

## 지수 및 적분을 포함한 목적함수에 의한 파형역산

하완수<sup>1)</sup>, 편석준<sup>2)</sup>, 신창수<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>서울대학교 에너지시스템공학부, plusha@gpl.snu.ac.kr

<sup>2)</sup>서울대학교 계산과학 협동과정

### Full waveform inversion by objective functions with power and integral

Wansoo Ha<sup>1)</sup>, Sukjoon Pyun<sup>2)</sup>, Changsoo Shin<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Energy System Engineering Dept., Seoul National University

<sup>2)</sup>Computational Science and Technology Program, Seoul National University

**Abstract:** Classical full waveform inversion for velocity estimation defines the objective function as the  $l^2$ -norm of differences between the modeled and the observed wavefields. Although widely used, the results of this method have been less than satisfactory. A moderate improvement of this method is to define the objective function as the  $l^2$ -norm of differences between the logarithms of the modeled and observed wavefields.

In this paper we propose new objective functions of waveform inversion. They produce better results in sub-salt imaging than those of the classical and the logarithmic objective functions. One objective function defines the residual as the difference between  $L^{\text{th}}$  power of the modeled wavefields and that of the observed wavefields. Another defines the residual as the difference between the integral of the  $L^{\text{th}}$  power of the modeled wavefields and that of the observed wavefields. We apply these new objective functions to the synthetic SEG/EAGE salt model, and show that our new waveform inversion algorithms provide more accurate results than those of the classical and logarithmic waveform inversion methods.

**Keywords:** full waveform inversion, objective function, logarithm, power, integral

#### 1. 서론

지난 20 여 년간 많은 지구물리학자들이 탄성과 파형 역산에 관한 연구를 진행해왔다. 대부분의 파형 역산 방법은 Lailly(1983)와 Tarantola(1984)에 의해 제안된 역산 이론에 바탕을 둔다. 그 방법은 역시간 구조보정에서의 역전파 이론을 사용하여 데이터의 오차를 역전파한다. 이후 Gauss-Newton 방법, 최대 급경사 방법 또는 Conjugate Gradient 방법 등을 이용하여 속도의 업데이트하며 반복적으로 더 나은 영상을 얻어간다. 이 연구에 대한 주파수영역에서의 수치해석적 결과는 Geller and Hara(1993), Pratt et al.(1998), Pratt(1999) 등에 의해 제시되었다. 이러한 기존 파형 역산 방법의 목적함수는 실제 기록된 파동장과 모델링을 통해 얻은 파동장의 차이의  $l^2$ -Norm 으로 정의된다. 그러나 고속도 암염 층이 존재할 경우 이 방법을 통해 얻은 결과는 그리 만족스럽지 못하다. 기존 방법에 대한 하나의 대안으로 Shin and Min(2006)은 로그를 이용한 파형 역산 방법을 제시하였다. 로그를 이용한 파형 역산에서는 목적함수를 기록된 로그 변환 파동장과 모델링을 통해 얻은 로그 변환 파동장의 차이의  $l^2$ -Norm 으로 정의한다. 이러한 목적함수를 이용한 파형

역산은 기존의 방법보다는 나은 결과를 보여주었으나 그 결과 역시 만족스럽지 못하였다. 이러한 이유로, 새로운 목적함수를 이용하여 기존의 파형 역산 방법을 향상시키고자 하는 연구가 필요하게 되었다.

본 연구에서는 암염동 하부 영상화에 있어 기존의 파형 역산 방법 및 로그를 이용한 파형 역산 방법보다 향상된 결과를 나타내는 두 가지 새로운 파형 역산 방법을 제시하고자 한다. 지수를 이용한 방법에서는 기록된 파동장과 모델링을 통해 얻은 파동장의  $L$ 승을 취하여 작은 에너지를 가지는 파동장을 증폭하고 두 파동장의 차이로 오차를 정의한다. 적분을 이용한 방법에서는 하나의  $L$  값만 취하지 않고, 파동장의  $L$ 승을  $L$ 에 대해 적분한 값의 차이를 오차로 정의한다. 수치예제에서는 SEG/EAGE 암염동 모델을 이용하여 기존의 방법과 역산 결과를 비교해 보았다.

