

## 향상된 슈도-헤시안 행렬을 이용한 탄성과 완전 파형역산

최윤석<sup>1)</sup>, 신창수<sup>1)</sup>, 민동주<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>서울대학교 지구환경시스템공학부, [choi76@gpl.snu.ac.kr](mailto:choi76@gpl.snu.ac.kr)

<sup>2)</sup>한국해양연구원

## Frequency domain elastic full waveform inversion using the new pseudo-Hessian matrix: elastic Marmousi-2 synthetic test

Yunseok Choi<sup>1)</sup>, Changsoo Shin<sup>1)</sup>, Dong-Joo Min<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>School of Civil, Urban and Geosystem Engineering, Seoul Nation University

<sup>2)</sup>Korea Ocean Research and Development Institute

**Abstract:** For scaling of the gradient of misfit function, we develop a new pseudo-Hessian matrix constructed by combining amplitude field and pseudo-Hessian matrix. Since pseudo-Hessian matrix neglects the calculation of the zero-lag auto-correlation of impulse responses in the approximate Hessian matrix, the pseudo-Hessian matrix has a limitation to scale the gradient of misfit function compared to the approximate Hessian matrix. To validate the new pseudo-Hessian matrix, we perform frequency-domain elastic full waveform inversion using this Hessian matrix. By synthetic experiments, we show that the new pseudo-Hessian matrix can give better convergence to the true model than the old one does. Furthermore, since the amplitude fields are intrinsically obtained in forward modeling procedure, we do not have to pay any extra cost to compute the new pseudo-Hessian. We think that the new pseudo-Hessian matrix can be used as an alternative of the approximate Hessian matrix of the Gauss-Newton method.

**Keywords:** gradient of misfit function, new pseudo-Hessian, amplitude field, elastic full waveform inversion, impulse response, frequency-domain

### 1. 서론

탄성과 파형역산에서 가장 어려운 문제는 많은 계산 시간을 요구하는 목적함수의 그래디언트 (gradient)와 헤시안 (Hessian) 행렬을 구하는 것이다. Pratt *et al.* (1998)은 Gauss-Newton 방법과 full Newton 방법의 헤시안 행렬을 통해서 목적함수의 그래디언트를 적절히 표준화 (normalizing) 할 수 있음을 보였다. 그러나 Gauss-Newton

방법과 full Newton 방법의 장점에도 불구하고 Jacobian 행렬을 구하는데 많은 시간과 비용이 소모되므로 이러한 방법이 널리 이용되고 있지는 못하였다. 한편 목적함수의 그래디언트를 효과적으로 구하기 위해서 역전과 알고리즘이 지금까지 널리 이용되어 왔다 (Lailly, 1983; Tarantola, 1984; Pratt et al., 1998; Choi et al., 2005; Shin and Min, 2006). 역전과 알고리즘을 이용하면 직접 Jacobian 행렬을 구하지 않고도 목적함수의 그래디언트를 구할 수가 있어 매우 효율적이다. 그런데 이런 역전과 알고리즘을 이용하는 파형역산에서 Gauss-Newton 방법과 full Newton 방법을 이용하는 것은 다시금 Jacobian 행렬의 계산을 요구하므로 그 효율성이 상실되게 된다.

