

회전범위 제약을 갖는 회전형 도립진자의 스윙업 제어

오장진, 이영삼
인하대학교 전기공학과

Swing up Control for a rotary pendulum with restricted rotation range

Jang Jin Oh and Young Sam Lee
School of electrical engineering, Inha University

Abstract - A swing-up control strategy is suggested for a rotary inverted pendulum with restricted rotation range. In order to take the rotation range limitation into account, a new Lyapunov function used for energy-based control is proposed a control strategy is derived from the Lyapunov function. Futhermore, optimization-base parameter estimation is adopted to get an exact mathematical model for the pendulum. Simulation results show that the proposed control strategy swings up the rotary inverted pendulum efficiently.

1. 서 론

회전형 도립진자의 동특성은 비선형 특성을 포함하고 있기 때문에 제어 하기가 쉽지 않아 비선형 제어계에서의 새로운 아이디어를 적용, 구현하는데 사용 된다. [2]에 제시된 도립진자가 가진 에너지를 이용한 스윙업 제어는 효율적이고 강인하며 간편한 제어기법이라 할 수 있다. 그러나 [2],[4]에 제시된 스윙업 제어는 카트나 arm의 변위에 제약을 두지 않아 본 논문에서 사용할 수 없다. 따라서, 본 논문에서는 제한된 범위 안에서 스윙업 제어를 수행하기 위해 리아푸노프 함수를 사용했다. 여기서는 리아푸노프 함수를 도립진자의 기계적인 총 에너지의 절대값과 arm의 각과 각속도의 합의 제곱의 형태로 정의했다. 스윙업 제어와 위치의 제어를 위해서 정의된 리아푸노프 함수로부터 새로운 제어기법을 제안했다. 본 논문에서 사용된 회전형 도립진자는 서보모터가 아닌 일반적인 DC모터를 사용하므로 모터의 동특성이 전체 시스템의 모델링에 포함이 된다. 그러므로 제어를 위해서는 정확한 모델링이 필수적이다. 이를 위하여 [1]에 제시된 최적화 기법에 기초한 파라미터 추정기법이 적용하였다. 따라서, 논문은 다음과 같이 구성된다. 2.1절에는 플랜트의 모델을 이끌어내고 2.2절에서는 스윙업 제어기법과 최적화 과정이 제안되고 2.3절에서는 시뮬레이션 결과와 실험결과가 주어진다.

2. 본 론

2.1 Modeling

도립진자의 무게중심의 위치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_G &= r \cos \theta - l \sin \alpha \sin \theta \\ y_G &= r \sin \theta + r \sin \alpha \cos \theta \\ z_G &= l \cos \alpha \end{aligned}$$

이것의 속도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= -r \sin \theta \dot{\theta} - l \cos \alpha \sin \theta \dot{\alpha} - l \sin \alpha \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{y}_G &= r \cos \theta \dot{\theta} + l \cos \alpha \cos \theta \dot{\alpha} - l \sin \alpha \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{z}_G &= -l \sin \alpha \dot{\alpha}, \quad \dot{v}_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + \dot{z}_G^2 \end{aligned}$$

운동에너지와 위치에너지 및 감쇠에너지는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m \dot{v}_G^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_p \sin^2 \alpha \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_b \dot{\theta}^2 \\ U &= mgl(\cos \alpha - 1) \\ D &= D_p + D_b = \frac{1}{2} B_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} B_b \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

\bar{I}_p	Pendulum의 moment of inertia
\bar{I}_b	arm의 moment of inertia
m	Pendulum의 질량
l	Pendulum의 무게중심까지의 거리
r	arm의 길이
B_p	arm의 축에서 발생하는 마찰 계수
B_b	Pendulum 축의 마찰계수
D_p	arm의 축에서 발생하는 감쇠에너지
D_b	Pendulum 축에서 발생하는 감쇠에너지

