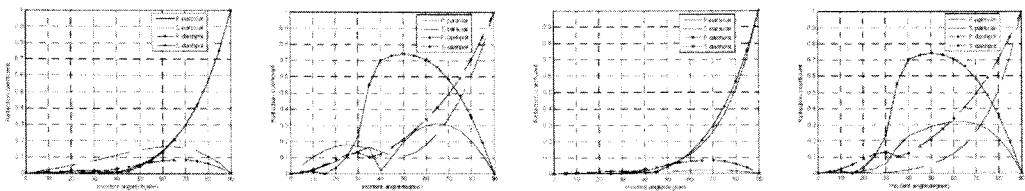
$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)/\rho & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & (\lambda + \mu)/\rho \\ (\lambda + \mu)/\rho & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \mu/\rho & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu)/\rho \end{bmatrix}$$

시간영역에서의 Paraxial 경계조건은 식 (2)에 Fourier 역변환을 행함으로서 얻어지는데 역변환시 고려되는 행렬의 수에 따라 성능이 우수한 고차의 경계조건을 얻을 수 있다. 식 (4)는 식 (2)의 행렬 \mathbf{A} 만을 고려하여 산정된 1차의 down-going paraxial 경계조건이며 식 (5)는 행렬 \mathbf{A} , \mathbf{B} 그리고 \mathbf{C} 를 고려하여 산정된 2차의 down-going paraxial 경계조건이다. 이때 파의 진행방향(상하좌우)에 따라 각각 4개의 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u_{x,y} \\ u_{y,y} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x,t} \\ u_{y,t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} u_{x,y} \\ u_{y,y} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x,n} \\ u_{y,n} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (\alpha - \beta)/\beta \\ (\alpha - \beta)/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x,\alpha} \\ u_{y,\alpha} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (2\alpha - \beta)/2 & 0 \\ 0 & (2\beta - \alpha)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x,\alpha\alpha} \\ u_{y,\alpha\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

유도된 식 (4)와 (5)의 성능을 고찰하기 위해 P파와 S파가 경계면에 입사하는 경우를 고려하여 각각에 대한 반사계수를 산정하였으며, 이를 점성감쇠기를 이용하는 Lysmer-Kuhlemeyer(1969)의 경계조건에 대한 반사계수와 함께 그림 2와 3에 나타내었다. 여기서 실선은 반사되는 P파 그리고 점선은 반사되는 S파에 대한 반사계수를 각각 나타낸다.



(a)P파 입사시 반사계수 (b)S파 입사시 반사계수 (a)P파 입사시 반사계수 (b)S파 입사시 반사계수
 그림 2 1차 paraxial 경계조건에 대한 반사계수 그림 3 2차 paraxial 경계조건에 대한 반사계수

여기서 그림 2의 P파 입사시 반사되는 S파의 경우를 제외한 모든 경우에 대해 paraxial 경계조건이 Lysmer-Kuhlemeyer의 경계조건보다 우수한 성능을 가지고 있음을 볼 수 있다.

3. 유한요소해석

3.1. Paraxial 경계조건의 변분정식화

본 논문에서는 penalty function method를 이용하여 paraxial 경계조건을 탄성학 문제에서의 전체 에너지 범함수에 삽입한 후 변분정식화 함으로서 유한요소해석을 수행하였다. 이러한 방법은 paraxial 경계조건이 전체 에너지 범함수에 포함되어 지배방정식이 구성되므로 경계조건을 고려하는데 있어서 추가적인 수학적 처리과정과 보간함수의 정의가 요구되지 않으므로 유한요소해석으로의 적용이 용이하다. 식 (6)은 전체 에너지와 paraxial 경계조건을 포함한 범함수이며, 여기서 δ 는 변분연산자, K 는 운동에너지, Π 는 전체 포텐셜 에너지, γ_i 는 penalty 함수, G_i 는 paraxial 경계조건, 그리고 u_i 는 변위를 각각 나타낸다.