본 논문에서는 역전과 알고리즘을 이용하는 주파수영역 완전 탄성과 파형역산에서 목적함수의 그래디언트를 효과적으로 표준화하기 위해 향상된 슈도-헤시안 행렬 (new pseudo-Hessian matrix)을 제안하였다. 향상된 슈도-헤시안 행렬은 Shin *et al.* (2001)이 제안한 슈도-헤시안 행렬을 향상 발전시킨 것이다. 슈도-헤시안 행렬은 Gauss-Newton 방법의 근사된 헤시안 행렬에서 그린 함수 (Green function)의 영점 자기 상관 (zero-lag auto correlation)의 항을 제외함으로써 구성되었다. 그린 함수의 영점 자기 상관을 계산하기 위해서는 많은 시간과 비용이 필요하므로, 이를 제외하였을 때 헤시안 행렬을 빠르게 계산할 수 있지만 영점 자기 상관이 가지는 지형 보정효과를 잃게 되어 기존의 헤시안 행렬에 비해서 정확성에 한계를 가지게 된다. 이러한 슈도-헤시안 행렬의 한계를 해결하기 위해서 기존의 슈도-헤시안 행렬에 그린 함수의 진폭 (amplitude)을 포함시켜서 향상된 슈도-헤시안 행렬을 구성하였다. 그린 함수의 영점 자기 상관을 계산하는 데는 많은 시간과 비용이 요구되지만, 그림 함수의 진폭은 파형역산의 모델링과정에서 기본적으로 구하여지기 때문에 그 계산이 매우 효율적이며, 또한 그린 함수의 영점 자기 상관과 비슷한 지형 보정효과를 가지고 있기에 정확한 파형역산 결과를 제공할 수 있게 된다.

본 논문에서는 먼저 주파수 영역에서의 파형역산 기법을 개괄적으로 살펴보고, 다음으로 가상 음원 행렬 (virtual source vector)와 그린함수의 진폭으로부터 향상된 슈도-헤시안 행렬을 구성하는 방법에 대해서 살펴보았다. 본 논문에서 제시한 향상된 슈도-헤시안 행렬을 검증하기 위해서 Marmousi-2 synthetic data 에 대해서 적용한 결과를 gradient 방법과 기존의 pseudo-Hessian 행렬을 이용하였을 때의 결과와 비교하였다.

## 2. 이론

### 2.1. 목적함수의 그래디언트 계산

유한요소법을 이용한 주파수 영역 탄성과 파동방정식은 다음과 같이 하나의 행렬식으로 표현된다 (Zienkiewicz and Taylor, 2000).

$$\mathbf{S}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}, \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{S}$ 는 복소 임피던스 행렬,  $\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{u} \ \mathbf{v})^T$ 는 변위 벡터,  $\hat{\mathbf{f}} = (0 \ \mathbf{f})^T$ 는 음원 벡터이다. 파형역산을 위한 목적함수 (objective function)는 실제 관측자료 ( $\bar{\mathbf{d}}$ )와 모델링 자료 ( $\bar{\mathbf{u}}$ )의 잔차의  $l_2$ -norm으로 정의되며 다음과 같다.

$$E = \sum_s \frac{1}{2} \left[ (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{d}})^T (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{d}})^* \right], \quad (2)$$

여기서 \*와  $T$ 는 각각 복소켤레 (complex conjugate)와 행렬의 전치 (transpose),  $s$ 는 송신원의 번호를 나타낸다. 역전과 알고리즘을 이용하여 목적함수의 그래디언트를 다음과 같이 효과적으로 구할 수 있다.

$$\frac{\partial E}{\partial p_k} = \sum_s \text{Re} \left[ (\mathbf{f}_k^v)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{d}})^* \right], \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{f}_k^v = -(\partial \mathbf{S} / \partial p_k) \hat{\mathbf{u}}$ 이다. 식 (3)에서,  $\mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{d}})^*$ 는 잔차 벡터의 역전과를 의미하며 목적함수의 그래디언트는 역전과된 파동장과 가상음원 벡터의 쾨볼루션으로 구하여진다. 이는 역시간 구조보정의 수학적 알고리즘과 동일한 것이다.

