

탄성스프링으로 지지된 곡선형 Timoshenko 보의 면내 자유진동

In-Plane Vibrations of Curved Timoshenko Beams with Elastic Springs at Both Ends

오 상 진* · 모 정 만** · 강 희 중***
Oh, Sang-Jin · Mo, Jeong-Man · Kang, Hee-Jong

ABSTRACT

The differential equations governing free, in-plane vibrations of circular curved beams with elastic springs at both ends, including the effects of axial deformation, rotatory inertia and shear deformation, are solved numerically using the corresponding boundary conditions. The lowest three natural frequencies are calculated over a wide range of non-dimensional system parameters: the radial, tangential and rotational spring parameters, the subtended angle, the slenderness ratio and the shear parameter.

Keywords: circular curved beam, elastic spring support, in-plane free vibration, axial deformation, rotatory inertia, shear deformation.

1. 서 론

곡선 부재의 동적 거동에 관한 많은 연구들(Irie *et al.*, 1983; Lee and Wilson, 1990; Oh *et al.*, 1999; Huang *et al.*, 2003)에서는 고정, 회전, 자유의 이상적인 단부조건을 갖는 부재를 연구대상으로 하고 있다. 그러나 실제 구조물에서 이와 같이 이상적인 단부조건을 실현하는 것은 어렵다. 따라서 일반적인 단부조건 즉 단부가 병진스프링 및 회전스프링으로 지지된 구조부재의 거동 특성을 규명하는 것은 매우 실제적인 연구라 할 수 있다(Li, 2000; Kim and Kim, 2001). 본 연구에서는 곡률중심 및 접선 방향 스프링과 회전 스프링으로 지지된 곡선보의 고유진동수를 산출하고자 한다. 이를 위해 대응하는 단부조건을 적용하여 축변형, 회전관성 및 전단변형을 고려한 원호형 곡선보의 면내 자유진동에 대한 지배방정식을 수치해석하며, 해석결과로서 곡선보의 다양한 제변수 변화에 따른 고유진동수 변화를 고찰한다.

2. 해석모형

그림 1은 양단이 탄성스프링으로 지지된 중심각 α , 반경 a 인 원호형 곡선보를 나타낸 것이다. 그림 1에 보인 곡선보가 면내 진동하는 경우 부재 미소요소에 발생하는 합응력(휨모멘트 M , 전단력 Q , 축방향력 N)과 관성력의 동적 평형방정식은 식 (1)-(3)과 같다.

* 정희원 · 남도대학 토목환경과 부교수 Email: sjoh@namdo.ac.kr

** 전주농림고 토목공학과

*** (주)청룡건설

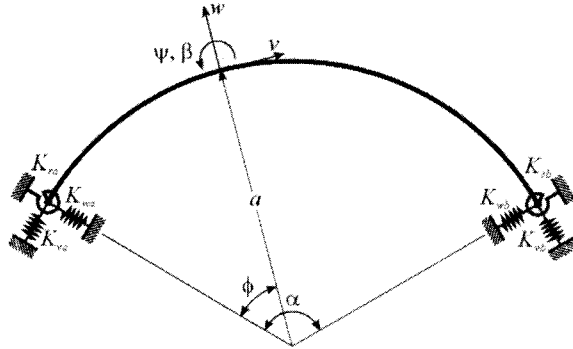


그림 1 탄성스프링으로 지지된 원호형 곡선보

$$N' + Q + a\gamma A\omega^2 v = 0, \quad Q' - N + a\gamma A\omega^2 w = 0, \quad a^{-1}M' - Q - \gamma I\omega^2 \psi = 0 \quad (1-3)$$

여기서, $(\cdot) = d/d\phi$, I 는 단면2차모멘트, A 는 부재 단면적, γ 는 부재 재료의 밀도, ω 는 고유각진동수이다. 축변형 및 전단변형 효과를 고려하는 경우 부재 단면에 발생하는 휨모멘트, 전단력 및 축방향력은 식 (4)-(6)과 같이 변위의 향으로 표현할 수 있다.

$$M = -Ela^{-1}\psi', \quad N = EAa^{-1}(v' + w) + Ela^{-2}\psi', \quad Q = kAGa^{-1}(w' - v - a\psi) \quad (4-6)$$

여기서, E 와 G 는 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수, k 는 단면형상에 따른 상수이다.

