

## Hybrid L1/L2 를 이용한 주파수 영역 탄성과 파형역산.

정우근<sup>1)</sup>, 하태영<sup>2)</sup>, 신창수<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>서울대학교 에너지시스템공학부

<sup>2)</sup>국가수리과학연구소

## Robust seismic waveform inversion using backpropagation algorithm

Wookeen Chung<sup>1)</sup>, Taeyoung Ha<sup>2)</sup>, Changsoo Shin<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Seoul National University

<sup>2)</sup>National Institute for Mathematical Sciences

**Abstract:** For seismic imaging and inversion, the inverted image depends on how we define the objective function.  $\ell^1$ -norm is more robust than  $\ell^2$ -norm. However, it is difficult to apply the Newton-type algorithm directly because the partial derivative for  $\ell^1$ -norm has a singularity. In our paper, to overcome the difficulties of singularities, Huber function given by hybrid  $\ell^1/\ell^2$ -norm is used. We tested the robustness of our new object function with several noisy data set. Numerical results show that the new objective function is more robust to band limited spiky noise than the conventional object function.

**Keyword :** huber function, conjugate gradient method, back-propagation algorithm

### 1. 서론

Lailly(1983) 와 Tarantola(1984)에 의해 역전파 기술을 이용한 탄성과 역산 이론이 제시된 이후, 많은 응용수학자 및 지구물리학자들에 의해 파형역산에 대한 많은 연구가 진행되었다. 하지만 실제 데이터에 파형역산을 적용시키기에는 많은 문제가 있다. 많은 문제들 중 하나는 탄성과 자료 습득과정에서 생길수 있는 잡음이다. 그러므로 잡음에 덜 민감한 목적함수를 선정하는 것은 파형역산 문제에서 중요한 일 중 하나이다. 기존 역산문제에서는 목적함수를  $\ell^2$ -norm 으로 하여 그것이 최소가 되도록 한다. 오차가 큰 outliers를 포함하는 데이터에는,  $\ell^1$ -norm이  $\ell^2$ -norm 보다 효율적이다. 하지만  $\ell^1$ -norm은 모든 지점에서 미분가능하지 않고 특이점이 존재하므로, 목적함수로 사용하기 어렵다. 이를 극복하기 위해, Bubu and Langan(1997) 과 Guitton and Symes(2003) 등에 의해  $\ell^1$ -norm과  $\ell^2$ -norm를 동시에 사용하는 방법이 제시되었다. 우리는 주파수영역에서 Huber(1973)가 제시한 목적함수를 수정하여 사용하였으며, Shin and Min(2006)에 의해 제시된 역전파 기술을 이용하여, 많은 양의 계산이 필요한 편미분 파동장을 직접계산하지 않고 최대급경사 방향을 효율적으로 얻을 수 있었다. 또한 conjugate-gradient 방법을 사용하여, 수렴속도를 높일 수 있었다. 다양한 수치해석 결과를 통해 Huber 함수를 이용한 우리의 새로운 역산 알고리즘이 기존 역산 방법(Shin and Min, 2006)보다 잡음에 강한 사실을 알 수 있었다.

## 2. 이론

### 2.1 모델방정식

유한차분법 또는 유한요소법을 이용하여 시간영역에서의 파동방정식을 행렬형태로 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(t)}{\partial t^2} + \mathbf{S} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{M}$ 은 질량행렬,  $\mathbf{S}$ 는 강성행렬, 그리고  $\mathbf{f}$ 는 송신원항이다. 이를 주파수영역으로 푸리에변환을 하면 (2)식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{S} \tilde{\mathbf{u}}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M} \tilde{\mathbf{u}}(\omega) = \mathbf{f}(\omega). \quad (2)$$

편의상 (2)식을 다음과 같이 쓰기로 한다.

$$\mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{K}$ 는 complex impedance matrix라고 부르고  $\mathbf{S} - \omega^2 \mathbf{M}$ 으로 주어진다.