## 2.2. 향상된 슈도-헤시안 행렬의 구성

Pratt *et al.* (1998)는 gradient 방법에 비해서 수렴성이 더욱 좋은 결과를 제공할 수 있는 Gauss-Newton 방법과 full Newton 방법을 제안하였다. 그러나 이 두가지 방법에서는 직접 Jacobian 행렬을 구하여야 하기 때문에 그 계산 시간과 비용이 거대해진다. full Newton 방법과 Gauss-Newton 방법에서 구성되는 헤시안 행렬은 순서대로 다음과 같다.

$$\mathbf{H} = \text{Re} \left\{ \mathbf{J}^T \mathbf{J}^* \right\} + \text{Re} \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial p_1} \right) \delta \mathbf{d}^* \left( \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial p_2} \right) \delta \mathbf{d}^* \dots \left( \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial p_{np}} \right) \delta \mathbf{d}^* \right\} \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_a = \text{Re} \left\{ \mathbf{J}^T \mathbf{J}^* \right\}, \quad (5)$$

여기서  $\mathbf{J}$ 는 Jacobian 행렬,  $\delta \mathbf{d}$ 는 잔차 벡터를 나타낸다. 식 (4)의 오른쪽에서 두번째 항은 계산하는데 너무 많은 시간이 걸리므로 여기서는 식 (5)의 근사된 행렬만을 다룬다. 식 (5)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{H}_a = \text{Re} \left\{ \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial p_1} \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial p_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial p_{np}} \right)^T \left( \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial p_1} \right)^* \quad \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial p_2} \right)^* \quad \dots \quad \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial p_{np}} \right)^* \right) \right\}. \quad (6)$$

식 (6)은 행렬의 대각성분이 큰 값을 가지고 나머지 성분은 아주 작은 값을 가지게 된다.

따라서 식 (6)은 대각성분만으로 근사할 수 있으며, 이 대각 성분은 가상음원 벡터를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$diag(\mathbf{H}_b) = \text{Re} \left\{ (\mathbf{f}_1^v)^T (\mathbf{S}^{-1})^T (\mathbf{S}^{-1})^* (\mathbf{f}_1^v)^* \quad (\mathbf{f}_2^v)^T (\mathbf{S}^{-1})^T (\mathbf{S}^{-1})^* (\mathbf{f}_2^v)^* \quad \dots \quad (\mathbf{f}_p^v)^T (\mathbf{S}^{-1})^T (\mathbf{S}^{-1})^* (\mathbf{f}_p^v)^* \right\}. \quad (7)$$

Shin *et al.* (2001)은  $(\mathbf{S}^{-1})^T (\mathbf{S}^{-1})^*$ 를 계산하는 데는 너무 많은 시간이 걸리므로 식 (7)에서  $(\mathbf{S}^{-1})^T (\mathbf{S}^{-1})^*$ 를 제외하고 가상 음원만을 이용하여 슈도-헤시안 행렬을 구성하였다. 그러나  $(\mathbf{S}^{-1})^T (\mathbf{S}^{-1})^*$ 는 지형보정의 역할을 하기에 이를 제외하면 그래디언트를 표준화하는데 한계를 가질 수 밖에 없다. 따라서 본 연구에서는 기존의 슈도-헤시안 행렬만큼 효율적으로 계산되며,  $(\mathbf{S}^{-1})^T (\mathbf{S}^{-1})^*$ 에 의한 지형보정 효과를 보완할 수 있는 향상된 슈도-헤시안 행렬을 구성하였다 (new pseudo-Hessian matrix). 우리는 먼저 Kirchhoff 타입의 구조보정에서 그린 함수의 진폭이 지형 보정의 역할을 함을 응용하였다 (Shin *et al.*, 2002). 본 연구에서는 그린 함수의 진폭을  $(\mathbf{S}^{-1})^T (\mathbf{S}^{-1})^*$ 의 대용으로 이용하였다. 모든 송신원에 대해서 합쳐진 그린 함수의 진폭은 다음과 같다.

$$diag(\mathbf{A}) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^{ns} |g_{i,1}| \quad \sum_{i=1}^{ns} |g_{i,2}| \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{ns} |g_{i,n}| \right\}, \quad (8)$$

