

서포트 추정을 이용한 빠른 이미지 사영 기반 타원형 물체 복원 기법

고 경 준  
이 정 우

Fast Elliptic Object Reconstruction from Projections by Support Estimation

Kyeongjun Ko  
Jungwoo Lee

**Abstract** - We present a fast reconstruction technique for elliptic objects, which can be applied to real-time computer tomography (CT) for simple geometric objects. It will be also shown that only 3 projections are needed to reconstruct an ellipse. A piecewise quadratic model is also proposed for more efficient Kalman filter based support estimation, which is used for the fast reconstruction technique. The performance of the piecewise quadratic model is compared with that of the existing piecewise linear model. Simulation results for the fast reconstruction are also presented.

1. 서 론

CT는 의학분야에서 중요한 역할을 해왔다. CT는 다양한 사영 각도에 대해 이미지 사영으로부터 원상을 복구한다. 일반적인 CT의 이론적인 배경은 이차원의 푸리에 변환과 라돈 변환이다. convolutional back projection (CBP)는 푸리에 slice 정리라고 불리는 기본적인 이차원 푸리에 변환의 성질을 이용한 표준의 복구 방법이다. 이미지 사영이 너무 지저분하거나 희박할 때 더 나은 복구 성능은 체의 이전 지리적 정보를 사용함으로써 획득할 수 있다. 지리적인 모델을 기반으로 하는 복구에 관한 여러 연구가 진행되었다 [1]-[3].

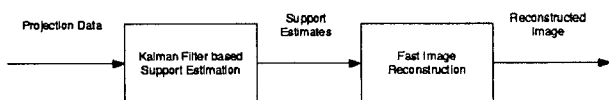
이번 논문에서는 사영 영역에서 서포트값을 사용하여 타원체의 직접적인 구성에 관한 방법에 대해 연구할 것이다. 이 방법은 비파괴적인 산업 테스트와 같은 응용분야에 적합할 수 있도록 낮은 복잡도를 가진다. 또한, 서포트 추정에 사용되는 부분적 정방 모델을 이용한 점프 검출을 제안한다. 점프 검출 방법에는 크게 세가지가 있다 [4].

이번 논문에서는 이 중에서 Kalman 필터에 사용되는 GLR 검출 방법을 사용할 것이다. Kalman 필터 부분에서는 일반적인 부분적 선형 모델 대신에 우리가 제안하는 부분적 정방 모델을 사용할 것이다. 그 서포트는 두 점프들 사이의 거리에 의해 측정된다. 이번 논문에서, 서포트는 제한된 수의 사영 대신에 지리적 매개변수의 직접적인 추정에 사용된다. 실험 결과는 제안된 부분적 정방 방법과 [5],[6]에서 사용된 부분적 선형 방법사이의 차이점을 비교할 것이다. 또한 3개의 사영을 사용해서 직접적인 복구 방법에 대한 실험 결과도 보여줄 것이다.

2. 본 론

2.1 Kalman 필터링을 위한 State 공간 모델

그림 1에서 보듯이, 빠른 복구 시스템은 서포트 추정과 지리적 매개변수로 구성된다. Kalman 필터링의 부분적 선형 신호 모델이 [5]에서 사용되었다. 그런 부분적 선형 모델의 문제는 그 필터의 state 공간 모델이 부분적 선형이기 때문에 이미지 사영 영역에서 타원같은 곡선을 적절히 쫓아가지 못한다는 것이다. 그런 단점을 극복하기 위해, 우리는 부분적 정방 모델을 제안한다.



