

삼각함수를 이용한 쌍일차 시스템의 상태 해석

조영호 · 심재선
한국항공우주연구원 · 강원대학교

Bilinear System Analysis using Triangular orthogonal Functions

Cho, YoungHo · Shim, JaeSun
Korea Aerospace Research Institute · Kangwon University

Abstract - This paper presents the new algebraic iterative algorithm of the bilinear system analysis using triangular orthogonal functions(TR) and the Picard's method. TR representation does not need any integration to evaluate the coefficients, thereby reducing a lot of computational burden. the proposed algorithm is more accuracy than BPF's. it is verified through simulation.

Key Words : 블럭펄스함수, 삼각함수, 쌍일차 시스템

1. 서 론

디지털 컴퓨터의 발달은 시스템의 해석, 간단화, 최적제어 및 설계 등의 연구에 블럭펄스(block pulse)함수 및 월쉬(Walsh), 하알(Haar) 함수 등의 직교함수가 널리 이용되는 계기를 제공하였다. 직교함수를 이용한 대수적 접근 방식은, 1973년 Corrington 그리고 1975년 Chen과 Hsiao에 의해 적분을 위한 월쉬 연산행렬이 정의된 이후로 널리 이용되기 시작했다. 특히 블럭펄스 함수를 이용한 이유는 미·적분 방정식 및 비선형 방정식으로 표현되는 시스템의 제반 문제를 대수 연립 방정식으로 부터 해결할 수 있고, 계산이 간편하며, 알고리즘 개발이 쉽기 때문이다[1-5].

Deb는 블럭펄스함수의 분할로 쉽게 얻을 수 있는 삼각함수를 제시하였다. 이 함수는 블럭펄스 함수가 갖는 계산의 간편성을 갖고 있으며 특히 계수 값은 단순 샘플링 값을 취함으로써 더 계산적인 부담이 줄었다. 본 논문은 이러한 삼각함수를 이용하여 비선형 시스템의 간단한 형태인 쌍일차 시스템 해석하는 알고리즘을 유도하였다. 그리고 블럭펄스함수와 그 결과를 비교함으로써 제시된 알고리즘을 우수성을 검증하였다.

2. 삼각함수의 정의 및 특성[5]

삼각함수는 블럭펄스로부터 유도되었으며 다음과 같이 정의 된다.
 $\Phi_i(t) = \Theta_{L_i}(t) + \Theta_{R_i}(t)$ (2.1)

단, $i = 0, 1, \dots, m-1$
 또한
 $\Theta_{L_i}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{(t-ih)}{h} & ih \leq t < (i+1)h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ (2.2)

이때 좌측삼각함수(LHTF: left-handed triangular functions)라 하고
 $\Theta_{R_i}(t) = \begin{cases} \frac{(t-ih)}{h} & ih \leq t < (i+1)h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ (2.3)

이때 우측삼각함수(RHTF: right-handed traingular functions)라 한다. 함수 $f(t)$ 를 삼각함수로 전개하면 다음과 같다.
 $f(t) \approx [c_0\Theta_{L_0}(t) + c_1\Theta_{R_1}(t)] + \dots + [c_{(m-1)}\Theta_{L_{(m-1)}}(t) + c_m]\Theta_{R_m}(t)$
 $= C_L\Theta_L(t) + C_R\Theta_R(t)$ (2.4)

여기서, $C_i = f(ih)$
 $\Theta_L(t) = [\Theta_{L_0}(t), \Theta_{L_1}(t), \dots, \Theta_{L_{(m-1)}}(t)]^T$
 $\Theta_R(t) = [\Theta_{R_0}(t), \Theta_{R_1}(t), \dots, \Theta_{R_{(m-1)}}(t)]^T$
 위에서 알 수 있듯이 삼각함수의 계수 값은 샘플링 값을 이용하였으며 이는 기존의 직교함수들의 적분형태나 평균값을 취하던 것에 비하여 계산적인 부담을 줄이는 잇점이 있다.
 적분 연산행렬은 Deb에 의하여 유도되었는데 다음과 같다.

$$\int_0^t \Theta_L(\tau) d\tau = P_L \Theta_L(t) + P_R \Theta_R(t) = \int_0^t \Theta_R(\tau) d\tau$$
 (2.5)

여기서

$$P_L = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ and } P_R = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

로 정의되며, 또한 두 삼각함수의 곱에 대한 특성은 다음과 같다.

$$\Theta_L(t)\Theta_L^T(t) \approx \begin{pmatrix} \Theta_{L_0}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Theta_{L_1}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Theta_{L_{(m-1)}}(t) \end{pmatrix}$$
 (2.6)

$$\Theta_R(t)\Theta_R^T(t) \approx \begin{pmatrix} \Theta_{R_0}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Theta_{R_1}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Theta_{R_{(m-1)}}(t) \end{pmatrix}$$
 (2.7)

$$\Theta_R(t)\Theta_L^T(t) \approx 0$$
 (2.8)

$$\Theta_L(t)\Theta_R^T(t) \approx 0$$
 (2.9)

3. 쌍일차 시스템의 해석

다음과 같은 시불변 쌍일차 시스템을 고려하자[6].