여기서  $g_{i,j}$ 는  $i$  번째 송신원에 대한  $j$  번째 지점에서의 그린함수를 나타내며,  $ns$ 는 송신원의 개수를 나타낸다. 본 연구에서는 일반 탄성과 탐사에서와 같이  $ns$ 개의 송신원이 지표에만 배열되어 있다고 가정하였다. 이와 같은 그린 함수는 파형역산의 모델링 과정에서 자동으로 구하여지기 때문에 식 (8)를 계산하는 데는 여타의 계산 비용이 들어가지 않는다. 최종적으로 향상된 슈도-헤시안 행렬은 식 (7)의  $(\mathbf{S}^{-1})^T (\mathbf{S}^{-1})^*$ 를 식 (8)로 대체함으로 구성되며 다음과 같다.

$$diag(\mathbf{H}_{new\_p}) = \text{Re} \left\{ (\mathbf{f}_1^v)^T \mathbf{A} (\mathbf{f}_1^v)^* \quad (\mathbf{f}_2^v)^T \mathbf{A} (\mathbf{f}_2^v)^* \quad \dots \quad (\mathbf{f}_p^v)^T \mathbf{A} (\mathbf{f}_p^v)^* \right\}, \quad (9)$$

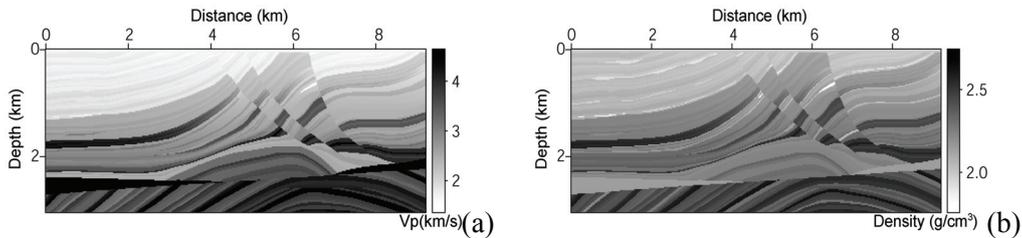
여기서  $\mathbf{A}$ 는 대각성분만 값을 가지고 나머지는 0인 행렬이다. 이를 이용하여 최종적으로 표준화된 그래디언트 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \mathbf{p} = \sum_{\omega} \left( \frac{\sum_s \text{Re} \left[ (\mathbf{F}^v)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{d}})^* \right]}{\sum_s \text{Re} \left[ diag \{ \mathbf{H}_{new\_p} + \gamma \mathbf{I} \} \right]} \right). \quad (10)$$

