

특이점을 가지지 않는 다이나믹 터미널 슬라이딩 모드 제어

서상보, 심형보, 서진현
서울대학교 공과대학 전기컴퓨터공학부

Dynamic terminal sliding mode control with no singularity

Sangbo Seo, Hyungbo Shim, Jin-Heon Seo
ASRI, School of Electrical Engineering and Computer Science, Seoul National Univ.

Abstract - 이 논문에서는 제어가 가능한 선형시스템에 대한 다이나믹 터미널 슬라이딩 모드 제어를 설계하고자 한다. 제안된 터미널 슬라이딩 모드 구조와 제어기는 추가된 다이나믹스의 스케일링을 통해 설계되며, 추가된 다이나믹스는 모든 상태변수들이 원점에 도달한 후에야 원점에 도달하므로 특이점을 가지지 않게 된다. 그리고 전체시스템의 유한시간 안정화는 유한시간 안정에 관한 리아프노프 함수를 이용하여 증명할 수 있다.

1. 서 론

슬라이딩 모드 제어(SMC, Sliding Mode Control)는 매개변수의 변동이나 외란에 대한 강인함으로 로봇, 항공기, 전력 시스템 등의 분야에서 널리 사용되고 있다[1-2]. SMC는 원하는 다이나믹스를 가지도록 설계된 슬라이딩 표면에 유한시간 내에 도달하도록 제어입력을 설계한다. 일단 슬라이딩 표면에 도달된 계적은 설계된 슬라이딩 표면의 구조에 따라 내부 변수의 불확실성이나 외란에 대해 강인함을 가지면서 평형점에 점근적으로 수렴을 하게 된다.

터미널 슬라이딩 모드(TSM, Terminal Sliding Mode) 제어는 유한시간 내에 모든 상태변수들이 평형점으로 수렴하는 것이 목표이며, 평형점 주변에서 고정밀도를 요하는 로봇 머니퓰레이터에 많이 적용되고 있다[3-8]. 하지만 기존의 TSM은 시스템의 차수가 높아짐에 따라 특이(singular) 현상이 발생할 가능성이 높아진다[7,9-10]. 예를 들어, $x_1 = x_2, x_2 = u$ 의 시스템을 고려했을 때, TSM 구조는 $s_0 = x_1, s_1 = s_0 + \beta_0 s_0^{q_0/p_0}$ 와 같고 제어입력은 다음과 같이 설계된다.

$$u = -\beta_1 s_1^{q_1/p_1} - \frac{\beta_0 q_0}{p_0} s_0^{(q_0 - p_0)/p_0} (s_1 - \beta_0 s_0^{q_0/p_0}) \quad (1)$$

여기서 $\beta_i, i=0,1$ 은 양의 상수, $p_i > q_i, i=0,1$ 은 양의 홀수이다.

식 (1)에서 만약 상태변수들이 $s_0 = 0, s_1 \neq 0$ 의 초기값을 가진다면 이 제어입력은 특이 현상을 보이면서 무한대의 값을 가지게 된다. 그리고 시스템의 차수가 $n(n \geq 3)$ 일 경우에는 슬라이딩 변수 s_0, \dots, s_{n-2} 가 분모부분에 들어가므로 특이 현상이 발생할 가능성이 더 높아진다. [10]에서는 특이 현상을 회피하는 영역을 설정하여 이 영역으로 상태변수들을 수렴하게 하는 제어기와 TSM 제어기의 스위칭을 통하여 이 문제를 해결하였다. 그리고 [7]에서는 슬라이딩 변수들이 분수의 형태를 가지지 않는 비특이 터미널 슬라이딩 모드(NTSM, Nonsingular Terminal Sliding Mode) 제어를 제안하여 제어기의 스위칭 없이 유한시간 안정함을 보였다. 하지만 NTSM은 2차 시스템에 대해서는 구조적으로 특이 현상을 가지지 않지만 그 이상의 차수에서는 보장을 할 수가 없다.

이 논문에서는 개발된 제어 기법의 소개를 위해 다음의 제어 가능한 단일 입력 n 차 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n + u \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $x_i, i=1, \dots, n$ 은 상태변수, u 는 제어입력이며 $a_i, i=1, \dots, n$ 는 알고있는 상수이다.

이 논문의 목적은 (2)의 시스템에 대하여 추가된 다이나믹스를 이용하여 모든 상태변수들이 유한시간 내에 평형점으로 수렴하게 하는 것이다. 설계된 TSM 구조는 미분한 후에도 슬라이딩 변수들이 분모에 들어가지 않으며, TSM 제어입력은 특이 현상을 가지지 않으므로 유한하게 된다. 그러므로 [10]에서의 초기값에 대한 제한이 필요하지 않다.