<표 1> 도립진자 계수

여기서 $\bar{I}_p = I_p + ml^2$, $\bar{I}_b = I_b + mr^2$ 으로 정의하면 라그랑지 방정식(1)하여 다음의 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} (mrl \cos \alpha) \ddot{\theta} + \bar{I}_p \ddot{\alpha} - \bar{I}_p \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha}^2 - mgl \sin \alpha + B_p \dot{\alpha} &= 0 \\ (\bar{I}_b + \bar{I}_p \sin^2 \alpha) \ddot{\theta} + (mrl \cos \alpha) \ddot{\alpha} + \bar{I}_p \sin 2\alpha \dot{\alpha} \dot{\theta} - mrl \sin \alpha \dot{\alpha}^2 + B_b \dot{\theta} &= T \end{aligned}$$

T 는 구동부로부터 회전형 도립진자에 전달되는 토크이다. 서보모터가 아닌 DC모터를 사용하므로 DC모터의 동특성을 모델링에 포함시켜 동특성안의 전압 V 로 제어를 수행한다. 먼저 T 에 대해서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} T &= \bar{T}_m - \bar{I}_m \ddot{\theta} - \bar{B}_m \dot{\theta} \\ \bar{T}_m &= \bar{K}_m i_m = \bar{K}_m \left(-\frac{\bar{K}_b}{R_m} \dot{\theta} + \frac{V}{R_m} \right) \end{aligned}$$

이고 $\bar{K}_m = \bar{K}_b$ 이므로 이것을 이용하면 T 는 다음과 같이 된다.

$$T = -\bar{I}_m \ddot{\theta} - \bar{B}_m \dot{\theta} + \bar{K}_m \frac{V}{R_m}, \quad \bar{B}_m = \hat{B}_m + \frac{\bar{K}_m^2}{R_m}$$

\bar{T}_m	Pendulum의 moment of inertia
\hat{B}_m	arm의 moment of inertia
\bar{I}_m	Pendulum의 질량
\bar{K}_m	Pendulum의 무게중심까지의 거리
\bar{K}_b	arm의 길이
i_m	arm의 축에서 발생하는 마찰 계수
V	Pendulum 축의 마찰계수
R_m	arm의 축에서 발생하는 감쇠에너지

<표 2> 모터와 관련된 계수

이로부터 $\ddot{\theta}$ 를 구하기 위해 다음과 같이 A_1 에서 A_4 까지 정의한다.

$$\begin{aligned} A_1 &= (mrl \cos \alpha) (\bar{I}_p \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha}^2 + mgl \sin \alpha - B_p \dot{\alpha}) \\ A_2 &= \bar{I}_p \\ A_3 &= \bar{I}_p \sin 2\alpha \dot{\alpha} \dot{\theta} + mrl \sin \alpha \dot{\alpha}^2 - (\bar{B}_m + B_b) \dot{\theta} \\ A_4 &= \frac{\bar{K}_m}{R_m} \\ \det(\Phi) &= (mrl \cos \alpha)^2 - \bar{I}_p (\bar{I}_m + \bar{I}_b + \bar{I}_p \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

$A_1 \sim A_4$ 를 이용하여 $\ddot{\theta}$ 를 다시 정리해보면 다음과 같다.

$$\ddot{\theta} = \frac{A_1 - A_2 (A_3 + A_4 V)}{\det(\Phi)} \quad (2)$$

따라서, 입력전압 V 와 각 가속도 $\ddot{\theta}$ 와의 관계식은 다음과 같이 유도된다.

$$V = \frac{\det(\Phi) \ddot{\theta} - A_1 + A_2 A_3}{-A_2 A_4} \quad (3)$$

2.2 스윙업 제어

제한된 회전 범위를 갖는 회전형 도립진자를 스윙업 제어하기 위한 제어 기법을 제안한다. 직선형 도립진자의 경우 범위제약을 고려한 기법 [3]에서 제안되었으나 이 방법은 회전형 도립진자에 그대로 적용할 수 없으므로 본 절에서 제안되는 기법은 [3]의 결과를 회전형 도립진자의 제어에 적용할 수 있도록 확장한 결과로 볼 수 있다. 따라서, 먼저 펜듈럼이 가진 에너지와 각속도와 각 θ 의 제곱의 합으로 구성되는 리아푸노프 함수를 도입한다. 펜듈럼이 가진 에너지는 다음과 같이 정의된다.

$$E_p = \frac{1}{2} \bar{I}_p \dot{\alpha}^2 + mgl(\cos \alpha - 1)$$

$|E_p|$ 는 펜듈럼이 아래로 향해있을 때 최대, 도립했을 때 최소가 된다.