### 2.2 목적함수

1973년 후버는  $\ell^1$ 과  $\ell^2$  오차함수에 의해 만들어지는 함수를 다음과 같이 제안하였다.

$$M_\epsilon(r) = \begin{cases} \frac{|r|^2}{2\epsilon}, & |r| \leq \epsilon, \\ |r| - \frac{\epsilon}{2}, & |r| > \epsilon, \end{cases} \quad (4)$$

여기서  $\epsilon$ 은 실수 값  $r$ 에 대하여  $\ell^1$ 과  $\ell^2$ 크기사이의 기준값이다. 복소수  $r$ 에 대하여 우리는 후버가 제시한 함수를 수정하였다.

$$M_{\epsilon,c}(r) = \begin{cases} \frac{|r|_2^2}{2\epsilon}, & |r|_2 \leq \epsilon, \\ |r|_1 - \frac{\epsilon}{2}, & |r|_2 > \epsilon, \end{cases} \quad (5)$$

여기서  $r = a + bi$ 일 때,  $|r|_2^2 = a^2 + b^2$ ,  $|r|_1 = |a| + |b|$ .  $|r|_1$ 은  $|r|_2$ 보다 더 크기 때문에 (5)번 식에는 더 이상 특이점이 나타나지 않는다.

(5)번 식과 같은 함수로 목적함수를 다음과 같이 정의하자.

$$E(\mathbf{p}) = \sum_{\omega, s, r}^{N_\omega, N_s, N_r} M_{\epsilon,c}(r_{\omega, s, r}) \quad (6)$$

여기서  $r_{\omega, s, r} = u_{\omega, s, r} - d_{\omega, s, r}$ 를 나타내고  $N_\omega$ ,  $N_s$  그리고  $N_r$ 은 각각 주파수 송신원 그리고 수신원의 개수를 각각 나타낸다.

### 2.3 목적함수에 대한 편미분

목적함수의 모델변수에 대한 편미분을 구해보자. 우선  $|r|_2 \leq \epsilon$ 인 경우는 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{\partial E}{\partial p_k} = \text{Re} \sum_{\omega, s} \left[ \frac{\partial u_{s, r_1}}{\partial p_k} \dots \frac{\partial u_{s, r_N}}{\partial p_k} \right]^T \begin{bmatrix} r_{r_1}^* \\ \vdots \\ r_{r_N}^* \end{bmatrix}. \quad (7)$$

그리고  $|r|_2 > \epsilon$ 인 경우  $r = u - d = r_{re} + ir_{im}$ 이라 하면

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial p_k} &= \sum_{\omega, s, r} \frac{\partial}{\partial p_k} \left[ |r_{re}| + |r_{im}| - \frac{\epsilon}{2} \right] \\
 &= \sum_{\omega, s, r} \left[ \text{sgn}(r_{re}) \mathbf{Re} \frac{\partial u}{\partial p_k} + \text{sgn}(r_{im}) \mathbf{Im} \frac{\partial u}{\partial p_k} \right] \\
 &= \sum_{\omega, s, r} \left[ \mathbf{Re} \left[ \frac{\partial u}{\partial p_k} \right] \mathbf{Re}[r_{sgn}] + \mathbf{Im} \left[ \frac{\partial u}{\partial p_k} \right] \mathbf{Im}[r_{sgn}] \right] \\
 &= \mathbf{Re} \sum_{\omega, s, r} \frac{\partial u}{\partial p_k} r_{sgn}^* \\
 &= \mathbf{Re} \sum_{\omega, s} \left[ \frac{\partial u_{s, r_1}}{\partial p_k} \dots \frac{\partial u_{s, r_N}}{\partial p_k} \right]^T \begin{bmatrix} r_{1,sgn}^* \\ \vdots \\ r_{N,sgn}^* \end{bmatrix}. \tag{8}
 \end{aligned}$$

여기서 부호함수는 다음과 같이 정의된다. 실수  $a$ 에 대하여,

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & \text{if } a > 0, \\ -1, & \text{if } a < 0, \\ 0, & \text{if } a = 0 \end{cases} \tag{9}$$

그리고  $r_{r_k,sgn} = \text{sgn}(\mathbf{Re}(r_k)) + i \text{sgn}(\mathbf{Im}(r_k))$ 을 나타낸다.