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} [K - \Pi] dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V \gamma_i G_i \delta u_i dV \right] dt \quad (6)$$

식 (6)에 식 (4)와 (5)를 각각 삽입한 후 변분정식화와 유한요소정식화를 수행하면 식 (7)과 (8)의 요소행렬을 각각 얻을 수 있다.

$$\int_V \rho \Psi^T \Psi dV - \int_S \Psi^T P G \Psi dS + \left\{ \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV - \int_S \Psi^T (\mathbf{P} \mathbf{B}_x + \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_x + \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_y) dS \right\} \Delta = \int_V \Psi^T \mathbf{f} dV \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_V \rho \Psi^T \Psi dV - \int_S \Psi^T P G_1 \Psi dS \right\} \Delta - \int_S \Psi^T P (\mathbf{B}_x + \mathbf{G}_2 \mathbf{B}_y) dS \\ & + \left\{ \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV - \int_S \Psi^T (\mathbf{P} \mathbf{G}_3 \mathbf{B}_{yy} + \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_x + \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_y) dS \right\} \Delta = \int_V \Psi^T \mathbf{f} dV \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 Ψ 는 보간함수행렬, \mathbf{C} 는 재료상수행렬, \mathbf{f} 는 체적력(body force)벡터이며, 나머지 행렬들은 아래와 같이 정의된다. 식 (7)과 (8)에서 paraxial 경계조건이 범함수에 포함되어 요소행렬을 이루고 있음을 볼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{66} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1/\beta \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & (\alpha - \beta)/\alpha \\ (\alpha - \beta)/\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} (\alpha - 2\beta)/2 & 0 \\ 0 & (\beta - 2\alpha)/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \psi_{1,x} & 0 & \psi_{2,x} & 0 & L & \psi_{n,x} & 0 \\ 0 & \psi_{1,y} & 0 & \psi_{2,y} & L & 0 & \psi_{n,y} \\ \psi_{1,y} & \psi_{1,x} & \psi_{2,y} & \psi_{2,x} & L & \psi_{n,y} & \psi_{n,x} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_x &= \begin{bmatrix} \psi_{1,x} & 0 & \psi_{2,x} & 0 & L & \psi_{n,x} & 0 \\ 0 & \psi_{1,x} & 0 & \psi_{2,x} & L & 0 & \psi_{n,x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} \psi_{1,y} & 0 & \psi_{2,y} & 0 & L & \psi_{n,y} & 0 \\ 0 & \psi_{1,y} & 0 & \psi_{2,y} & L & 0 & \psi_{n,y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{yy} = \begin{bmatrix} \psi_{1,yy} & 0 & \psi_{2,yy} & 0 & L & \psi_{n,yy} & 0 \\ 0 & \psi_{1,yy} & 0 & \psi_{2,yy} & L & 0 & \psi_{n,yy} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.2. 해석예제

경계면에서 paraxial 경계조건의 성능을 조사하기 위해 그림 4의 모형 A와 모형 B에서의 변위를 비교하였다. 여기서 모형 A는 96km×48km의 모형으로써 수신점을 가진점으로부터 12km 떨어진 지표면에 위치시켜 반사파가 수신점에 도달하기 전인 12초까지의 변위를 측정하였다. 모형 B는 24km×24km의 모형으로써 수신

점을 모형 A와 동일하게 위치시켜 역시 12초까지의 변위를 측정하였다. 표 1은 해석에 사용된 매질의 물성을 나타내며 모형의 지표면 중앙에 주기하중을 재하시킴으로써 등적 해석을 실시하였다.

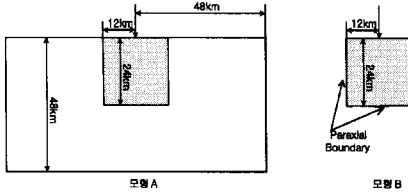


그림 4 흡수효과 고찰에 사용된 모형

표 1 매질의 물성 및 강제진동수

포아송비	밀도 (kg/m^3)	탄성계수 (kgf/m^2)	강제진동수 (Hz)
0.3	7,800	209E9	0.5

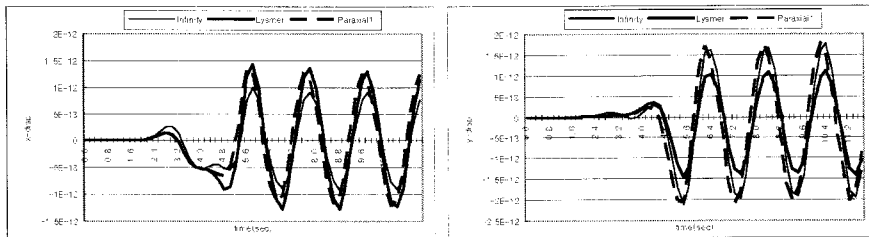


그림 5 흡수경계의 성능비교(Lysmer-Kuhlemeyer vs. 1st paraxial)