〈그림 1〉 서포트 추정을 사용한 빠른 복구 방법의 블록도

부분적 정방 모델의 state 벡터는

$$x(t) = \begin{bmatrix} g(t) \\ \dot{g}(t) \\ \ddot{g}(t) \end{bmatrix}$$

이다. 여기서  $g(t)$ 는 이미지 사영 데이터이다. 연속시간신호가 구간  $\Delta$ 에 의해 샘플링될 때, 그 모델의 이산시간버전은 다음과 같다.

$$x(i) = \Phi x(i-1) + \alpha f \delta(i-k) + w(i) \quad (1)$$

$$y(i) = h^t x(i) + v(i) \quad (2)$$

여기서  $x(i)$ 는 이산화된 신호 벡터이고,  $\alpha$ 는 점프 크기,  $f = [010]^t$ ,  $w(i)$ 는 백색 노이즈 벡터,  $y(i)$ 는 관찰 벡터,  $h(t) = [100]^t$ ,  $v(i)$ 는 관찰 노이즈 벡터이고 변환 행렬  $\Phi$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & 0 \\ 0 & 1 & \Delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$w(i)$ 는 평균이 0이고 공분산,  $Q_w(i) = E[w(t)w^t(i)]$ 인 백색 벡터 노이즈 프로세스이다. 관찰 노이즈  $v(i)$ 는 공분산이 R이고 평균이 0인 백색 노이즈 프로세스이고  $w(i)$ 와는 통계적으로 독립적이다. 부분적 정방 방법은 부분적 선형 모델보다 복잡도가 더 높을 수도 있지만 견고함과 쫓아가는 능력이 더 낫다.

시간  $j$  이전의 모든 관찰 정보가 주어진 상태에서 시간  $i$ 에서의 필터 추정  $x(i|j)$ 라고 정의하자. 그러면 선형 조합 방정식은 다음과 같다.

$$x(i|i) = x(i|i-1) + K(i)\gamma(i) \quad (4)$$

$$x(i|i-1) = \Phi x(i-1|i-1) \quad (5)$$

$$\gamma(i) = y(i) - h^t x(i|i-1) \quad (6)$$

여기서  $K(i)$ 는 Kalman 필터 이득이고,  $\gamma(i)$ 는 innovation이다. innovation 분산 ( $V$ ), 필터 이득 ( $K$ ), 에러 분산 ( $P$ )는 다음과 같이 계산된다.

$$V(i) = h^t P(i|i-1)h + R \quad (7)$$

$$K(i) = P(i|i-1)h V^{-1}(i) \quad (8)$$

$$P(i|i) = (I - K(i)h^t)P(i|i-1) \quad (9)$$

$$P(i+1|i) = \Phi P(i|i)\Phi^t + Q_w(i) \quad (10)$$

2.2 GLR 검출 방법

이번 섹션에서는 [5],[6]에 나와 있는 GLR 검출 방법을 요약한다. 이 방법은 innovation,  $\gamma(i) = G(i,k)f\alpha + \bar{\gamma}(i)$  에서 크기 변화를 검출하는 것이다.  $\bar{\gamma}(i)$ 는 신호에 어떤 점프도 없을 때의 innovation이다. 점프 signature 행렬 ( $G$ ) 와 관련된 행렬 ( $F$ )는 다음과 같이 계산된다.

$$G(i,k) = h^t [\Phi^{i-k} - \Phi F(i-1,k)] \quad (11)$$

$$F(i,k) = K(i)G(i,k) + \Phi F(i-1,k) \quad (12)$$

그러면 GLR은 (13)과 같이 된다.

$$l(i,k) = \frac{f^t d(i,k) f}{f^t C(i,k) f} \quad (13)$$

여기서,  $C(i,k)$ 와  $d(i,k)$ 는 다음과 같다.

$$C(i,k) = \sum_{j=k}^i \frac{G^t(j,k)G(j,k)}{V(j)} \quad (14)$$

$$d(i,k) = \sum_{j=k}^i \frac{G^t(j,k)\gamma(j)}{V(j)} \quad (15)$$

점프 위치 추정은 (16)과 같이 된다.

$$\hat{k}(i) = \operatorname{argmax}_{k \in W(i)} l(i, k) \quad (16)$$

여기서  $W(i) = [i-1, i-2, \dots, i-N]$ 이고  $N$ 은 움직이는 윈도우의 크기이다.  $\epsilon$ 이 검출 경계일 때,  $l(i, \hat{k}(i)) > \epsilon$ 이면 점프가 검출되고 그렇지 않으면 점프가 없다고 선언한다.  $k$ 의 ML 추정이 치우쳐 있지 않는 것이 증명되었기 때문에 [7], GLR 방법의 엄밀한 여러 추정으로써 GRLB를 사용할 수 있다.  $N$ 이 크면 검출 지연이 커지고 추정 에러는 작아지지만  $N$ 이 작으면 그 반대가 된다.