따라서 목적함수 (6)에 대한 모델변수  $p_k$ 에 대한 편미분은 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial p_k} = \mathbf{Re} \sum_{s, \omega} \left[ \frac{\partial u_{sr}}{\partial p_k} \right]^T \mathbf{r}^* \tag{10}$$

여기서  $\mathbf{r} = (r_1 \dots r_{N_r})$ 이고

$$r_k = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}(u-d), & |r|_2 \leq \epsilon, \\ \frac{1}{|r|_2}(u-d), & |r|_2 > \epsilon. \end{cases}$$

식 (10)에 zero padding 논리를 적용하면 식 (10)을 다음과 같이 표현된다.

$$\nabla_{p_k} \mathbf{E} = \mathbf{Re} \sum_{s, \omega} \left[ \frac{\partial u_{s, r_1}}{\partial p_k} \dots \frac{\partial u_{s, r_N}}{\partial p_k} \right]^T \begin{bmatrix} \mathbf{r}^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

그리고 식 (3)의 양변을 모델변수  $p_k$ 에 대하여 미분하면

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_k} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_k} \mathbf{u} \quad \text{또는} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_k} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{v}_k \tag{12}$$

여기서  $\mathbf{v}_k = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_k} \mathbf{u}$ 이며  $k$ 번째 모델변수에 대한 가상음원을 나타낸다. 식(12)를 식 (11)에 대입하면,

$$\begin{aligned}
 \nabla_{p_k} \mathbf{E} &= \mathbf{Re} \sum_{s, \omega} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_{s, r}}{\partial p_k} \right]^T \tilde{\mathbf{r}}^* = \mathbf{Re} \sum_{s, \omega} [\mathbf{K}^{-1} \mathbf{v}_{s, k}(\omega)]^T \tilde{\mathbf{r}}^* \\
 &= \mathbf{Re} \sum_{s, \omega} \mathbf{v}_{s, k}^T [\mathbf{K}^{-1}]^T \tilde{\mathbf{r}}^* = \mathbf{Re} \sum_{s, \omega} \mathbf{v}_{s, k}^T [\mathbf{K}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}^*] \tag{13}
 \end{aligned}$$

여기서  $\tilde{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} \ 0 \ \dots \ 0)^T$ .

#### 2.4 반복방법 - conjugate gradient method

반복횟수  $l$ 에 대하여 conjugate gradient method는 (6)에서 정의된 목적함수  $\mathbf{E}$ 를 최소화하는 모델변수를 찾아가는데 사용된다. 이 최소화 과정은 적절한 단위의 길인인

$\alpha_l$ 을 이용하여 최소방향인  $\mathbf{d}_l$ 를 찾아가는 방법이다. 따라서  $\mathbf{g}_l = \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{E}$ 라 두면 conjugated gradient method에서의 모델 변수를 찾아가는 방법은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{p}_{l+1} = \mathbf{p}_l - \alpha_l \mathbf{d}_l, \quad (14)$$

이 때,  $\mathbf{d}_l$ 은 현재의 gradient vector와 과거의 gradient vector와의 결합으로 계산된다.

$$\mathbf{d}_l = \mathbf{g}_l - \frac{\mathbf{g}_l^T \mathbf{g}_{l-1}}{\mathbf{g}_{l-1}^T \mathbf{g}_{l-1}} \mathbf{d}_{l-1}. \quad (15)$$

Levenberg-Marquardt의 regularization 방법의 이용하여 gradient vector  $\mathbf{g}_l$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{g}_l = \text{Re} \sum_{s, \omega} (\mathbf{H} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{v}_{s, k}^T [\mathbf{K}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}^*] \quad (16)$$

여기서  $\mathbf{I}$ 는 단위행렬,  $\lambda$ 는 감쇄변수 그리고  $\mathbf{H}$ 는 헤시안행렬을 나타낸다.

### 3 수치실험결과

#### 3.1 단순모델

우리의 새로운 파형역산이론을 검증하기 위하여 단순모델에 대하여 실험을 해 보았다. 단순모델의 속도모델은 그림 1과 같다. 2km 지점에서 shot을 터트려서 3sec 동안 얻은 seismogram은 그림 2(a)이다. 그림 2(b)는 spike 잡음을 추가하였으며, 10개의 trace를 제외시킨 seismogram이다. noise가 포함된 데이터를 이용하여 새로운 알고리즘과 기존 역산방법(Shin and Min, 2006)을 이용하여 파형역산을 수행하였다. 그림 3(a)는 기존 역산방법을 이용하여 100번째 역산된 속도모델이며, 그림 3(b)는 새로운 알고리즘에 이용하여 100번째 역산된 속도모델이다. 그림 3(b)가 그림 3(a)에 비해 보다 정확한 역산된 속도모델임을 확인할 수 있었다.