그림 5는 모형 A와 B의 수신점에서 측정된 x 및 y 방향 변위를 각각 나타낸 것이다. 여기서 x 방향 변위 성분에 대해서는 Lysmer-Kuhlemeyer와 1차의 paraxial 경계조건이 비슷한 성능을 보이나 y 방향 변위 성분에 대해서는 paraxial 경계조건이 보다 우수한 성능을 가짐을 볼 수 있다. 파의 진행방향에 대한 입자의 운동방향을 고려했을 때 지표면에서의 x 방향 및 y 방향 변위성분은 각각 P파 및 S파의 입자운동을 대표한다고 볼 수 있으며, 이로부터 해석체인 그림 2와 수치해인 그림 5의 결과가 일치함을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 흡수경계로서 우수한 특성을 가지고 있으나 유한요소해석으로의 적용이 어려운 paraxial 경계조건을 penalty function method를 이용하여 탄성학문제의 전체 에너지 범함수에 포함시켜 변분정식화 함으로써 유한요소 해석을 수행하였다. 이러한 방법은 경계조건이 범함수에 포함되어 지배방정식이 유도되므로 경계조건을 고려하기 위한 수학적 처리과정이나 새로운 보간함수의 개발이 요구되지 않아 유한요소해석으로의 적용이 용이하다. 또한 paraxial 경계조건뿐만 아니라 새롭게 정의 되는 경계조건에 대한 유한요소해석에도 적용이 가능하다. 그러나 경계조건이 고차의 편미분 항을 포함할 경우 수치적분을 위해서는 고차의 보간함수와 Jacobian 행렬의 정의가 요구된다.

참고문헌

이종세, 손윤기 (1998) 표면파 산란거동의 유한요소 해석, 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 11(1), pp.383~389.

- Basu, U. and Chopra, A.K.** (2004) Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 59, pp.1039~1074.
- Clayton, R. and Engquist, B.** (1977) Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations, *Bull. Seis. Soc. Am.*, 67(6), pp.1529~1540.
- Cohen, M. and Jennings, P.C.** (1983) Silent boundary methods for transient analysis, *Computational methods for transient analysis*, Elsevier, Amsterdam, pp.301~360.
- Engquist, B. and Majda, A.** (1977) Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Mathematics of Computation*, 31(139), pp.629~651.
- Estorff, O.V.** (1991) Dynamic response of elastic blocks by time domain BEM and FEM, *Computers and Structures*, 38(3), pp.289~300.
- Givoli, D.** (1992) *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*, Elsevier Scientific, Amsterdam.
- Higdon, R.L.** (1992) Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves in stratified media, *Journal of Computational Physics*, 101, pp.386~418.
- Hu, F.Q.** (1996) On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a Perfectly Matched Layer, *Journal of Computational Physics*, 129, pp.201~219.
- Karabalis, D.L. and Beskos, D.E.** (1985) Dynamic response of 3-D flexible foundations by time domain BEM and FEM, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 4, pp.91~101.
- Kellezi, L.** (2000) Local transmitting boundaries for transient elastic analysis, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 19, pp.533~547.
- Kim, D.K. and Yun, C.B.** (2000) Time-domain soil-structure interaction analysis in two-dimensional medium based on analytical frequency-dependent infinite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, pp.1241~1261.
- Komatitsch, D. and Tromp, J.** (2003) A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation, *Geophys. J. Int.*, 154, pp.146~153.
- Krenk, S.** (2002) Unified formulation of radiation conditions for the wave equation, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 53, pp.275~295.
- Liao, Z.P. and Wong, H.L.** (1984) A transmitting boundary for the numerical simulation of elastic wave propagation, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 3(4), pp.174~183.
- Lindman, E.L.** (1975) Free-Space boundary conditions for the time dependent wave equation, *Journal of Computational Physics*, 18, pp.66~78.
- Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L.** (1969) Finite dynamic model for infinite media, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proceedings of ASCE, 95(EM4), pp.859~877.
- Smith, W.D.** (1974) A Nonreflecting plane boundary for wave propagation problems, *Journal of Computational Physics*, 15, pp.492~503.
- Yerli, H.R., Ternel, B. and Kiral, E.** (1998) Transient infinite elements for 2D soil-structure interaction analysis. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 124(10), pp.976~988.