식 (4)-(6)을 식 (1)-(3)에 대입하고 정리하면 식 (7)-(9)와 같이 축변형, 회전관성 및 전단변형을 고려한 원호형 곡선보의 면내 자유진동에 대한 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta'' = \mu^{-1}(1 - s^{-2}C_1^2)\delta + (1 + \mu^{-1})\lambda' + (1 + \mu^{-1}s^{-2})\psi' \quad (7)$$

$$\lambda'' = (\mu - s^{-2}C_1^2)\lambda - (1 + \mu)\delta' - s^{-2}\psi'' + \mu\psi \quad (8)$$

$$\psi'' = (\mu s^2 - s^{-2}C_1^2)\psi - \mu s^2\delta' + \mu s^2\lambda \quad (9)$$

식 (7)-(9)에는 다음의 무차원 변수들이 사용되었다.

$$\delta = w/a, \quad \lambda = v/a, \quad s = a\sqrt{I/A}, \quad \mu = kG/E, \quad C_1 = \omega, \quad a^2\sqrt{\gamma A/(EI)} \quad (10-14)$$

그림 1에 보인 마와 같이 부재 단부는 곡률중심 및 접선 방향 스프링과 회전 스프링으로 지지되어 있다. 따라서 좌단 ($\phi = 0$)에서 휨모멘트, 축방향력 및 전단력은 식 (15)-(17)과 같이 표현할 수 있다.

$$M = K_{r\alpha}\psi, \quad N = -K_{v\alpha}v, \quad Q = -K_{w\alpha}w \quad (15-17)$$

식 (4)-(6)을 식 (15)-(17)에 대입하고 정리하면 식 (18)-(20)의 경계조건식을 얻을 수 있다.

$$\psi' + k_{r\alpha}\psi = 0, \quad s^2\lambda' + k_{v\alpha}\lambda + s^2\delta + \psi' = 0, \quad \delta' + \mu^{-1}s^{-2}k_{w\alpha}\delta - \lambda - \psi = 0 \quad (18-20)$$

마찬가지 방법으로 우단 ($\phi = \alpha$)에서 경계조건식을 구하면 다음과 같다.

$$\psi' - k_{r\beta}\psi = 0, \quad s^2\lambda' - k_{v\beta}\lambda + s^2\delta + \psi' = 0, \quad \delta' - \mu^{-1}s^{-2}k_{w\beta}\delta - \lambda - \psi = 0 \quad (21-23)$$

식 (18)-(23)에 사용된 무차원 스프링 상수의 내용은 다음과 같다.

$$k_{w\alpha} = K_{w\alpha}a^3/(EI), \quad k_{v\alpha} = K_{v\alpha}a^3/(EI), \quad k_{r\alpha} = K_{r\alpha}a/(EI) \quad (24-26)$$

$$k_{w\beta} = K_{w\beta}a^3/(EI), \quad k_{v\beta} = K_{v\beta}a^3/(EI), \quad k_{r\beta} = K_{r\beta}a/(EI) \quad (27-29)$$