### 2.3 직접적인 타원체의 복구

이번 섹션에서는, 서포트 추정으로부터 타원 매개변수를 계산함으로써 타원체의 직접적인 복구를 알아본다. 타원의 지리적 매개변수는 CBP 방법 없이 직접적으로 구할 수 있다. 이런 기술을 이용하면 타원체를 구성하는데 사영 각도들의 개수가 조금만 필요하기 때문에 실시간 CT가 가능해질 수 있다.

체의 밀도가 상수라고 가정하자. 일반적인 타원은 다음과 같이 표현되어진다.

$$x = c_1 + A \cos \phi \quad (17)$$

$$y = c_2 + B \sin(\phi + \beta) \text{ for } |\beta| \leq \pi/2 \quad (18)$$

(17), (18)에서는 5개의 미지수를 가진다 ( $c_1, c_2, A, B, \beta$ ). 두가지 서포트 값들은 하나의 사영으로부터 얻을 수 있기 때문에 미지수를 구하기 위해서는 적어도 3개의 사영이 필요하다.  $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2, \theta_3 \neq \theta_1, \theta_3 \neq \theta_2$  이라고 가정하고 (19), (20)을 정의하자.

$$z_i = \frac{t_i^+ + t_i^-}{2} \quad (19)$$

$$w_i = \frac{t_i^+ - t_i^-}{2} \quad (20)$$

여기서  $t_i^+$ 는  $\theta_i$ 의 오른쪽 서포트값이고  $t_i^-$ 는  $\theta_i$ 의 왼쪽 서포트값이다. 그러면 (21)-(24)의 식이 성립한다.

$$c_1 = z_1 \quad (21)$$

$$c_2 = z_2 \quad (22)$$

$$A = w_1 \quad (23)$$

$$B = w_2 \quad (24)$$

$\theta_3$  각에 대해서 풀면, (25)의 식이 만족한다.

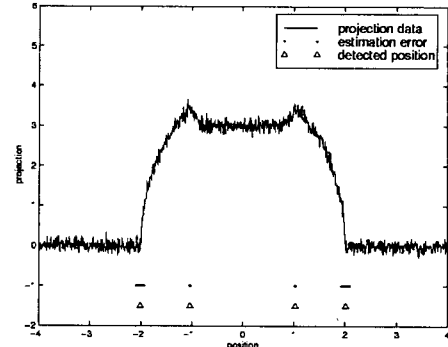
$$\beta = \arcsin \left[ \frac{w_3^2 - w_1^2 \cos^2 \theta_3 - w_2^2 \sin^2 \theta_3}{w_1 w_2 \sin(2\theta_3)} \right] \quad (25)$$

이것은 타원의 5개의 매개변수를 결정하기 위해서 적어도 3개의 사영이 필요하다는 것을 보여준다. 또한 직접적인 복구 방법은 체의 밀도가 아니라 오직 체의 모양에만 의존하는 것을 알 수 있다.

