

l_1 -norm을 이용한 주파수 영역 파형역산

편석준¹⁾, 신창수²⁾

¹⁾서울대학교 계산과학협동과정, pyunsi@gpl.snu.ac.kr

²⁾서울대학교 에너지시스템공학부

Frequency Domain Waveform Inversion Using l_1 -norm

Sukjoon Pyun¹⁾, Changsoo Shin²⁾

¹⁾Computational Science & Technology Program, Seoul National Univ.

²⁾Energy System Engineering Dept., Seoul National Univ.

Abstract: A robust objective function in the frequency domain is applied to the acoustic full waveform inversion. The proposed objective function is defined as l_1 -norm of residual wavefields in the frequency domain. Generally, the full waveform inversion is extremely sensitive to a number of factors such as parameterization, initial model, noise and so on. The numerical tests were performed for checking the sensitivity to attenuation and several noises. For the comparison with other objective functions, the conventional least-squares method and the logarithmic method were tested under the same condition. The synthetic data examples show that the proposed algorithm is more robust than the well-known methods.

Keywords: waveform inversion, objective function, robustness, least-absolute criterion

1. 서론

탄성과 완전파형역산은 Tarantola (1984)가 파동방정식의 adjoint 특성을 이용하여 목적함수의 경사 방향을 효율적으로 계산하는 알고리즘을 제안한 이후 많은 관심을 받게 되었다. 이후 Gauthier et al., (1986)과 Mora (1987), Pica et al. (1990) 등에 의해 수치적으로 적용한 연구가 발표되었는데 이 시기에는 시간 영역에서의 연구가 주류를 이루었다. 주파수 영역에서의 파형역산은 Shin (1988)과 Pratt et al. (1998) 등에 의해 정립되기 시작하였고 최근에도 많은 연구가 수행되고 있다 (Pratt, 1999; Sirgue and Pratt, 2004; Shin and Min, 2006).

일반적으로 파형역산은 최소자승 형태의 목적함수를 최소화하는 알고리즘이 많이 사용된다. 그러나 최소자승법은 큰 오차를 갖는 자료에 대해 민감한 통계적 특성을 보인다 (Claerbour and Muir, 1973). 이를 대체할 수 있는 방법으로 최소절대오차법을 비롯한 여러가지 목적함수들이 알려져 있다 (Cruse et al., 1990; Djikpesse and Tarantola, 1999).

본 논문에서는 주파수 영역에서 l_1 -norm 으로 정의되는 최소절대오차법을 파형역산의 역전과 알고리즘에 적용하였다. 최소절대오차법의 특성을 확인하기 위해 잡음을 추가한 자료에 대해 역산을 수행하였다. 또한 주파수영역에서 중요한 요소인 감쇄 인자에 대한 민감도를 분석하기 위해 4 가지 다른 감쇄 인자에 대해 역산을 수행하였다. 기존의

알고리즘과 비교를 위해 일반적인 최소자승법과 로그변환 파동장을 이용한 역산법에 의한 역산을 동시에 수행하였다.

2. 이론

주파수 영역에서 l_1 -norm 에 의해 정의되는 목적함수는 다음의 식(1)과 같다.

$$E(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_r} \left\{ \left| \operatorname{Re}[u_{ij}(\mathbf{m}) - d_{ij}] \right| + \left| \operatorname{Im}[u_{ij}(\mathbf{m}) - d_{ij}] \right| \right\} \quad (1)$$

여기서, \mathbf{m} 은 p 파 속도와 같은 모델 매개변수이고 $u_{ij}(\mathbf{m})$ 는 모델링한 파동장, d_{ij} 는 측정된 파동장, 아래첨자 i 는 송신원 번호, j 는 수신기 번호, n_s 는 총 송신원 개수, n_r 는 수신기 개수이다. 식(1)의 목적함수를 최소화하기 위해 매개변수 m_k 에 대해 미분하면 다음의 식(2)와 같은 최대급경사 방향을 구할 수 있다.

$$-\nabla_{m_k} E(\mathbf{m}) = -\operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_r} \frac{\partial u_{ij}(\mathbf{m})}{\partial m_k} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}[u_{ij}(\mathbf{m}) - d_{ij}]) \\ + i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}[u_{ij}(\mathbf{m}) - d_{ij}]) \end{array} \right\} \right] \quad (2)$$

여기서 $\operatorname{sgn}(\square)$ 는 signum 함수이다. 역전과 알고리즘을 적용하면 식(2)의 편미분 파동장은 가상송신원과 그린함수의 내적으로 나타낼 수 있고 모든 매개변수에 대한 최대급경사 방향은 다음과 같이 구해진다.

$$\nabla E = \operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^{n_s} (\mathbf{F}_i^*)^t \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}_i \right] \quad (3)$$

여기서 \mathbf{F}_i^* 는 가상송신원 벡터로 이루어진 가상송신원 행렬이고 \mathbf{r}_i 는 잔여오차 파동장을 나타낸다. l_1 -norm 을 이용한 본 알고리즘에서는 식(2)의 \mathbf{r}_i 은 다음의 식(4), (5)와 같이 정의된다.

$$\mathbf{r}_i = [r_{i1} \quad r_{i2} \quad \cdots \quad r_{in_r} \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^t \quad (4)$$

$$r_{ij} = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}[u_{ij}(\mathbf{m}) - d_{ij}]) + i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}[u_{ij}(\mathbf{m}) - d_{ij}]) \quad (5)$$