## 2. 이론

새로운 파형 역산 방법에서, 목적함수를 제외한 기타 이론은 기존 역산 방법의 경우와 같다. 따라서 기존 역산 방법과 로그를 이용한 방법을 비교한 Shin et al.(2006) 및 Shin and Min(2006)의 논문에 제시된 파형 역산 이론을 참고하여 이론을 설명한다.

### 2.1 목적함수, 편미분 파동장과 가상 송신원

주파수 영역에서 파동 방정식은 다음의 일반화된 행렬식으로 표현될 수 있다.

$$\mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{f}\mathbf{g} \tag{1}$$

여기서,  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(p_k)$  는 모델 변수  $p_k$  의 함수인 복소 임피던스 행렬이고,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\omega)$  는 푸리에 변환된 파동장이다.  $\mathbf{f}$  는 송신원 벡터,  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\omega)$  는 각주파수  $\omega$  의 함수인 송신파이다. 실제 기록된 주파수영역의 데이터를  $\mathbf{d}$  라 할 때, 목적함수는 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다.

$$E = \frac{1}{2} \|\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{d})\| \tag{2}$$

여기서,  $\|\cdot\|$  는 최소 자승 Norm 을 의미한다. 기존의 파형 역산 방법에서는  $J(u_i, d_i) = u_i - d_i$  로 정의하고, 로그를 이용한 역산에서는  $J(u_i, d_i) = \log u_i - \log d_i$  로 정의한다. 지수승을 이용한 역산에서  $J(u_i, d_i) = u_i^L - d_i^L$  가 되고, 적분을 이용한 역산에서  $J(u_i, d_i) = \int_{L1}^{L2} u_i^L dL - \int_{L1}^{L2} d_i^L dL$  로 정의된다.

목적함수  $E$  를 최소화하기 위해서는 우선 최대 급경사 방향  $\nabla E$ , 즉 모든  $k$  에 대한  $\frac{\partial E}{\partial p_k}$  를 찾아야 하는데, 식(1)로부터 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial p_k} \mathbf{u} + \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_k} = 0 \tag{3}$$

또는

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_k} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{v}_k \quad (4)$$

여기서,

$$\mathbf{v}_k = -\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial p_k} \mathbf{u} \quad (5)$$

는  $k$  번째 파라미터 요소를 교란시키는 데 필요한 가상 송신원 벡터이다. 식(4)는 편미분 파동장을 나타낸다.

## 2.2 최대 급경사 방향 및 오차의 역전파

목적함수의  $k$  번째 파라미터  $P_k$  에 대한 최대 급경사 방향은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial E}{\partial p_k} = \text{Re} \left[ \sum_j \frac{\partial r_j}{\partial p_k} \hat{r}_j \right] \quad k = 1, 2, \dots, np \quad (6)$$

여기서,  $k$  는 파라미터 번호,  $np$  는 파라미터의 총 개수,  $r_i$  는 오차이다.

기존의 파형 역산에서, 오차  $r_j = u_j - d_j$  이고, 기울기는

$$\frac{\partial E}{\partial p_k} = \text{Re} \left[ \sum_j \frac{\partial r_j}{\partial p_k} \hat{r}_j \right] = \text{Re} \left[ \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial p_k} (u_j - d_j) \right] \quad (7)$$

이다.

지수승을 사용한 방법에서,  $r_j = u_j^L - d_j^L$  이고 앞서서와 같은 방법으로,

$$\frac{\partial E}{\partial p_k} = \text{Re} \left[ \sum_j (L \cdot u_j^{L-1}) \frac{\partial u_j}{\partial p_k} (u_j^L - d_j^L) \right] \quad (8)$$

이다. 적분을 사용한 방법에서,  $r_j = \int_{L1}^{L2} u_j^L dL - \int_{L1}^{L2} d_j^L dL$  이고,

$$\frac{\partial E}{\partial p_k} = \text{Re} \left[ \sum_j \frac{(L2 \ln u_j - 1) u_j^{L2-1} - (L1 \ln u_j - 1) u_j^{L1-1}}{(\ln u_j)^2} \frac{\partial u_j}{\partial p_k} \left( \frac{u_j^{L2} - u_j^{L1}}{\ln u_j} - \frac{d_j^{L2} - d_j^{L1}}{\ln d_j} \right) \right] \quad (9)$$

이 된다.

이렇게 구한 최대 급경사 방향을 Gauss Newton 및 Levenberg-Marquardt 방법으로 normalize 한 후 conjugate gradient 방법을 이용하여 속도 모델을 업데이트하게 된다.