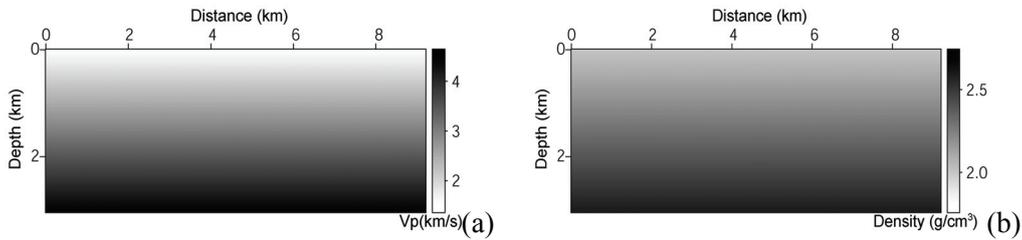
### 3. 수치 예제

본 논문의 파형역산 알고리즘을 탄성매질의 Marmousi-2 (Martin *et al.*, 2002) 인공합성

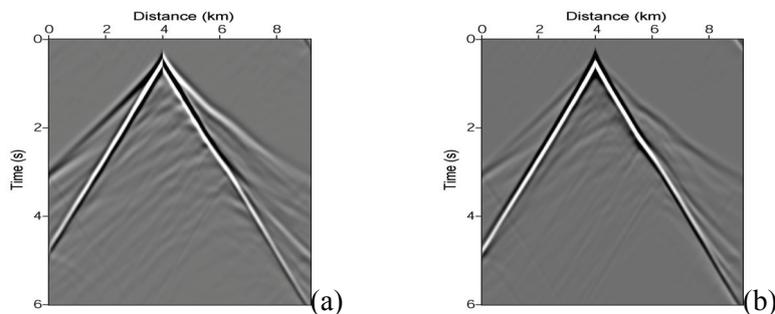
자료에 대해서 적용 함으로서 그 타당성을 검증하였다. 인공합성자료는 Clayton and Enquist (1977)의 흡수경계조건이 포함된 주파수 영역 유한요소 모델링 방법에 의해서 생성되었다. Fig. 1. 은 물층이 제거되고 좌우의 일정부분이 제외된 Marmousi-2 탄성매질의 P파 속도와 밀도를 보여주고 있다. 제한된 논문 길이로 인해 이후 S파 속도모델의 도식은 생략한다. Marmousi-2 모델의 좌우 거리는 각각 9.2 km, 3.04 km 이며, 수신기는 지표에 그리드 간격으로 배열되었고, 송신원은 그리드 간격의 452개가 수직 성분으로만 주어졌다고 가정하였다. 송신원의 최고 주파수는 10 Hz, 수신기의 자료 기록 시간은 6초로 하였다. Fig. 2. 는 파형역산을 위한 초기 속도모델로서 깊이에 따라 그 값이 선형적으로 증가하는 모델이다. 초기 송신파형은 시간 0에서의 델타 함수로 잡았다. Fig. 3.은 유한요소 모델링에 의한 인공합성 자료의 예제로서 송신원은 지표의 4km 지점에 위치하고 있다.



**Fig. 1.** True (a) P-wave velocity and (b) density of the Marmousi-2 elastic model used for waveform inversion.

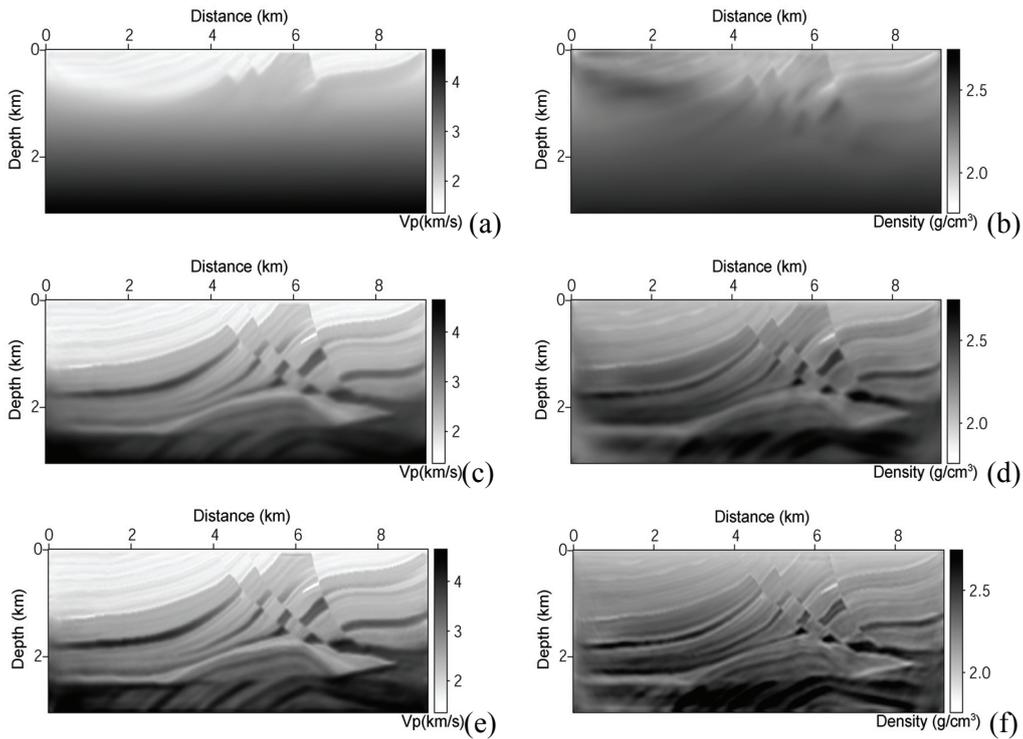


**Fig. 2.** Initial (a) P-wave velocity and (b) density used for waveform inversion having linearly increasing values with depth



**Fig. 3.** Synthetic (a) horizontal displacement and (b) vertical displacement seismograms measured on the surface for waveform inversion.