표 1 Frequency parameter for circular curved beams with $k_{ra} = k_{rb} = 0$

α = 30°										
$k_{wa} = k_{wb}$ $= k_{va} = k_{vb}$	s	BET ¹⁾			TBT ²⁾ (μ = 0.1)			TBT(μ = 0.3)		
		i = 1	i = 2	i = 3	i = 1	i = 2	i = 3	i = 1	i = 2	i = 3
1	50	2.561	80.79	223.8	2.549	72.52	167.2	2.549	76.09	191.7
	100	2.561	80.80	223.8	2.558	78.41	204.0	2.558	79.52	214.0
	200	2.561	80.80	223.8	2.560	80.18	218.3	2.560	80.47	221.2
10	50	8.018	80.80	223.8	7.970	72.53	167.2	7.979	76.10	191.7
	100	8.018	80.81	223.8	8.006	78.42	204.0	8.008	79.53	214.0
	200	8.018	80.81	223.8	8.015	80.19	218.3	8.016	80.49	221.2
100	50	22.90	82.01	223.9	22.41	73.83	167.3	22.67	77.38	191.8
	100	22.90	82.02	223.9	22.77	79.65	204.1	22.84	80.76	214.1
	200	22.90	82.03	223.9	22.87	81.41	218.4	22.88	81.70	221.3
10000	50	55.62	141.1	303.8	54.13	111.4	209.1	54.99	126.9	257.4
	100	78.33	141.9	312.5	78.03	132.1	272.9	78.21	137.8	295.0
	200	91.43	142.3	312.5	91.36	139.6	301.0	91.40	141.2	307.8
α = 60°										
1	50	1.778	19.65	55.13	1.776	19.07	50.26	1.776	19.34	52.72
	100	1.778	19.65	55.14	1.778	19.50	53.77	1.778	19.57	54.50
	200	1.778	19.65	55.14	1.778	19.61	54.79	1.778	19.63	54.98
10	50	5.198	19.86	55.15	5.176	19.29	50.28	5.188	19.56	52.74
	100	5.199	19.86	55.16	5.193	19.71	53.79	5.196	19.78	54.52
	200	5.199	19.86	55.16	5.197	19.82	54.81	5.198	19.84	55.00
100	50	11.00	26.83	56.70	10.92	25.95	51.93	10.97	26.44	54.35
	100	11.04	26.84	56.71	11.02	26.61	55.37	11.03	26.74	56.08
	200	11.05	26.84	56.71	11.04	26.78	56.37	11.05	26.81	56.55
10000	50	33.51	43.550	80.97	31.19	42.91	70.62	32.54	43.31	76.30
	100	33.58	65.262	87.27	32.94	63.95	85.26	33.33	64.76	86.42
	200	33.60	71.373	95.88	33.43	70.78	95.58	33.53	71.14	95.76
α = 120°										
1	50	1.137	4.550	13.03	1.136	4.516	12.71	1.137	4.533	12.88
	100	1.137	4.550	13.03	1.137	4.541	12.95	1.137	4.546	12.99
	200	1.137	4.550	13.03	1.137	4.548	13.01	1.137	4.549	13.02
10	50	2.852	6.026	13.32	2.848	5.979	13.01	2.850	6.006	13.18
	100	2.854	6.027	13.33	2.853	6.015	13.24	2.853	6.022	13.29
	200	2.854	6.027	13.33	2.854	6.024	13.30	2.854	6.026	13.32
100	50	6.454	9.669	17.96	6.366	9.601	17.38	6.420	9.642	17.73
	100	6.466	9.725	17.97	6.443	9.708	17.82	6.457	9.719	17.91
	200	6.469	9.740	17.97	6.463	9.735	17.93	6.467	9.738	17.96
10000	50	6.920	17.31	33.61	6.789	16.61	31.29	6.868	17.03	32.64
	100	6.925	17.45	33.73	6.891	17.26	33.09	6.912	17.38	33.47
	200	6.926	17.48	33.75	6.918	17.44	33.59	6.923	17.47	33.69

¹⁾ BET: Bernoulli-Euler beam theory(Oh *et al.*, 2007). ²⁾ TBT: Timoshenko beam theory

3. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서는 식 (7)-(9)의 지배방정식을 6개의 1계 연립미분방정식으로 변환하여 초기치 문제로 형성한 후 좌단 ($\phi = 0$)의 경계조건식인 식 (18)-(20)을 이용하여 Runge-Kutta법으로 수치적분하고, 우단 ($\phi = \alpha$)의 경계조건식인 식 (21)-(23)을 만족하는 고유치를 계산하였다. 대상 구조의 무차원 고유진동수를 결정하기 위하여 시행착오적 행렬값 탐사법을 적용하는 과정에서 Regula-Falsi법을 이용하였다. 이 논문에서는 대상 구조의 제변수 변화에 따른 최저차 3개의 무차원 고유진동수를 산출하여 그 결과를 표 1-3과 그림 2, 3에 수록하였다. 표 1은 $k_{ra} = k_{rb} = 0$ 일 때 $k_{wa} = k_{wb} = k_{va} = k_{vb} = 1, 10, 100, 10000$ (대칭구조), 표 2는 $k_{wa} =$

표 2 Frequency parameter for circular curved beams with $k_{va} = k_{vb} = k_{ra} = 10^7$ and $k_{rb} = 0$

$\alpha = 30^\circ$										
$k_{wb} = k_{vb}$	s	BET ¹⁾			TBT ²⁾ ($\mu = 0.1$)			TBT($\mu = 0.3$)		
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
0	50	12.90	77.38	155.1	12.44	62.82	144.3	12.71	70.62	153.2
	100	12.90	77.84	220.8	12.78	73.19	193.6	12.85	75.93	208.8
	200	12.90	77.93	222.1	12.87	76.68	214.0	12.88	77.44	218.8
1	50	13.19	77.43	155.1	12.73	62.87	144.3	13.00	70.67	153.3
	100	13.19	77.90	220.8	13.07	73.24	193.6	13.14	75.98	208.8
	200	13.19	77.99	222.1	13.16	76.73	214.0	13.18	77.49	218.8
10	50	15.53	77.89	155.2	15.05	63.33	144.5	15.33	71.12	153.4
	100	15.53	78.35	221.0	15.41	73.70	193.7	15.48	76.43	209.0
	200	15.53	78.44	222.3	15.50	77.19	214.1	15.52	77.95	219.0
100	50	28.69	82.68	156.3	27.49	68.23	146.1	28.24	75.87	154.5
	100	28.70	83.14	222.6	28.38	78.49	195.3	28.58	81.20	210.5
	200	28.70	83.23	223.9	28.62	81.97	215.7	28.67	82.73	220.6
10000	50	65.13	170.9	225.4	58.43	122.1	212.9	62.24	147.1	223.9
	100	73.57	172.5	342.3	71.83	154.2	290.3	72.89	165.1	320.8
	200	78.34	172.8	345.9	77.91	167.5	329.2	78.18	170.8	339.4
$\alpha = 60^\circ$										
0	50	3.278	17.94	53.01	3.249	16.84	46.50	3.267	17.49	50.15
	100	3.278	17.99	53.65	3.271	17.69	51.67	3.275	17.88	52.85
	200	3.278	18.00	53.76	3.277	17.93	53.24	3.278	17.97	53.55
1	50	3.800	18.05	53.05	3.769	16.96	46.54	3.788	17.61	50.18
	100	3.800	18.11	53.69	3.792	17.81	51.71	3.797	17.99	52.88
	200	3.800	18.12	53.79	3.798	18.04	53.27	3.799	18.09	53.59
10	50	6.641	19.13	53.38	6.576	18.04	46.88	6.616	18.68	50.52
	100	6.641	19.18	54.03	6.625	18.89	52.04	6.635	19.07	53.22
	200	6.641	19.19	54.13	6.637	19.12	53.61	6.640	19.17	53.93
100	50	13.30	28.25	57.23	12.99	26.74	50.79	13.19	27.65	54.36
	100	13.32	28.33	57.88	13.24	27.92	55.90	13.29	28.18	57.07
	200	13.33	28.35	57.98	13.31	28.25	57.46	13.32	28.31	57.77
10000	50	39.26	43.39	94.00	36.88	40.43	77.52	38.60	41.86	86.55
	100	42.65	57.95	96.84	41.25	57.34	92.11	42.12	57.72	94.94
	200	42.73	67.23	99.87	42.37	66.90	98.77	42.60	67.11	99.44
$\alpha = 120^\circ$										
0	50	0.8761	3.660	12.10	0.8743	3.597	11.64	0.8754	3.637	11.91
	100	0.8762	3.663	12.13	0.8757	3.647	12.01	0.8760	3.657	12.08
	200	0.8762	3.663	12.14	0.8761	3.659	12.10	0.8761	3.662	12.12
1	50	1.538	3.969	12.18	1.535	3.907	11.73	1.537	3.946	12.00
	100	1.538	3.972	12.22	1.538	3.957	12.10	1.538	3.966	12.17
	200	1.538	3.973	12.22	1.538	3.969	12.19	1.538	3.972	12.21
10	50	3.359	6.060	13.08	3.346	5.973	12.63	3.355	6.027	12.90
	100	3.360	6.065	13.11	3.357	6.043	12.99	3.359	6.057	13.06
	200	3.361	6.067	13.12	3.360	6.061	13.09	3.360	6.065	13.11
100	50	7.949	9.586	19.19	7.821	9.415	18.38	7.904	9.522	18.88
	100	7.972	9.637	19.23	7.940	9.612	19.02	7.960	9.641	19.15
	200	7.977	9.675	19.24	7.969	9.663	19.19	7.975	9.671	19.22
10000	50	9.183	19.94	37.74	8.874	18.78	34.33	9.068	19.49	36.34
	100	9.198	20.29	38.01	9.117	19.96	37.03	9.169	20.17	37.63
	200	9.202	20.36	38.05	9.181	20.28	37.80	9.194	20.33	37.96