## 3. 수치 예제

수치 예제에는 SEG/EAGE 암염 모델의 2 차원 단면을 사용하였다. 격자 간격은 40m, 최대 주파수는 7.5Hz이다. 수치 분산을 막기 위해 낮은 주파수를 사용하였다. 그림 1에 실제 속도 모델을 나타내었다. 역산을 위한 초기 속도 모델은 속도가 1.5km/s 에서 4.5km/s 까지 선형적으로 증가하는 모델을 사용하였다. 다양한 지수와 적분 구간에 대하여 역산을

수행한 결과, 지수를 이용한 방법에서는 지수가 0.5 일 때, 적분을 이용한 방법에서는 적분 구간이 0 부터 1 사이일 때 가장 좋은 결과를 나타냄을 확인하였다.

그림 2 에는 각각 기존의 파형 역산 방법, 로그를 이용한 방법, 지수승을 이용한 방법과 적분을 이용한 방법을 사용했을 때 얻은 속도 모델을 나타내었다.

그림 3 에 그림 2 의 속도모델에서 얻은 속도 단면을 나타내었다. 다양한 실험으로부터 로그를 이용한 방법은 기존의 역산 방법보다 좋은 결과를 나타내고, 지수승을 이용한 방법은 지수  $L$  이 0.5 일 때 로그를 이용한 방법보다 좋은 결과를 나타냄을 확인하였다. 또한 적분을 이용한 방법은 적분 구간을 잘 정할 경우 지수승을 이용한 방법보다 좋은 결과를 나타냈다.

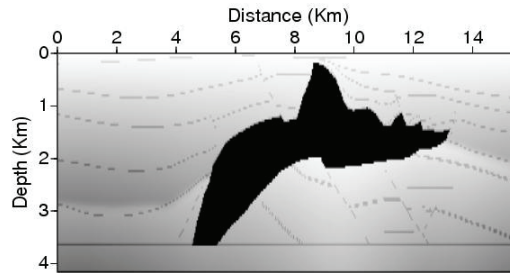


Fig. 1. The true velocity model.

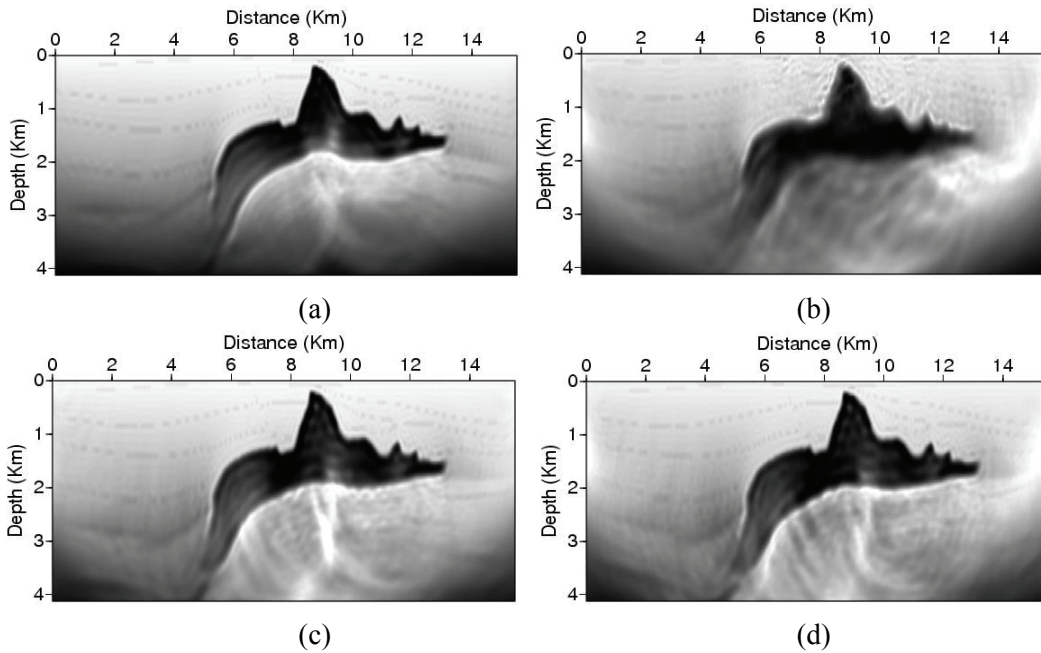
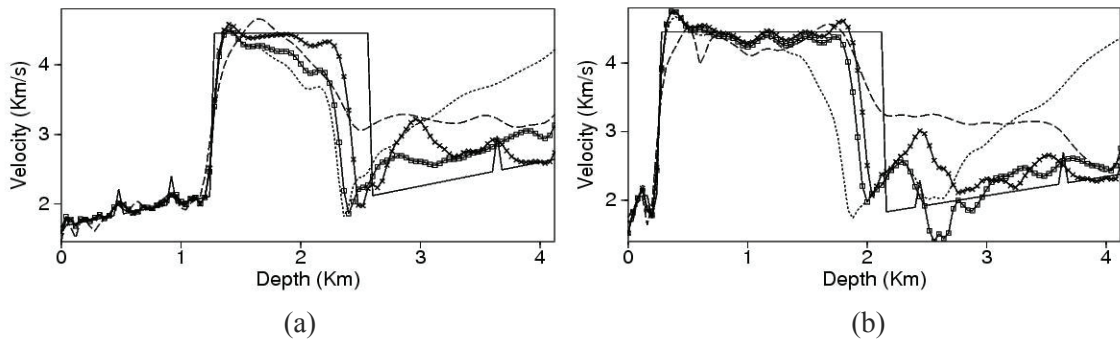