다음은 arm의 각속도와 θ 의 제곱의 합이다.

$$F_c = mrl(\gamma \theta^2 + \lambda \dot{\theta}^2)$$

여기서 λ 와 γ 는 가중치이다.

이 두 인자를 가지고 [3]에 제시된 형태의 리아푸노프 함수를 정의한다.

$$V = \frac{1}{2} (|E_p| + F_c)^2$$

리아푸노프 함수 안정성 법칙에 의해 V 의 미분값이 항상 음이 되도록 제

어 입력력을 설계한다. 리아푸노프 함수를 시간에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt} = (|E_p| + F_c) \left(\frac{dE_p}{dt} + \frac{dF_c}{dt} \right) = (|E_p| + F_c) \left[\frac{dE_p}{dt} + 2mrl(\gamma\dot{\theta}\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta}\ddot{\theta}) \right]$$

같은 [3]에 의해 제시된 $|E_p|$ 의 시간에 대한 미분값은 다음과 같다.

$$\frac{dE_p}{dt} = \begin{cases} \dot{E}_p, & E_p > 0 \text{ 일 때} \\ -\dot{E}_p, & E_p < 0 \text{ 일 때} \\ E_p = 0 \text{ 일 때 } \dot{E}_p \text{ 은 정의되지 않음} \end{cases}$$

따라서,

$$\frac{dE_p}{dt} = \text{sign}(E_p) \dot{E}_p$$

$\frac{dV}{dt}$ 를 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{dV}{dt} = -mrl(|E_p| + F_c) \left[(\text{sign}(E_p) \cos \alpha \dot{\alpha} - 2\lambda\dot{\theta}) \ddot{\theta} - \text{sign}(E_p) \left(\frac{\dot{I}_p}{mrl} \right) \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha} \dot{\theta}^2 - 2\gamma\dot{\theta}\ddot{\theta} \right]$$

$\ddot{\theta}$ 를 입력으로 사용하면 $\ddot{\theta} = u$ 이고 $\frac{dV}{dt}$ 가 항상 음이 되도록 u 를 설계한다.

$$u = \frac{u_a |\text{sign}(E_p) \cos \alpha \dot{\alpha} - 2\lambda\dot{\theta}| + \text{sign}(E_p) \left(\frac{\dot{I}_p}{mrl} \right) \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha} \dot{\theta}^2 + 2\gamma\dot{\theta}\ddot{\theta}}{\text{sign}(E_p) \cos \alpha \dot{\alpha} - 2\lambda\dot{\theta}}$$

따라서, $\text{sign}(E_p) \cos \alpha \dot{\alpha} - 2\lambda\dot{\theta} = 0$ 인 경우를 제외하고 $\frac{dV}{dt}$ 는 다음과 같다.

$$\frac{dV}{dt} = -mrl(|E_p| + F_c) u_a |\text{sign}(E_p) \cos \alpha \dot{\alpha} - 2\lambda\dot{\theta}| < 0$$

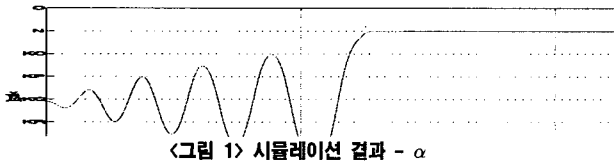
컴퓨터 프로그래밍을 위해 0보다 큰 작은 크기의 실수 ϵ 을 사용하여 제어 입력을 다음과 같이 바꾼다.