¹⁾ BET: Bernoulli-Euler beam theory(Oh *et al.*, 2007), ²⁾ TBT: Timoshenko beam theory

$k_{va} = k_{ra} = 10^7$ 과 $k_{rb} = 0$ 일 때 $k_{wb} = k_{vb} = 0, 1, 10, 100, 10000$ (비대칭구조), 표 3은 $k_{va} = k_{ra} = k_{ra} = 10^7$ 일 때 $k_{wb} = k_{vb} = k_{rb} = 0, 1, 10, 100, 10000$ (비대칭구조)에 대한 무차원 고유진동수를 수록한 것이다. 여기서 부재 중심각 $\alpha = 30^\circ, 60^\circ, 120^\circ$, 세장비 $s = 50, 100, 200$, 전단계수 $\mu = 0.1, 0.2$ 를 고려하였다.

표 3 Frequency parameter for circular curved beams with $k_{wa} = k_{va} = k_{ra} = 10^7$

		$\alpha = 30^\circ$								
$k_{wb} = k_{vb} = k_{rb}$	s	BET ¹⁾			TBT ²⁾ ($\mu = 0.1$)			TBT($\mu = 0.3$)		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
0	50	12.90	77.38	155.1	12.44	62.82	144.3	12.71	70.62	153.2
	100	12.90	77.84	220.8	12.78	73.19	193.6	12.85	75.93	208.8
	200	12.90	77.93	222.1	12.87	76.68	214.0	12.88	77.44	218.8
1	50	14.75	80.67	155.5	14.13	65.33	146.0	14.51	73.58	153.9
	100	14.75	81.24	224.4	14.59	76.29	196.5	14.69	79.22	212.1
	200	14.75	81.35	225.7	14.71	80.02	217.4	14.74	80.83	222.4
10	50	19.88	93.38	157.3	18.68	74.18	151.9	19.42	84.63	156.1
	100	19.88	94.56	242.8	19.56	88.09	210.8	19.76	91.98	228.9
	200	19.88	94.76	244.3	19.80	92.99	234.6	19.85	94.09	240.4
100	50	29.63	104.6	159.9	27.99	81.97	156.0	29.01	94.24	158.5
	100	29.63	106.4	263.9	29.19	98.45	226.1	29.47	103.3	247.7
	200	29.64	106.7	265.8	29.52	104.5	254.1	29.59	105.9	261.2
10000	50	84.97	196.8	227.3	69.30	131.1	216.0	77.89	164.4	224.1
	100	90.47	200.6	348.6	85.76	173.7	297.3	88.66	189.7	328.6
	200	93.63	200.9	354.3	92.42	193.0	337.4	93.19	198.0	347.8
$\alpha = 60^\circ$										
0	50	3.278	17.94	53.01	3.249	16.84	46.50	3.267	17.49	50.15
	100	3.278	17.99	53.65	3.271	17.69	51.67	3.275	17.88	52.85
	200	3.278	18.00	53.76	3.277	17.93	53.24	3.278	17.97	53.55
1	50	4.346	19.37	54.80	4.296	18.15	47.97	4.327	18.88	51.81
	100	4.346	19.45	55.44	4.334	19.11	53.35	4.342	19.32	54.60
