

초기치를 갖는 비동질무한영역의 해석을 위한 비례경계무한요소법

Infinite element for the scaled boundary analysis of initial valued non-homogeneous elastic half space

이계희* Andrew J. Deeks†
Lee, GyeHee

ABSTRACT

In this paper, to analyze the initial valued non-homogeneous elastic half space by the scaled boundary analysis, the infinite element approach was introduced. The free surface of the initial valued non-homogeneous elastic half space was modeled as a circumferential direction of boundary scaled boundary coordinate. The infinite element was used to represent the infinite length of the free surface. The initial value of material property(elastic modulus) was considered by the combination of the position of the scaling center and the power function of the radial direction. By use of the mapping type infinite element, the consistent elements formulation could be available. The performance and the feasibility of proposed approach are examined by two numerical examples.

Keywords : *Scaled boundary analysis; Initial valued non-homogeneous half space; Mapping type infinite element*

1. 서론

지반과 같은 무한영역과 구조물 같은 유한영역을 공학적으로 동시에 고려하는 문제는 여러 연구자들에게 항상 난제로 취급되고 있다. 이러한 문제를 공학적으로 고려하기 위하여 여러 가지 방법들이 제안되어 왔는데, 이 중에는 무한요소를 이용하는 방법, 경계요소를 이용하는 방법, 무한요소와 무요소를 결합하는 방법등 유한영역과 무한영역의 조합을 위한 접근법등이 있다.

최근에는 비례경계무한요소법이라는 준해석적인 접근법에 의하여 지반과 같은 무한영역의 해석이 시도되었으며 이러한 준해석적인 특징을 균열선단의 응력장에도 성공적으로 적용할 수 있음이 입증되었다. 이 방법은 특히 유한영역과 무한영역을 같은 방법으로 동시에 고려할 수 있는 장점을 가지고 있어 깊이에 따라 탄성계수가 변하는 비동질반무한평면에 적용할 수 있음이 Doherty와 Deeks의 연구

*정회원 · 목포해양대학교, 해양시스템공학부 공학박사 E-mail: lghlsk@mmu.ac.kr

†Professor, University of Western Australia

(Doherty와 Deeks, 2003)에서 구현되었다. 그러나 이 연구에서 비동질무한공간의 표면은 비례경계요소법의 측면을 이용해 모델링하여 무한영역의 비례중심은 반드시 멱함수에 의한 지반불성치의 변화를 나타내기 위하여 지표에 위치해야 했다. 이러한 비례중심의 위치는 측면에서 이산화가 불필요한 비례경계유한요소법의 장점을 살려 무한지표면을 나타내기에 용이하나, 필연적으로 지표면에서의 지반의 탄성계수를 0으로 가정해야 한다. 그러나 이러한 가정은 일반적인 공학문제에 적용하는데 적합하지 않다. 이들은 지층에 매입된 기초를 해석하기 위하여 이 연구를 개선하였으나(Doherty와 Deeks, 2005), 반무한공간의 표면에서 강성을 가지지 못하는 문제점은 근본적으로는 해결하지 못하였다.

본 연구에서는 이러한 멱함수를 이용한 비동질 지반의 고려시 발생하는 지표탄성계수의 불합리를 개선하여 초기치를 가질 수 있도록 무한요소를 비례경계유한요소법에 도입하였다.

2. 초기치를 갖는 비동질 탄성영역

초기치를 갖는 비동질무한영역을 고려하기 위하여 그림 1와 같이 지표로부터 이격된 떨어진 곳에 비례중심을 가정한다. 이 경우 비례중심의 좌표는 $(0, y_1)$ 이다. 이 모델에서 반무한공간의 표면은 비례경계요소법에서 경계방향으로 모델링하며 따라서 이산화가 필요하다. 그러나 일반적인 비례경계유한요소법에서 지표면을 측면으로 모델링한다.

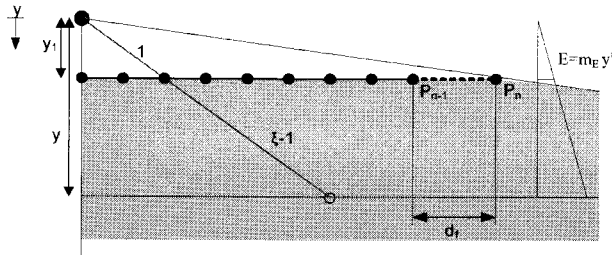


그림 1. 비례중심이 지표면이 아닌 무한영역의 모델

비동질반무한영역에서의 탄성계수가 식 (1)을 따른다고 하자.