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \sum_{d=1}^r N_d x(t) u_d(t)$$
 (3.1a)

$$x(0) = x_0$$
 (3.1b)

$x(t)$ 와 $u(t)$ 는 각각 n 차 상태벡터와 r 차 입력벡터
 A, N_d 와 B 는 각각 $n \times n, n \times n, n \times r$ 행렬
 식 (3.1)의 양변을 적분하면 다음과 같이 표현된다.

$$x(t) = x_0 + \int_0^t [Ax(\tau) + Bu(\tau) + \sum_{d=1}^r N_d x(\tau) u_d(\tau)] d\tau$$
 (3.2)

적분형태로 표현된 식 (3.2)에 Picard의 반복 알고리즘을 적용하면

k 번째는 다음과 같은 적분 방정식이 된다.

$$x_0(t) = x_0$$
 (3.3a)

$$x^k(t) = x_0 + \int_0^t [Ax^{k-1}(\tau) + Bu(\tau) + \sum_{d=1}^r N_d x^{k-1}(\tau) u_d(\tau)] d\tau$$
 (3.3b)

단, $k = 1, 2, 3, \dots$

$u(\cdot)$ 가 $[0, t]$ 에 관해 유한하다면 식 (3.3)은 Lipschitz 조건이 만족된다. 그러므로 Lipschitz 조건에 의하여 k 가 증가할수록 $x^{[k]}(t)$ 는 $x(t)$ 에 수렴하게 된다. $x^{[k-1]}(t)$ 는 $k-1$ 번째에서 구한 것이므로 k 번째에는 알려진 값이다. 그러므로 삼각함수의 특성들을 이용하면 식 (3.3)의 해는 쉽게 구할 수 있다.

$x^{[k-1]}(t), x^{[k]}(t)$ 그리고 $u(t)$ 를 삼각함수로 유한급수 전개하면 각각 다음과 같다.

$$x^{k-1}(t) \approx C_L \Theta_L(t) + C_R \Theta_R(t)$$
 (3.4)

$$x^k(t) \approx D_L \Theta_L(t) + D_R \Theta_R(t)$$
 (3.5)

$$u(t) \approx E_L \Theta_L(t) + E_R \Theta_R(t)$$
 (3.6)

식(3.4)~식(3.6)을 식(3.3)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$D_L \theta_L(t) + D_R \theta_R(t) = x_0 + \int_0^t [A(C_L \theta_L(\tau) + C_R \theta_R(\tau)) + B(E_L \theta_L(\tau) + E_R \theta_R(\tau)) + \sum_{d=1}^r N_d(C_L \theta_L(\tau) + C_R \theta_R(\tau)) (E_{Ld} \theta_L(\tau) + E_{Rd} \theta_R(\tau))] d\tau \quad (3.7)$$

삼각함수 특성들을 이용하여 적분 내의 식을 정리하면

$$D_L \theta_L(t) + D_R \theta_R(t) = \tilde{X}_0(\theta_L(t) + \theta_R(t)) + \int_0^t (Z_L \theta_L(\tau) + Z_R \theta_R(\tau)) d\tau \quad (3.8)$$

$$\text{단, } Z_L = AC_L + BE_L + \sum_{d=1}^r N_d C_L E_{Ld}$$

$$Z_R = AC_R + BE_R + \sum_{d=1}^r N_d C_R E_{Rd}$$

이다. 위의 식에 삼각함수의 적분 연산 행렬을 대입하면 다음과 같다.

$$D_L \theta_L(t) + D_R \theta_R(t) = (\tilde{X}_0 + (Z_L + Z_R)P_L) \theta_L(t) + (\tilde{X}_0 + (Z_L + Z_R)P_R) \theta_R(t) \quad (3.9)$$

계수 비교법에 의하여

$$D_L = \tilde{X}_0 + (Z_L + Z_R)P_L \quad (3.10)$$

$$D_R = \tilde{X}_0 + (Z_L + Z_R)P_R \quad (3.11)$$

을 얻을 수 있다. 식(3.10)과 식(3.11)을 더하면 다음과 같이 표현된다.

$$D = 2\tilde{X}_0 + ZP \quad (3.12)$$

여기서 $D = D_L + D_R$, $Z = Z_L + Z_R$, $P = P_L + P_R$ 이다. 즉 P 는 블럭펄스 적분 연산행렬과 동일함으로 식(3.12)을 반복적인 형태로 쓰면 D 는 다음과 같은 형태로 얻을 수 있다.