	200	4.347	19.46	55.54	4.343	19.38	54.99	4.345	19.43	55.33
10	50	6.985	23.20	60.94	6.886	21.55	52.71	6.949	22.55	57.40
	100	6.986	23.33	61.64	6.960	22.88	59.09	6.977	23.16	60.64
	200	6.986	23.36	61.74	6.980	23.25	61.07	6.984	23.32	61.48
100	50	14.25	29.11	66.01	13.86	27.25	56.89	14.11	28.38	62.09
	100	14.26	29.24	66.83	14.16	28.73	63.94	14.23	29.05	65.70
	200	14.26	29.28	66.93	14.24	29.14	66.16	14.26	29.23	66.64
10000	50	41.14	52.87	107.5	40.26	44.60	84.20	40.78	49.43	96.76
	100	52.84	58.01	109.6	50.39	57.35	102.3	51.93	57.75	106.7
	200	52.98	67.48	111.4	52.32	67.19	109.5	52.74	67.37	110.7
$\alpha = 120^\circ$										
0	50	0.8761	3.660	12.10	0.8743	3.597	11.64	0.8754	3.637	11.91
	100	0.8762	3.663	12.13	0.8757	3.647	12.01	0.8760	3.657	12.08
	200	0.8762	3.663	12.14	0.8761	3.659	12.10	0.8761	3.662	12.12
1	50	1.627	4.336	12.98	1.622	4.260	12.47	1.625	4.308	12.78
	100	1.627	4.341	13.01	1.626	4.322	12.88	1.626	4.334	12.96
	200	1.627	4.342	13.02	1.627	4.337	12.98	1.627	4.340	13.00
10	50	3.372	6.180	14.99	3.359	6.075	14.36	3.368	6.142	14.75
	100	3.373	6.188	15.02	3.370	6.161	14.86	3.372	6.178	14.96
	200	3.374	6.190	15.03	3.373	6.183	14.99	3.373	6.188	15.01
100	50	8.155	10.69	19.26	8.079	10.37	18.47	8.129	10.57	18.95
	100	8.199	10.73	19.30	8.180	10.64	19.09	8.193	10.70	19.22
	200	8.210	10.74	19.30	8.206	10.72	19.25	8.209	10.73	19.28
10000	50	11.80	22.49	41.89	11.21	20.81	37.42	11.58	21.84	40.14
	100	11.82	23.23	42.53	11.66	22.71	41.14	11.76	23.04	42.00
	200	11.82	23.38	42.61	11.78	23.25	42.24	11.81	23.33	42.47

¹⁾ BET: Bernoulli-Euler beam theory(Oh *et al.*, 2007), ²⁾ TBT: Timoshenko beam theory

그림 2, 3은 부재 중심각이 각각 60° 와 120° 인 경우 곡률중심 및 접선 방향 스프링상수($k_{wa} = k_{wb} = k_{va} = k_{vb}$) 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. 여기서 회전 스프링상수 $k_{ra} = k_{rb} = 0$, 전달계수 $\mu = 0.1$, 세장비 $s = 50, 100, 200$ 을 고려하였다.