$$E = m_E y^\alpha \quad (1)$$

여기서 m_E 는 지층의 특성을 나타내는 상수이고 α 는 지층의 비동질성을 나타내는 상수이다. 지표면에서의 탄성계수는 y_1 과 α 의 두 변수에 의하여 결정할 수 있다.

$$E_0 = m_E y_1^\alpha \quad (2)$$

비례경계에서의 탄성계수는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$E(\xi, s) = m_E (\xi y(s))^\alpha = m_E \xi^\alpha (y(s))^\alpha \quad (3)$$

비례중심에서 이산화된 경계를 지나는 직선을 가정하면 깊이 y 에 따른 탄성계수는 다음과 같이 나타낼

수 있다.

$$\frac{1}{\xi} = \frac{y_1}{y} \quad (4)$$

$$y(s) = y_1 = \frac{y}{\xi} \quad (5)$$

$$E = m_E \xi^\alpha \left(\frac{y}{\xi} \right)^\alpha = m_E y^\alpha \quad (6)$$

식(6)에서 임의점의 깊이 y 에 대한 탄성계수는 y 만의 함수이고 변수 ξ 에는 독립적이다. 그러므로 동일한 깊이의 지층에서는 동일한 탄성계수를 가진다. 따라서 지표면에서 탄성계수의 초기값을 일정하게 결정할 수 있다.

이러한 접근법에는 다음과 같은 두 가지의 제한사항이 있다.

- 유한영역에는 적용이 곤란하다.
- 만일 $d_f \rightarrow \infty$ 이라면 이 모델은 반무한영역을 나타낼 수 있다. 그러나 이산화경계를 무한점까지 확장하지 않으면 수치적으로 완전한 반무한 공간을 나타낼 수 없다.

무한영역을 고려하는 대부분의 공학적인 문제에서 유한영역의 물성치는 일정한 경우로 모델링할 수 있다. 즉 기초나 되매움지반이 이와 같은 경우이다. 또한 유한영역은 유한요소법과 같은 다른 전산해석기법을 적용하여 적절한 응답을 얻기가 용이하다. 따라서 첫 번째 문제점은 이 해석기법에 있어서 문제가 되지 않는다. 두 번째로 무한영역에 대한 이산화는 무한요소를 도입하여 해결할 수 있다.

3. 비례경계무한요소법

반무한공간을 축대칭으로 가정한다면 비례중심은 회전축상에 있어야 하고 평면응력이나 평면변형을 가정한다면 비례중심은 평면상에 임의의 위치에 있어야 하나 지표면의 초기강성을 나타내기 위하여 적절한 수직위치에 있어야 한다. 이 값은 비동질파라미터의 값과 초기강성에 의하여 결정된다.

이산화된 경계 S 는 이산화절점($r_s(s)$, $z_s(s)$)에 의해 표시된다. 여기서 s 는 이산화경계 S 를 따라 측정된 좌표이다. 무한요소의 도입은 무한영역에 국한되므로 실제 고려대상이 되는 ξ 의 값은 $1 \leq \xi < \infty$ 의 범위이다.

무한한 길이의 지표면을 나타내기 위하여 이산경계는 무한상사함수 $[M]$ 를 이용해 보간한다.

$$s = [M(\eta)]\{s_i\} \quad (7)$$

여기서 $[M(\eta)]$ 은 무한영역을 나타내는 상사함수이고 $\{s_i\}$ 는 S 상의 절점좌표이다. 따라서 임의점의 직교좌표는 다음과 같이 나타난다.

$$r_s(s) = s \cos(\theta) \quad (8a)$$

$$z_s(s) = s \sin(\theta) \quad (8b)$$

여기서 θ 는 s 좌표계와 직교좌표계가 이루는 각이다. 무한점을 나타내는 무한상사함수는 기하학적인 좌표를 나타내기 위해서만 사용되며 변위나 다른 함수값의 보간에는 일반적인 유한요소의 형상함수가 사용된다. 대표적인 1,2,3차의 무한상사함수들은 표 1에 나타내었다.(Bettes, 1992)