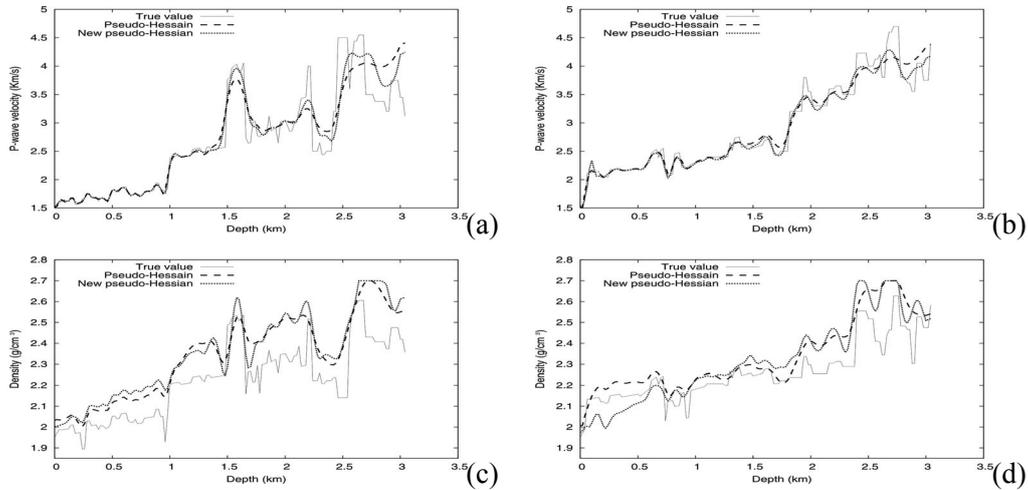
Fig. 4. 는 각각 gradient 방법, 기존의 슈도-헤시안, 그리고 향상된 슈도-헤시안 행렬을 이용하였을 때 500번째까지 역산한 P파 속도와 밀도 모델이다. Fig. 4. 로부터 gradient 방법은 매우 낮은 심도까지만 역산이 되며, 기존의 슈도-헤시안, 그리고 향상된 슈도-헤시안 행렬을 이용하였을 때는 실제 모델에 거의 근접해 감을 알 수 있다. 이로부터 과형역산에서 표준화 (normalizing) 의 중요성을 알 수 있다. 한편 심도가 매우 깊은 곳 (reservoir) 에서는 향상된 슈도-헤시안 행렬을 이용하였을 때의 역산된 모델이 기존의 슈도-헤시안 행렬을 이용하였을 때보다 실제모델에 더 근접해감을 볼 수 있다.



**Fig. 4.** Inverted (a, c, e) P-wave velocity and (b, d, f) density models at the 500th iteration by using (a, b) the gradient method, (c, d) the pseudo-Hessian, and (e, f) the new pseudo-Hessian, respectively.

역산된 모델을 정량적으로 비교하기 위해서, 역산된 P파 속도와 밀도 모델의 3 km 와 6 km 지점에서 심도에 따른 프로파일을 비교해 보았다 (Fig. 5.). Fig. 5. 에서 천부층에서의 P파 속도 모델의 경우에는 두 가지 행렬 모두에서 실제 모델을 근접하게 찾아감을 볼 수 있다. 반면, 심부층의 P파 속도 모델에서는 향상된 슈도-헤시안 행렬을 이용하였을 때, 기존의 슈도-헤시안 행렬을 이용하였을 때보다, 더욱 실제 모델에 근접하여 감을 볼 수 있다. 밀도 모델의 경우에는 P파 속도 모델만큼은 실제 모델에 근접하지 않음을 알 수 있다. 그럼에도 향상된 슈도-헤시안 행렬을 이용하였을 때, 기존의 슈도-헤시안 행렬을

이용하였을 때보다, 심부층에서 실제 밀도 모델을 더욱 근접하게 찾아감을 볼 수 있다.