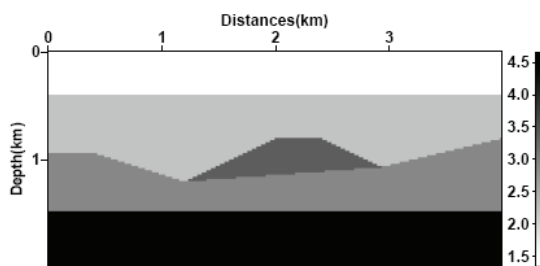


Fig.1. The velocity of simple model

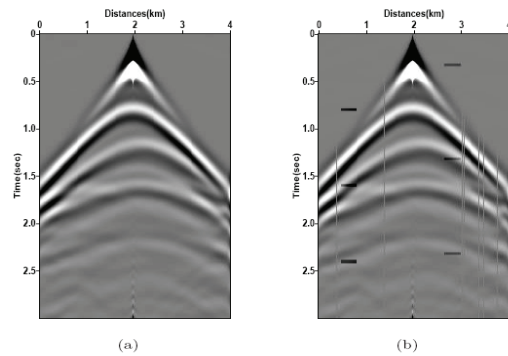


Fig.2. The seimograms:(a) no added noise  
(b) spike noise added

#### 3.2 Marmousi Model

실제 데이터에 비슷한 IFP Marmousi model을 가지고 파형역산을 수행하였다. 계산 비용의 절감을 위해 low pass filter를 사용 최대주파수를 18.75Hz로 하여, 0.32Hz 간격으로 총 57개의 주파수를 사용하였으며, 그리드 간격은 16m로 하였다. 초기 사용 모델은 선형적으로 깊이에 따라 1500m/s에서 4500m/s까지 증가하는 모델을 사용하

였다. 그림 4(a)는 새로운 알고리즘을 사용하여, 300번째 얻은 속도모델이며, 그림 4(b)는 기존 역산방법을 사용하여, 300번째 얻은 속도모델이다. 새로운 알고리즘을 통해 얻은 속도모델이 보다 왜곡이 덜 되어있는 것을 확인할 수 있었다.

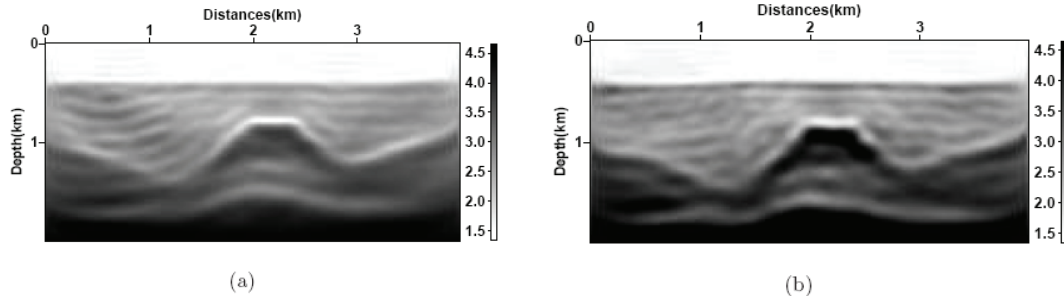


Fig.3. The inverted velocity model at 100th iteration: (a) conventional inversion method (b) our new inversion algorithm