2. 다이나믹 TSM

2.1 특이 TSM

이 절에서는 기존의 TSM에 대해 간략히 설명을 하겠다. [9-10]에서는 (2)의 시스템에 대하여 다음의 TSM 구조를 제안하였다.

$$\begin{aligned} s_0 &= x_1, \\ s_1 &= s_0 + \beta_1 s_0^{q_1/p_1}, \\ s_2 &= s_1 + \beta_2 s_1^{q_2/p_2}, \\ &\vdots \\ s_{n-1} &= s_{n-2} + \beta_{n-1} s_{n-2}^{q_{n-1}/p_{n-1}} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $p_i > q_i, i=1, \dots, n-1$ 는 홀수인 양의 정수들이고, $\beta_i, i=1, \dots, n-1$ 는 양의 상수이다. 그리고 유한시간 안정화 제어입력은 아래와 같이 설계가 된다.

보조정리 1. ((9-10)) (2)의 시스템에 대하여 (3)의 TSM을 가진다면

$$u = -\beta_n s_{n-1}^{q_n/p_n} + \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=0}^{n-2} \beta_{i+1} \frac{d^{n-i-1}}{dt^{n-i-1}} (s_i^{q_{i+1}/p_{i+1}}) \quad (4)$$

와 같이 제어 입력이 설계가 되고, 이는 초기값에 관계없이 슬라이딩 모드 $s_{n-1} = 0$ 에 유한시간 내에 도달함을 보장한다.

보조정리 2. ((9-10)) 만약

$$\frac{q_{k+1}}{p_{k+1}} > \frac{n-k-1}{n-k} \quad (5)$$

의 관계를 만족한다면, $k=n-2$ 에서 $k=0$ 까지 순차적으로 s_k 가 0으로 수렴할 때, 제어입력 (4)는 유한하다.

보조정리 3. ((10)) (5)의 조건을 만족하는 제어입력 (4)에 대해 상태변수들이

$$\Omega = \{x : s_0 > 0\} \cap \{x : s_1 > 0\} \cap \dots \cap \{x : s_{n-1} > 0\} \quad (6)$$

의 영역 내에 초기값을 가진다면, 궤적 x 는 처음으로 $s_{n-1} = 0$ 에 도달하고 순차적으로 $s_{n-2} = 0, \dots, s_0 = 0$ 에 도달하게 되고 상태변수들은 유한시간 내에 평형점으로 도달하게 된다.

보조정리 3에서와 같이 [9]에서 제안된 TSM은 초기값에 제한을 가지게 되므로 영역 Ω 에 도달할 수 있는 제어입력과 함께 사용되어야 한다. 이 논문에서 제안되는 다이나믹 TSM은 초기값에 대한 제약 없이 유한시간 내에 평형점으로 상태변수들을 수렴시키게 된다.

2.2 다이나믹 TSM

이 후의 내용에서 수식의 편리성을 위해 간단한 표기를 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$s^{(i)} = \frac{d^i s}{dt^i}, \quad C_j = \frac{1}{j!(j-i)!}$$

다이나믹 TSM은

$$\begin{aligned} s_0 &= x_1, \\ s_1 &= s_0 + \alpha_0(y) s_0 \\ s_2 &= s_1 + \alpha_1(y) s_1 + s_0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7)$$

$$s_{n-1} = s_{n-2} + \alpha_{n-2}(y) s_{n-2} + s_{n-3}$$

와 같이 설계되고, 양의 초기값을 가지는 추가 다이나믹스는

$$\dot{y} = -k_y y^{d_y} + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\gamma_i s_i^2}{y^{\beta-1}} \quad (8)$$

로 설계된다. 여기서 γ_i, k_y 는 양수인 상수들, $0 < d_y < 1$ 는 분모와 분자 모두 홀수인 정수를 가지는 분수이고, $\alpha_i(y)$ 는

$$\alpha_i(y) = \gamma_i + \frac{\sigma_i}{y}, \quad i=0, \dots, n-2 \quad (9)$$

의 형태를 가지며, $\beta > 1$, l 과 σ_i 는 나중에 결정되는 값이다.

주 1. 식 (8)과 같이 y 는 $s_i, i=1, \dots, n-2$ 들이 모두 0이 되기 전에는 절대 0에 도달하지 않음을 알 수 있다. 그리고 (9)에서 $\alpha_i(y)$ 는 $y=0$ 의 값에서 정의되지 않지만, $\alpha_i(y)s_i$ 의 형태를 지니고 s_i 가 y 보다 먼저 0이 되므로 전체적인 형태는 잘 정의된다고 할 수 있다.