$$u = \begin{cases} \frac{u_a |\text{sign}(E_p) \cos \alpha \dot{\alpha} - 2\lambda\dot{\theta}| + \text{sign}(E_p) \left(\frac{\dot{I}_p}{mrl} \right) \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha} \dot{\theta}^2 + 2\gamma\dot{\theta}\ddot{\theta}}{\text{sign}(E_p) \cos \alpha \dot{\alpha} - 2\lambda\dot{\theta}} & |\text{sign}(E_p) \cos \alpha \dot{\alpha} - 2\lambda\dot{\theta}| > \epsilon \text{ 인 경우} \\ \frac{u_a |\text{sign}(E_p) \cos \alpha \dot{\alpha} - 2\lambda\dot{\theta}| + \text{sign}(E_p) \left(\frac{\dot{I}_p}{mrl} \right) \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha} \dot{\theta}^2 + 2\gamma\dot{\theta}\ddot{\theta}}{\epsilon \text{sign}(\text{sign}(E_p) \cos \alpha \dot{\alpha} - 2\lambda\dot{\theta})} & |\text{sign}(E_p) \cos \alpha \dot{\alpha} - 2\lambda\dot{\theta}| \leq \epsilon \text{ 인 경우} \end{cases}$$

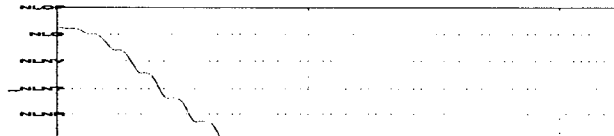
식 (3)에서 θ 에 u 를 대입하면 전압 V 를 구할 수 있다. 스윙업 제어를 수행 후 펜듈럼이 도립위치에 가까워지면 선형제어기로 교체하여 도립 상태를 유지한다.

2.3 시뮬레이션 및 최적화 과정이 포함된 실험

설계된 제어기법의 성능을 보이기 위해서 시뮬레이션과 실험을 수행 한다. 시뮬레이션 결과를 그림 1, 2에 나타내었다.

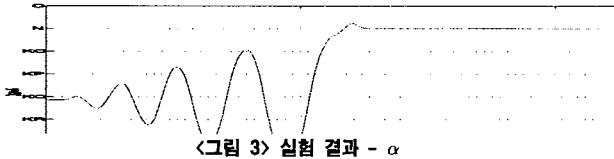


<그림 1> 시뮬레이션 결과 - α

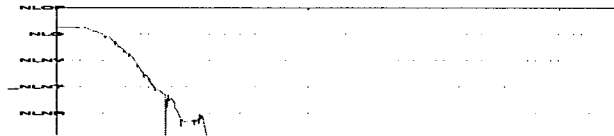


<그림 2> 시뮬레이션 결과 - 리아푸노프 함수

시뮬레이션 결과를 바탕으로 실험을 수행한 결과는 다음과 같다.



<그림 3> 실험 결과 - α



<그림 4> 실험 결과 - 리아푸노프 함수

실험 결과 리아푸노프 함수의 곡선이 시뮬레이션과는 다르게 단조감소 한다고 보기 어려우므로 [1]에 제시된 다음 가격함수를 최소화하는 최적화를 통해 시스템에 사용된 계수를 찾아낸다.

$$\min J = \int_0^T (\theta_e(t) - \theta_s(t))^2 + (\alpha_e(t) - \alpha_s(t))^2 dt$$

이 최적화 과정을 통해서 펜듈럼의 동특성에 포함되어 있는 계수를 구한다. 최적화 결과를 보여주는 그림은 다음과 같다.