표 1. 무한상사함수

node	linear		quadratic		cubic	
	M_i	$\partial M_i / \partial \eta$	M_i	$\partial M_i / \partial \eta$	M_i	$\partial M_i / \partial \eta$
i	$\frac{2}{(1-\eta)}$	$\frac{2}{(1-\eta)^2}$	$\frac{-2\eta}{(1-\eta)}$	$\frac{-2}{(1-\eta)^2}$	$\frac{(-1+9\eta^2)}{4(1-\eta)}$	$\frac{(-1+18\eta-9\eta^2)}{4(1-\eta)^2}$
j	-	-	$\frac{(1+\eta)}{(1-\eta)}$	$\frac{2}{(1-\eta)^2}$	$\frac{(4-8\eta-12\eta^2)}{4(1-\eta)}$	$\frac{(-4-24\eta+12\eta^2)}{4(1-\eta)^2}$
k	-	-	-	-	$\frac{(1+4\eta+3\eta^2)}{4(1-\eta)}$	$\frac{(5+6\eta-3\eta^2)}{4(1-\eta)^2}$
l	-	-	-	-	-	-

변위등 함수값의 보간에 사용되는 형상함수 $[N(s)]$ 는 일반적인 유한요소와 동일한 형상함수를 사용한다. 형상함수의 미분값 $[N(s)]_{,s}$ 은 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{dN(s)}{ds} = \frac{dN(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{ds} \tag{9}$$

좌표의 상사에 2차의 무한상사함수가 사용되었다면 (표 1), s 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} s &= [M_i(\eta) \ M_j(\eta)] \{s_i \ s_j\}^T \\ &= M_i(\eta)s_i + M_j(\eta)s_j \end{aligned} \tag{10}$$

s 의 미분항은 다음과 같다.

$$ds = (M_{i(\eta),\eta}s_i + M_{j(\eta),\eta}s_j)d\eta \tag{11}$$

그러므로 $\frac{d\eta}{ds}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{2(s_j - s_i)}{(1-\eta)^2} \tag{12}$$

이 방법에서 형상함수 $[N(s)]$ 와 상사함수 $[M(\eta)]$ 는 서로 다른 함수가 사용되었다. 따라서 이 접근법은 등매개변수법이 아니다.

이들 함수를 이용한 비례경계유한요소법의 수식전개는 기존의 연구(이계희 2007, Wolf 1996)와 대동소이하다.

4. 수치예제

제안된 방법의 유용성을 검증하기 위하여 비동질무한평면에 매입된 기초의 거동을 해석하였다(그림 2). 이 매입기초의 표면에 다양한 하중을 가하고 하중에 의해 발생하는 기초와 인접한 지표면의 거동을 분석하였다. 이 때 무한요소의 도입에 의한 기초거동의 적합성을 중심으로 해석을 수행하였다. 이 예제에서는 기초의 탄성계수는 $E_f = 2000$, 지반의 상수 $m_E = 100$, 비동질파라미터 $\alpha = 0.5$ 를 가정하였다. 포아손 비는 0.3으로 가정하였으며 평면변형거동을 가정하였다.

우선 기초의 표면에 일정한 변위하중을 가한 경우의 수직변위를 그림 3에 나타내었다. 이 그림에서 무한요소를 도입한 경우와 근사해법을 사용한 경우의 회전변형이 각각 다르게 산정된다. 무한요소를 도입한 경우에는 해석영역의 크기와 상관없이 기초의 회전변형이 유사하게 나타나고 무한점과 인접한