$$D_1 = 2x_0 + \frac{t_f}{2m} Z_1 \quad (3.13)$$

$$D_{i+2} = D_{i+1} + \frac{t_f}{2m} (Z_{i+1} + Z_{i+2}), \quad i > 1$$

그러므로 식(3.13)로부터 $x^{(k)}(t)$ 계수 값을 구하여 $|X^{(k)} - X^{(k-1)}| \leq \epsilon$ (3.14)

식 (3.14)와 같은 허용오차보다 작은 값이 되면 이때 구한 k 번째의 해를 (3.1)의 해가 된다. 그러므로 식(3.13)의 간단한 반복 알고리즘을 이용하여 쌍일차 시스템의 상태궤적을 구할 수 있다.

4. 적용 예

다음과 같은 시불변 쌍일차 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + N_1 x(t) u_1(t) \quad (4.1a)$$

$$x(0) = x_0 \quad (4.1b)$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

이다. $t_f = 3$, $m = 50$ 으로 하여 식(3.13) 이용하여 해를 구하였고, 또한 [4]에서 제시된 블럭펄스를 이용한 알고리즘으로 해를 구한 결과를 그림 4.1과 그림 4.2에 나타냈다. 그림4.1에 알 수 있듯이 블럭펄스 함수는 곡선부분에서 오차값이 커지는 본질적인 문제가 있다. 그러나 삼각함수는 곡선 부분에서도 거의 실제 값에 접근된 것을 알 수 있다. 그림4.2는 직선 부분에서는 블럭펄스 함수나 삼각함수나 실제 값에 모두 근접하고 있음을 알 수 있다.

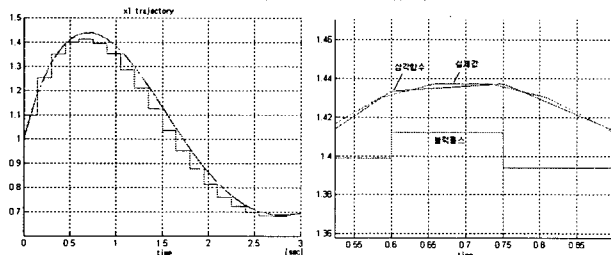


그림 4.1 X1의 상태궤적의 비교

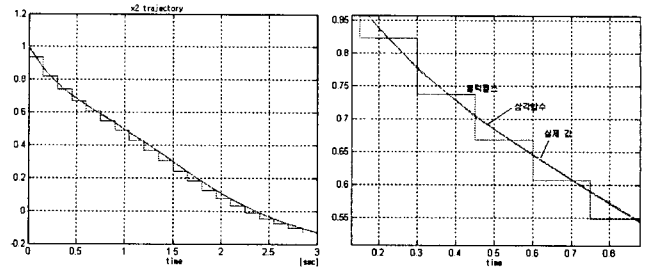


그림 4.2 X2의 상태궤적의 비교

5. 결 론

본 논문은 삼각함수를 이용하여 쌍일차시스템을 해석하는 새로운 알고리즘을 제시하였다. 제시된 알고리즘은 기존의 블럭펄스 함수를 이용하여 얻은 결과보다 특히 곡선 부분에서 오차가 줄어든 것을 적용 예를 통하여 알 수 있었다. 또한 삼각함수는 계수 값들이 샘플링 값을 취하여 수행하였으므로 기존 직교함수에 비하여 더 적은 계산량으로 계수 값들을 얻을 수 있다는 잇점이 있다. 이상의 결과로 향후 선형 및 비선형 최적제어 문제에 적용하면 더 나은 결과를 얻을 수 있을 것으로 사료된다.

[참 고 문 헌]

- [1] K. B. Datta & M. Mohan, orthogonal Functions in Systems and Control, Word Scientific Publishing Co., 1995.
- [2] Z. H. Jian, W. Schoufelberger, Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems, Springer-verlag, 1992.
- [3] A. Deb, G. Sarkar and S. K. Sen, "Linearly pulse width modulated block pulse functions and their application to linear SISO feedback control system identification", IEE Proc. Control Theory Appl., Vol. 142, No. 1, pp. 44-50, January 1995.
- [4] Youngho Cho, Hanseok, Han, Dongi In and Doosoo Ahn, "The new algebraic approach method of the bilinear system analysis", IWAM'99, pp 240-243, 1999.
- [5] Anish Deb, Anindita Dasgupta, Gautam Sarkar, "A new set of orthogonal functions and its application to the analysis of dynamic systems", Journal of The Franklin Institute, Vol. 343, pp. 1-26, 2006.
- [6] R. R. Mohler, Nonlinear systems, Pentice-Hall, 1991.