그리고 TSM 제어 입력은 다음과 같이 설계된다.

$$u = -k_{n-1} \text{sign}(s_{n-1}) |s_{n-1}|^d + \sum_{i=1}^n a_i x_i - s_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^i C_{i-j} \alpha_n^{(j)} s_{n-1-i} s_{n-1-i}^{(i-j)} - \sum_{i=0}^{n-3} s_i^{(2-i)} \quad (10)$$

여기서 $0 < d < 1$ 는 분모와 분자 모두 홀수인 정수를 가지는 분수이며, β 의 값이 1보다 크기 위해 d_0 와 d 는 $1+d > 2d_0$ 의 관계를 만족해야 한다.

주 2. [9-10]에서 제안된 (3)의 TSM 구조에서 $s_i^{q_i+d_i}$ 는 $s_i < 0$ 일 경우, $s_i^{q_i+d_i} \in \mathbb{R}$ 현상이 발생하게 된다. 이 문제를 해결하기 위해 [8]에서 수정된 형태의 TSM 구조가 제시되었다. 제어입력 (10)에서는 이 현상이 발생하지 않음을 쉽게 알 수 있다.

정리 1. 시스템 (2)와 (8)에 대하여 TSM 구조 (7)과 제어입력 (10)은 모든 상태변수들이 유한시간 내에 원점에 도달함을 보장한다. 또한 제어입력 (10)은 유한하다.

증명 : 유한시간 안정함을 증명하기 위해 다음의 리아푸노프(Lyapunov) 함수를 설계한다.

$$V = \frac{1}{2}(s_0^2 + s_1^2 + \dots + s_{n-1}^2) + \frac{y^\beta}{\beta}$$

그리고 이 함수의 시간에 대한 미분은

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s_0(\dot{s}_1 - \alpha_0(y)s_0) + s_1(\dot{s}_2 - \alpha_1(y)s_1 - s_0) + \dots + s_{n-1}(\dot{s}_{n-1} - s_{n-2}) + y^{\beta-1} \dot{y} \\ &= -\sum_{i=0}^{n-2} \frac{\sigma_i s_i^2}{y^l} + s_{n-2} s_{n-1} + s_{n-1} \dot{s}_{n-1} - k_y y^{d+\beta-1} \end{aligned} \quad (11)$$

가 되고 슬라이딩 변수 $s_m, m \geq 2$ 들은

$$\dot{s}_m = s_0^{(m+1)} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^i C_{i-j} \alpha_m^{(j)} s_{m-i} s_{m-i}^{(i-j)} + \sum_{i=0}^{m-2} s_i^{(2-i)} \quad (12)$$

의 다이내믹스를 가진다.

리아푸노프 함수를 이용한 유한시간 안정화 증명을 위해서는 $\dot{V} + cV^b \leq 0$ ($0 < b < 1, c > 0$)의 결론에 도달해야 한다[11]. 이를 위해서 우리는 영의 부등식(Young's Inequality)을 이용한 스케일링 방법을 소개한다.

$$k_i s_i \times \frac{y^r}{y^l} \leq \frac{1}{p} y^{\beta-1+d} + \frac{s_i^2}{y^q} \sigma_i, \quad i=0, \dots, n-2 \quad (13)$$

여기서 $p = 2/(1-d), q = 2/(1+d), r = (\beta-1+d)/p, l = r q, \sigma_i = k_i^2/q$ 임을 의미한다.

(11)식의 우변에 $\sum_{i=0}^{n-2} k_i s_i^{1+d}$ 의 합차를 추가하고 (13)의 방법을 적용시키면

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=0}^{n-2} k_i s_i^{1+d} + s_{n-2} s_{n-1} + s_{n-1} \dot{s}_{n-1} - \left(k_y - \frac{n-2}{p}\right) y^{d+\beta-1} \quad (14)$$

가 되고, 최종적으로 제어입력 (10)과 다이내믹스 (12)를 적용시키면

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=0}^{n-1} k_i s_i^{1+d} - \left(k_y - \frac{n-2}{p}\right) y^{d+\beta-1} \quad (15)$$

의 결론에 도달하게 된다. k_y, β , 그리고 b 의 값을 각각

$$k_y > \frac{n-2}{p}, \beta = \frac{2(1-d_y)}{1-d}, b = \frac{1+d}{2}$$

으로 설정하고

$$\frac{c}{\beta^b} \geq \min \left\{ k_i, k_y - \frac{n-2}{p} \right\}$$

를 만족하는 c 의 값을 정한다면 $\dot{V} + cV^b \leq 0$ 임을 보일 수 있고, 이는 모든 s_i 들이 동시에 0으로 수렴하고 유한시간 내에 0에 도달하게 됨을 알 수 있게 한다. 물론 (8)의 구조에 의해 s_i 들이 y 보다 먼저 0의 값에 도달하므로 제어 입력 u 가 유한이라는 것을 알 수 있다. 그러므로 다이내믹 TSM (8)에 의해 모든 상태변수 x_i 는 유한시간 내에 원점에 도달하게 된다. ■