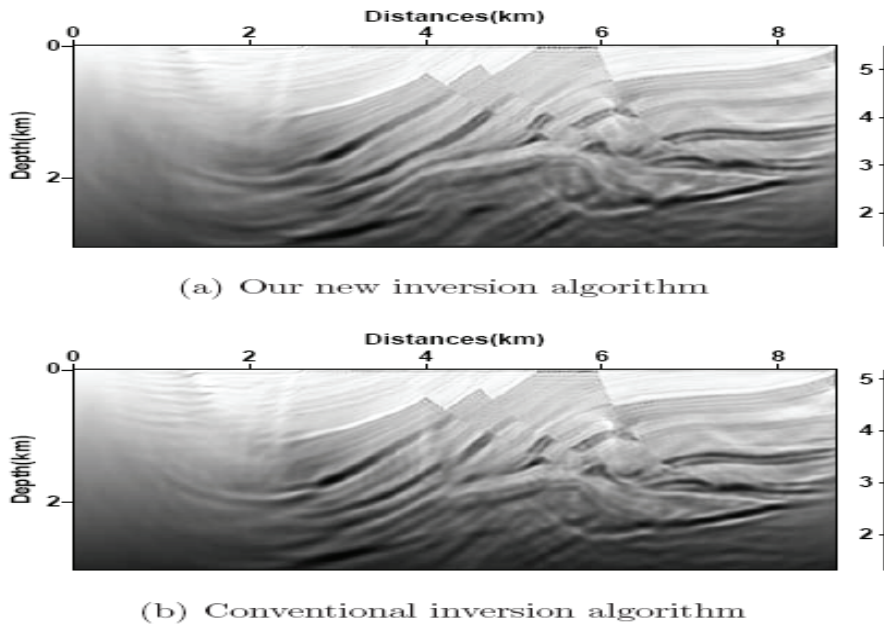


Fig. 4. The inverted velocity model with IFP Marmousi model: (a) our new inversion algorithm (b) conventional inversion method

#### 4 결론

우리는 주파수 영역에서는 Huber 함수를 이용,  $\ell^1$ -norm과  $\ell^2$ -norm를 동시에 사용하는 목적함수를 만들어 파형역산을 수행하였으며, 또한 역전파 기술을 이용하여 효율적으로 최대급경사방향을 계산하였다. 여러 가지 수치모델을 통해 우리의 새로운 파형역산 알고리즘이 기존 알고리즘에 비해 잡음에 덜 민감한 사실을 확인할 수 있었다. 또한 실제 모델을 가정한 IFP Marmousi model에 대해서 새로운 역산 알고리즘이 보다 좋은 결과를 도출하는 것을 확인할 수 있었다. 새로운 목적함수에서  $\ell^1$ -norm과  $\ell^2$ -norm 사용의 기준이 되는 기준값을 Bube and Lnagan(1997) 이 제안한 값을 그대로 사용하였다. 주파수 영역에 맞는 더 적당한 기준값을 찾아낸다면 우리

는 더 나은 결과를 얻을 수 있을 것이다.

#### 감사의 글

이 논문은 BK21 및 2006년도 과학기술부의 재원으로 한국과학재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No.2006-02610). 또한, 하태영의 연구는 국가수리과학연구소의 지원을 받아 수행되었음.

#### 참고문헌

- K.P. Bube and R.T. Langan. 1997, Hybrid  $\ell^1/\ell^2$  minimization with applications to tomography. *Geophysics*, **62**, 1183-1195.
- E. Crase, A. Pica, M. Noble, J. McDonald, and A. Tarantola. 1990, Robust elastic nonlinear waveform inversion: application to real data. *Geophysics*, **55(5)**, 527-538.
- P. Lailly, 1983, The seismic inverse problem as a sequence of before stack migration, Conference on inverse scattering : Theory and Application, Soc. Industr, Appl. Math.
- K. Levenberg. 1944, A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares. *Quart. Appl. Math.*, **2**, 164-168.
- D.W. Marquardt. 1963, An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, **11**, 431-441.
- Peter J. Huber. 1973, Robust regression: asymptotics, conjectures and Monte Carlo, *Ann. Statist.*, **1**, 799-821.
- R. G. Pratt, C. S. Shin, and G. J. Hicks. 1998, Gauss-newton and full newton methods in frequency-space seismic waveform inversion, *Geophys. J. Internat.*, **133**, 341-362.
- Shin, C. and Min, D. J., 2006, Waveform inversion using a logarithmic wavefield : *Geophysics*, **71**, R31-R42
- A. Tarantola, 1984, Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation: *Geophysics*, **49**, 1259-1266