**Fig. 5.** Depth profiles of the true model and the 500th inverted model when using the pseudo-Hessian and the new pseudo-Hessian, respectively, at the distances of (a, c) 3 km and (b, d) 6 km: (a, b) P-wave velocity model and (c, d) density model.

#### 4. 결론

주과수 영역 탄성과 파형역산에서 목적함수의 그래디언트를 더욱 효율적이며 정확하게 표준화하기 위해서 향상된 슈도-헤시안 행렬을 구축하였다. 이 행렬은 Shin *et al.* (2001)이 제안한 기존의 슈도-헤시안 행렬을 변형하여 그 정확성을 향상시킨 행렬이다. 기존의 슈도-헤시안 행렬은 근사된 헤시안 행렬에서 그린함수의 영점 자기 상관을 제거하였기에 목적함수의 그래디언트를 정확히 표준화 하는 데에 한계가 있을 수 밖에 없다. 본 연구에서는 기존의 슈도-헤시안 행렬에 그린함수의 영점 자기상관 대신에 그린 함수의 진폭장을 포함시킴으로서 향상된 슈도-헤시안 행렬을 구축하였다. 그린함수의 진폭장은 파형역산의 모델링 과정에서 자동으로 계산되는 것이기에 더 이상의 계산 시간과 비용이 요구되지 않는 장점이 있다. 수치 예제를 통해서 향상된 슈도-헤시안 행렬을 이용하면 기존의 슈도-헤시안 행렬을 이용하였을 때보다 더 실제 모델에 근접한 결과를 제공함을 볼 수 있었다. 향상된 슈도-헤시안 행렬은 과동방정식 구조보정에도 효과적인 표준화 방법으로 이용될 수 있을 것이다.

#### 참고문헌

- Choi, Y., C. Shin, D.J. Min, and T. Ha, 2005, Efficient calculation of the steepest descent direction for source-independent seismic waveform inversion: An amplitude approach: *Journal of Computational Physics*, **208**, 455-468.
- Clayton, R., and B. Engquist, 1977, Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations: *Bulletin of the Seismological of America*, **67**, 1529-1540.
- Lailly, P., 1983, The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations, in Conference on Inverse Scattering: Theory and Application, pp. 206-220, eds Bednar, J.B., Redner, R., Robinson, E. & Weglein, A., Soc. Industr. Appl. Math., Philadelphia, PA.
- Martin, G.S., K.J. Marfurt, and S. Larsen, 2002, Marmousi-2: an updated model for the investigation of AVO in structurally complex areas: 72nd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 1979-1982.
- Pratt, R.G., C. Shin, and G.J. Hicks, 1998, Gauss-Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion: *Geophysical Journal International*, **133**, 341-362.
- Shin, C., S. Jang, and Min, D.J., 2001, Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory: *Geophysical Prospecting*, **49**, 592-606.
- Shin, C., D.J. Min, K.J. Marfurt, H.Y. Lim, D. Yang, Y. Cha, S. Ko, K. Yoon, T. Ha, and S. Hong, 2002, Traveltime and amplitude calculations using the damped wave solution: *Geophysics*, **67**, 1637-1647.
- Shin, C. & D.J. Min, 2006, Waveform inversion using a logarithmic wavefield: *Geophysics*, **71**, R31-R42.
- Tarantola, A., 1984, Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation: *Geophysics*, **49**, 1259-1266.
- Zienkiewicz, O.C. and R.L. Taylor, 2000, The finite element method, volume 1: The basis: Butterworth-Heinemann.