주 3. y 의 초기값은 설계자가 자유롭게 정할 수 있다. 하지만 값을 너무 크게 잡는다면 (9)의 구조에서 알 수 있듯이 속력을 감소시키는 현상이 발생한다. 반면 너무 작은 초기값을 설정한다면 상태변수들의 수렴속도는 빨라지지만 입력이 크게 증가하므로 상태변수들의 초기값들과 수렴속도를 고려하여 적당한 값을 설정하는 것이 좋다.

2.3 시뮬레이션

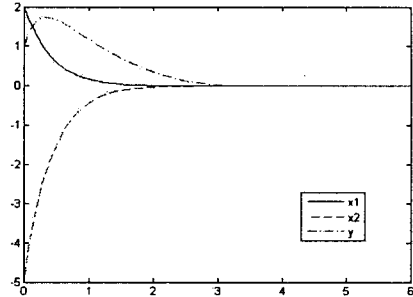
이 절에서는 본 논문에서 제안된 특이현상을 가지지 않는 TSM의 타당성을 보여주기 위하여 아래의 예제에 대한 시뮬레이션 결과를 제시할 것이다. 간단히 다음의 이중 적분형(double integrator) 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

(7)과 (8)에 의해서 TSM 제어입력은

$$u = -k_1 \text{sign}(s_1) |s_1|^d - s_0 - (\dot{\alpha}(y)s_0 + \alpha(y)s_0)$$

와 같이 설계할 수 있다. 그림 1의 시뮬레이션 결과는 $x_1(0) = 2, x_2(0) = -5, y(0) = 1$ 의 초기값과 $d = 1/3, d_y = 5/9, \gamma_0 = 2, k_0 = k_y = 1, k_1 = 1$ 의 환경에서 시행되었다.



<그림 1> 시뮬레이션 결과

그림 1에서 알 수 있듯이, y 는 상태변수들이 원점에 도달하기 전에는 원점에 도달하지 않는다. 그리고 설정된 초기값들은 보조정리 3의 특이 TSM의 안정화 조건을 만족시키지 않을 수도 있지만, 제안된 TSM은 초기값에 관계없이 잘 수렴함을 알 수 있다.

3. 결 론

이 논문에서는 추가 다이내믹스를 이용하여 시스템의 상태변수들을 유한시간 내에 원점으로 보내는 비특이 TSM 구조와 제어가 설계되었다. 설계된 TSM은 기존의 특이 TSM에서 가지는 초기값에 대한 제한을 제거하였으며, 리아푸노프 함수를 이용한 유한시간 안정화를 증명해 보였다. 그리고 제안된 방법에서는 제어입력이 유한함을 보이기 위한 특이 TSM의 조건들이 더 이상 필요하지 않음을 보였다.

[참 고 문 헌]

- [1] J. E. Slotine & W. Li, Applied nonlinear control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.
- [2] V. I. Utkin, Sliding modes in control optimization. Berlin, Heidelberg: Springer.
- [3] G. G. Morgan & U. Ozguner, "A decentralized variable structure control algorithm for robotic manipulator", IEEE J. Robot. Automat., vol. 1, p. 57-65, 1985.
- [4] K. D. Young, "Variable structure model following design for robotics applications", IEEE J. Robot. Automat., vol. 4, pp. 556-561, 1988.
- [5] M. Zhihong & M. Palaniswami, "Robust tracking control for rigid robotic manipulator", IEEE Trans. Automat. Contr., vol.39, pp. 154-159, 1994.
- [6] Y. Tang, "Terminal sliding mode control for rigid robotics", Automatica, vol. 34, pp. 51-56, 1998.
- [7] Y. Feng, X. Yu, & Z. Man, "Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulator", Automatica, vol. 38, pp. 2159-2167, 2002.
- [8] S. Yu, X. Yu, B. Shirinzadeh, & Z. Man, "Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode", Automatica, vol. 41, pp. 1957-1964, 2005.
- [9] X. Yu & Z. Man, "Model reference adaptive control systems with terminal sliding modes", Int. Journal of Contr., vol. 64, pp. 1165-1176, 1996.
- [10] Y. Wu, X. Yu, & Z. Man, "Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems", Systems and control letters, vol. 34, pp. 281-288, 1998.
- [11] S. P. Bhat & D. S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous, autonomous systems", SIAM J. Contr. Opt., vol. 38, pp. 751-766, 2000.