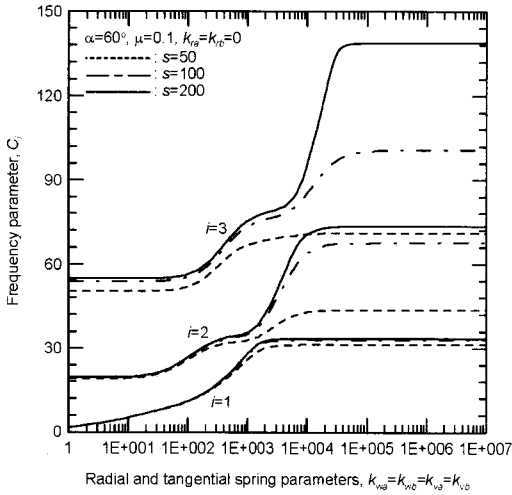


그림 2 Effect of $k_{u_a} = k_{u_b} = k_{v_a} = k_{v_b}$ on C_i ($\alpha = 60^\circ$)

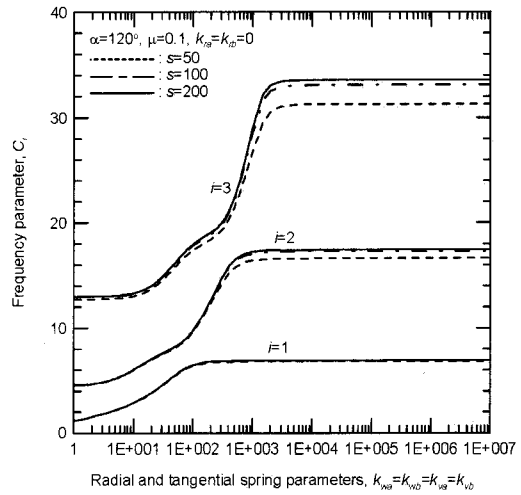


그림 3 Effect of $k_{u_a} = k_{u_b} = k_{v_a} = k_{v_b}$ on C_i ($\alpha = 120^\circ$)

4. 요약 및 결론

이 논문에서는 탄성스프링으로 지지된 원호형 곡선보의 면내 자유진동에 대한 지배방정식을 수치해석하여 대상 구조에 대한 최저차 3개의 고유진동수를 산출하였다. 축변형, 회전관성 및 전단변형 효과를 모두 고려한 해석 모형을 채택하였으며, 해석결과로서 다양한 제변수 변화에 따른 고유진동수 변화를 고찰하였다.

참고문헌

- Huang, C. S., Nieh, K. Y., Yang, M. C. (2003) In-plane free vibration and stability of loaded and shear-deformable circular arches, *International Journal of Solids and Structures*, 40, pp.5865-5886.
- Irie, T., Yamada, G., Tanaka, K. (1983) Natural frequencies of in-plane vibration of arcs, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 50, pp.449-452.
- Kim, H. K., Kim, M. S. (2001) Vibration of beams with generally restrained boundary conditions using Fourier Series, *Journal of Sound and Vibration*, 245, pp.771-784.
- Lee, B. K., Wilson, J. F. (1989) Free vibrations of arches with variable curvature, *Journal of Sound and Vibration*, 136, pp.75-89.
- Li, W. L. (2000) Free vibrations of beams with general boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, 237, pp.709-725.
- Oh, S.J., Mo, J.M., Jin, T.K. (2007) Natural frequencies and mode shapes of circular arches with general boundary conditions, *Proceedings of the 3rd Hinan-Wonkwang Universities Joint Symposium on Civil Engineering*, pp.32-42.
- Tseng, Y. P., Huang, C. S., Lin, C. J. (1997) Dynamic stiffness analysis for in-plane vibrations of arches with variable curvature, *Journal of Sound and Vibration*, 207, pp.15-31.