Fig. 2. The inverted velocity model generated a) by the conventional method, b) by the logarithmic method, c) by the power method and d) by the integral method.

#### 4. 결론

우리는 본 연구에서 기존의 파형 역산 방법을 향상시킬 수 있는 하나의 대안으로, 새로운 목적함수를 가지고 기존의 방법과 같은 알고리즘으로 속도를 업데이트 하는 역산 방법을 제시하였다. 그것은 기록된 파동장과 모델링한 파동장의  $L$  승의 차를 오차로 정의하는

방법과 파동장의  $L$  승을 지수  $L$  에 대해 적분한 값들의 차를 오차로 정의하는 방법이다. 두 방법 모두 오차의  $L^2$ -Norm 을 목적함수로 정의하였다. 파동장은 매우 작은 절대치를 가지므로, 파동장에 지수승을 취하면 지수가 1.0 보다 작을 경우 파동장을 증폭시키는 효과를 얻을 수 있다. 증폭된 파동장을 지수에 대해 적분할 경우 더 좋은 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다. 수치 예제에서는 암염 구조를 가진 속도 모델에 새로운 역산 방법들을 적용해 보았다. 그 결과 기존의 파형 역산 방법 및 로그를 이용한 역산 방법보다 새로 제시된 목적함수들을 이용한 역산이 암염 돔 하부 구조 영상화에 더 좋은 결과를 나타냄을 알 수 있었다.



**Fig 3.** The true velocity model(solid line) and the inverted velocity models obtained by the conventional method(dotted line), the logarithm method(dashed line), the integral method (line with crosses), and the power method (line with squares) a) at 7km, b) at 9km from the left.

### 감사의 글

이 논문은 BK21 및 2006 년도 과학기술부의 재원으로 한국과학재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2006-02610).

### 참고문헌

- Geller, R. J., and Hara, T., 1993, Two efficient algorithms for iterative linearized inversion of seismic waveform data, *Geophys. J. Internat.*, **115**, 699-710.
- Lailly, P., 1983, The seismic inverse problem as a sequence of before stack migration, Conference on inverse scattering: Theory and Application, Soc. Industr, Appl. Math.
- Pratt, R.G., 1999, Seismic waveform inversion in frequency domain, Part1: Theory and verification in physical scale model, *Geophysics*, **64**, 888-901.
- Pratt, R. G., Shin, C., and Hicks, G. J., 1998, Gauss-Newton and full Newton methods in frequency domain seismic waveform inversions, *Geophys. J. Internat.*, **133**, 341-362.
- Shin, C., and D. J. Min, 2006, Waveform inversion using a logarithmic wavefield, *Geophysics*, **71**, R31-R42.
- Shin, C., S. Pyun and J. Bee Bednar, 2006, Comparison of waveform inversion, part1: conventional wave field vs logarithmic wave field, *Geophys. Prosp.*, accepted.
- Tarantola, A., 1984, Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation, *Geophysics*, **49**, 1259-1266.