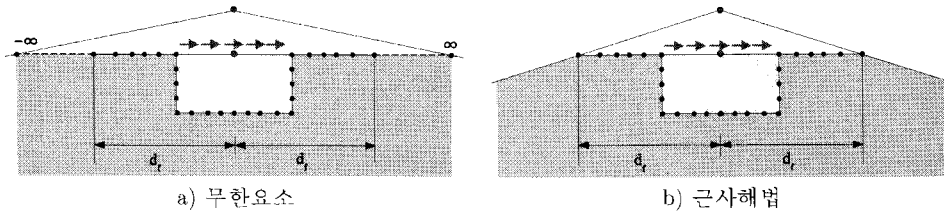


그림 2. 매입기초의 해석모델

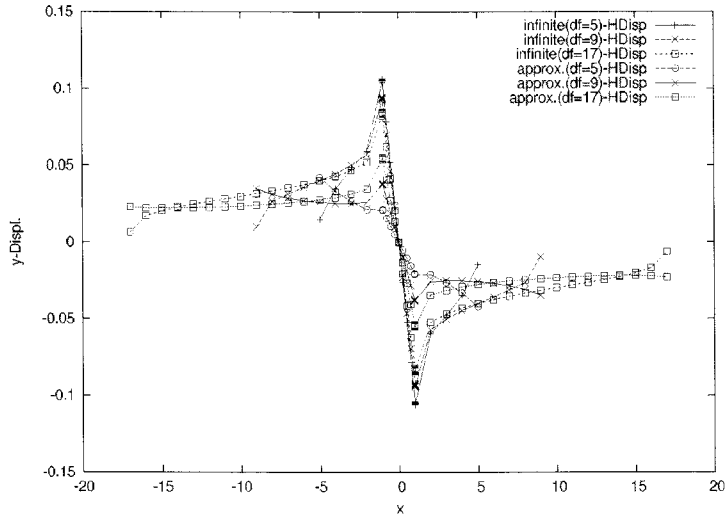


그림 3. 수평변위하중에 대한 기초와 지반의 수직변위

절점의 변형이 지표면과 근접한, 즉 기초로부터 멀어질수록 변형이 작아지는 경향을 보였다. 반면에 근사해법을 적용한 경우에는 기초로부터 멀어질수록 지표면의 변형이 증가하는 경향을 보였다. 근사해법의 경우에도 해석시 고려하는 원역의 범위 d_f 가 커질수록 적합한 거동으로 수렴하는 경향을 보였으나 그 경우에도 무한요소를 사용한 경우보다 큰 거동을 보여주었다.

기초의 표면에 작용하는 수평방향 응력하중에 대한 기초와 인접지반의 수직변형을 그림 4에 나타내었다. 이 경우 횡방향변위하중에 비하여 보다 더 큰 차이를 나타낸다. 기초자체의 변위는 두 경우 모두 유사하게 나타났지만 인접한 표면의 경우 무한요소를 적용한 경우에는 횡방향변위하중이 가해진 경우와 유사한 거동을 보였지만 근사해법을 적용한 경우 상대적으로 큰 수직변형을 보인다. 그러나 해석에 고려하는 영역이 커질수록 근사해법의 경우도 적합한 쪽으로 변형이 이동하는 것을 알 수 있다. 그러나 무한요소를 사용한 경우에는 해석영역의 크기에 관계없이 안정적인 거동을 보인다.

5. 결론

표면에서의 초기강성을 갖는 비동질반무한공간을 비례경계유한요소법을 이용하여 해석하기 위해 무한요소를 비례경계유한요소법에 도입하였다. 사상형무한요소를 지표면을 나타내는 무한영역에 적용하고 이와 관련된 식을 정식화하였다. 그 결과 비동질반무한공간의 근사해석법에 비하여 안정적이고 일관성

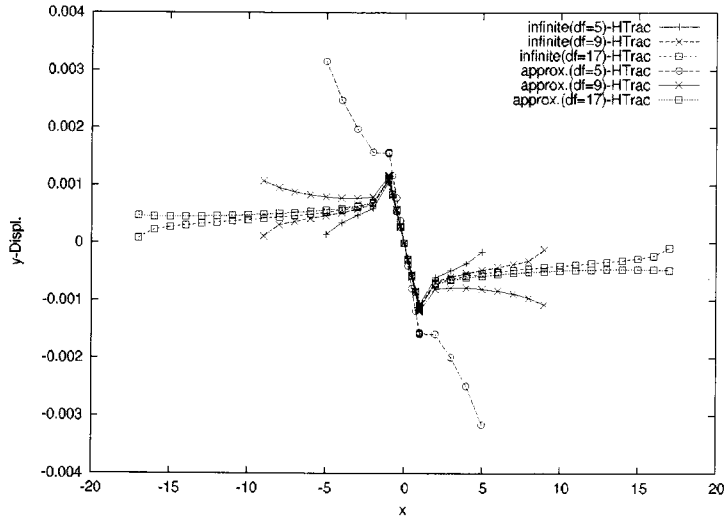


그림 4. 수평하중에 대한 기초와 지반의 수직변위

있는 해를 보여주었다. 본 연구에서 얻어진 결과를 바탕으로 층상지반에 이를 적용하는 방법에 대한 연구를 수행할 예정이다.

참고문헌

- 이계희, "비등질 반무한 평면에서의 비례경계유한요소", 한국전산구조공학회논문집, 2007, (인쇄중)
- Peter Bettess, *Infinite Elements*, First edition, Penshaw Press, 1992
- John P. Wolf, *The scaled boundary finite element method*, John Wiley & Sons, 2003
- J. P. Doherty and A. J. Deeks, "Scaled finite element analysis of a non-homogeneous elastic half space", *Int. J. for numerical methods in engineering*, 57, 955-973, 2003
- J. P. Doherty and A. J. Deeks, "Adaptive coupling of the finite-element and scaled boundary finite-element methods for non-linear analysis of unbounded medi", *Computer & Geotechnics*, 32, 436-444, 2005