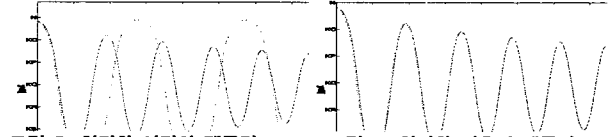


그림 5. 최적화 이전의 펜듈럼 자유낙하 운동

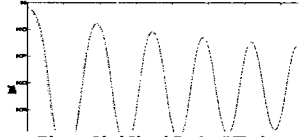


그림 6. 최적화 이후의 펜듈럼 자유낙하 운동

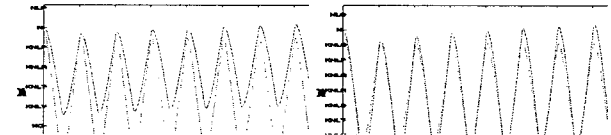


그림 7. 최적화 이전의 arm의 좌우 진동 운동

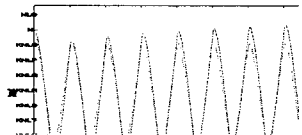


그림 8. 최적화 이후의 arm의 좌우 진동 운동

최적화 과정을 통해서 얻은 계수를 스윙업제어에 적용하여 실험을 수행한 결과는 다음과 같다.

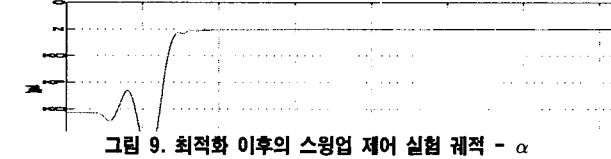


그림 9. 최적화 이후의 스윙업 제어 실험 궤적 - α

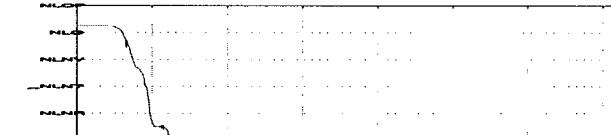


그림 10. 최적화 이후의 스윙업 제어 실험궤적 - 리아푸노프 함수

결과적으로 최적화 이전보다 리아푸노프 함수의 궤적이 개선되어서 시뮬레이션 결과의 의도에 접근해 있음을 알 수 있다.

3. 결 론

회전변위에 제약조건을 갖는 회전형 도립진자에 대한 스윙업 제어기법을 제안하였다. 제안된 제어기법은 에너지 제어를 회전형 도립진자에 적용할 수 있도록 확장한 결과로 볼 수 있다. 실험에 사용된 플랫폼에 서보모터가 아닌 DC모터가 사용되어 제어성능향상을 위하여 DC모터의 동특성을 모델링에 포함시켰고, 리아푸노프 함수를 정의하여 이것의 시간에 대한 미분값이 항상 음이 되도록 하는 제어입력을 구하였다. 시뮬레이션 결과 만족할 만한 제어성능을 보여주었으나 실험 시, 리아푸노프 함수가 단조감소 한다고 보기 어렵기 때문에 최적화 문제를 풀어 펜듈럼 시스템의 계수를 구하여 제어에 적용하였다. 결과는 리아푸노프 함수가 비교적 단조감소하는 형태를 나타내 모델링이 효과적으로 수행되었음을 보였다. 결론적으로 제안된 제어기법은 회전변위 제약 조건을 갖는 도립진자를 효과적으로 스윙업시킬 수 있는 제어기법이라 할 수 있다.

[감사의 글]

이 논문은 2007년도 산업자원부 지원에 의해 기초전력공학 공동연구소 (R-2007-2-059)주관으로 수행된 과제임.

[참 고 문 헌]

- [1] Knut Graichen, Micheal Treuer and Micheal Zeitz, "Swing-up of the double pendulum on a cart by feedforward and feedback control with experimental validation", Automatica, vol 43, pp63-71, 2007
- [2] K. J. Astrom and K. Furuta, "Swing up a pendulum by energy control", Automatica, vol 36, pp287-295, 2000
- [3] Yusuke Otani, Takaya Kuronami, Akira Inoue and Yoichi Hirashima, "A swingup control of an inverted pendulum with cart position control", Preprints of IFAC Conference on New Technologies for Computer Control I, pp395-400, 2001
- [4] M. Wiklund, A.Kristenson and K.J.Astrom, "A New Strategy for Swinging up an Inverted Pendulum", Preprint of IFAC 12th world Congress, Vol9, pp151-154, 1993