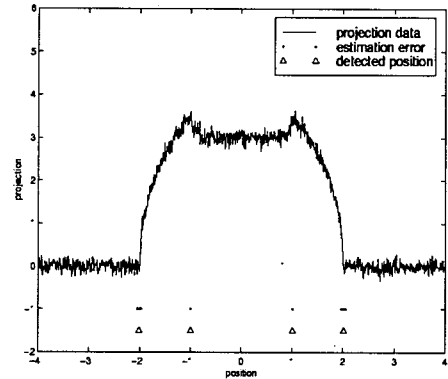
### 2.4 실험 결과

실험에서 두개의 타원 경계선을 가지는 체의 이미지 사영을 고려한다. 두개의 서로 겹치지 않는 동심 타원을 다루는 체를 가정한다. 타원의 크기와 위치는 추정되어진다. 이런 가정을 하면 타원의 점프 위치와 관련된 문제를 다룰 필요가 없어진다. 바깥 타원은 장축 사이즈가 4, 단축 사이즈가 2이고 안쪽 타원은 장축 사이즈가 2, 단축 사이즈가 1이다. X-ray 경로 감쇄를 결정하는 체밀도는 바깥 타원에서 2, 안쪽 타원에서 1이다. 사영은 사영 광선이 장축에 수직인 각도에서 얻어진다. 노이즈 분산은  $(\sigma_n^2) 10^{-2}$ 이다. 샘플의 개수는 100이고 윈도우 사이즈 ( $M$ )은 20이다. 초기 에러 분산의 조건은  $P_{11} = \sigma_n^2, P_{22} = (\sigma_n^2 / \Delta)^2$  이다.

그림 2는 두개의 타원 사영에서 부분적 선형 모델을 사용한 검출의 결과이다. 추정 에러가 바깥 타원에서는 0.09 이고 안쪽 타원에서는 0.01 이다. 추정된 점프 위치는 삼각형 마크로 표시되어 있다. 추정 에러는 두개의 표준편차의 길이를 가진다. 그림 3은 우리가 제안한 부분적 정방 모델을 사용한다. 추정 에러는 바깥 타원에서는 0.04 이고 안쪽 타원에서는 0.004 이다. 그 결과는 우리가 제안한 부분적 정방 검출기의 추정 에러가 부분적 선형 검출기의 추정 에러보다 상당히 작다는 것을 알 수 있다.



<그림 2> 노이즈 분산이  $10^{-2}$  일 때 두개의 타원에서 부분적 선형 모델을 사용한 추정 결과



<그림 3> 노이즈 분산이  $10^{-2}$  일 때 두개의 타원에서 부분적 정방 모델을 사용한 추정 결과

## 3. 결 론

지금까지 타원체에서 빠른 복구 방법에 대해 논의하였다. 오직 3개의 사영만 사용함으로써 좋은 복구 결과를 얻을 수 있었다. 또한 부분적 정방 모델을 이용하여 서포트 추정 방법에 기초한 Kalman 필터를 제안하였다. 실험 결과는 부분적 정방 모델이 부분적 선형 모델보다 CT에서 이미지 사영을 다루는 데 있어서 보다 더 효과적이라는 것을 보여준다.

### [참 고 문 헌]

- [1] D. J. Rossi and A. S. Willsky, "Reconstruction from projections based on detection and estimation of objects - parts 1 and 2: performance analysis and robustness analysis", IEEE Trans. ASSP, vol. ASSP-32, no.4, pp. 886-906, 1984.
- [2] D. J. Rossi, A. S. Willsky, and D. M. Spielman, "Object shape estimation from tomographic measurements - a performance evaluation," Signal Processing, vol. 18, pp. 63-68, Sept. 1989.
- [3] W. C. Karl, G. C. Verghese, and A. S. Willsky, "Reconstruction ellipsoids from projections," Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Graphical Models and Image Processing, vol. 56, no. 2, 1994.
- [4] M. Basseville and A. Benveniste, "Design and comparative study of some sequential jump detection algorithms for digital signals", IEEE Trans. ASSP, vol. ASSP-31, no. 3, pp. 521-535, 1983.
- [5] J. L. Prince and A. S. Willsky, "Hierarchical reconstruction using geometry and sinogram restoration", IEEE Trans. Image Proc., vol. 2, no. 3, pp. 401-416, 1993.
- [6] A. S. Willsky and H. L. Jones, "A generalized likelihood ratio approach to state estimation in linear systems subject to abrupt changes," in Proc. IEEE Conf. Decision Contr., Phoenix, AZ, Nov. 1974.
- [7] A. M. Mier-Muth and A. S. Willsky, "A sequential method for spline approximation with variable knots," Technical Report ESL-P-759, M.I.T. Electronic Systems Laboratory, 1977.