최대급경사 방향을 정규화하기 위해 Shin et al. (2001)이 제안한 pseudo-Hessian 행렬의 대각성분을 이용하였고 해를 안정화시키기 위해 감쇄항을 더하였다.

$$\nabla E_{reg} = (\operatorname{diag}(\mathbf{H}_p) + \lambda \mathbf{I})^{-1} \nabla E \quad (6)$$

여기서 \mathbf{H}_p 는 pseudo-Hessian 행렬이고 λ 는 감쇄상수이다. 주파수별로 구해진 경사방향은 동일한 가중치를 갖도록 더해져 최종 경사방향이 된다. 이렇게 구해진 경사방향에 CG 법을 적용하여 반복 역산을 수행한다.

3. 수치 예제

3.1 잡음을 포함한 자료의 역산

Fig. 1 은 역산에 사용된 Marmousi 속도 모델을 나타낸다. 이 속도 모델을 이용하여 주파수 영역 유한요소법으로 모델링한 합성자료에 잡음을 추가하였다 (Fig. 2). Fig. 2 에서 보는 것과 같은 잡음은 통계적으로 의미 없는 자료(outlier)이므로 이 잡음이 역산에

기여한다면 잘못된 결과를 얻게 된다. 최소자승법은 이러한 잡음까지 신호로 인식하기 때문에 Fig. 3(a)와 같은 왜곡된 속도 모델을 얻게 된다. 로그변환 파형역산법 또한 최소자승법에 기초하고 있기 때문에 Fig. 3(b)와 같은 결과를 얻게 된다. 반면에 본 논문에서 제안한 최소절대오차법에 의한 역산 결과는 Fig. 3(c)에서 보는 것과 같이 잡음에 전혀 영향을 받지 않고 정확한 속도 모델을 역산해 내는 것을 확인할 수 있다.

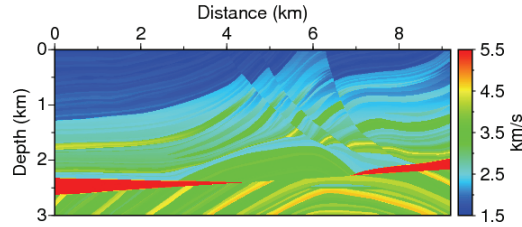


Fig. 1. The Marmousi velocity model.

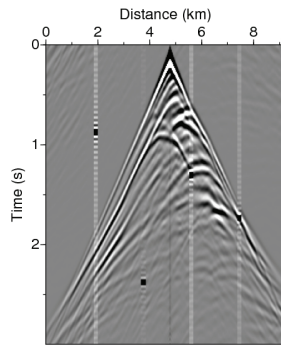


Fig. 2. The synthesized seismogram with outliers.

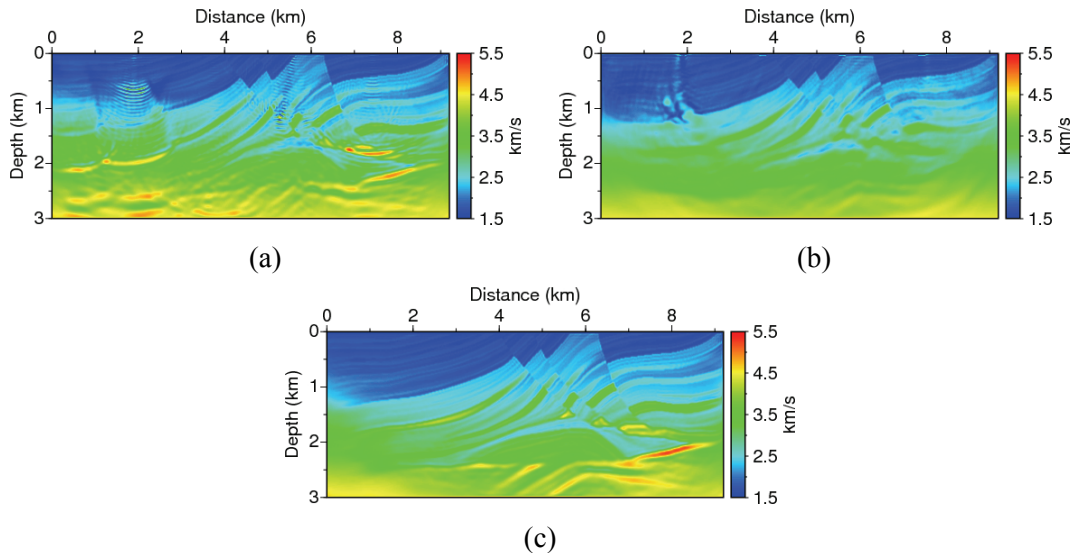


Fig. 3. The inverted velocity model using (a) the conventional least-squares inversion, (b) the logarithmic inversion and (c) the least-absolute inversion.

3.2 감쇄계수에 따른 역산 비교

Fig. 4는 주파수 영역 모델링에 사용되는 복소 주파수의 감쇄계수에 따른 합성 탄성파 기록을 보여준다. 감쇄계수가 클수록 두루마리 효과에 의한 잡음이 적어지지만 후기 시간대의 신호의 진폭이 작아지는 것을 관찰할 수 있다. 이러한 특성이 파형역산에 어떤 영향을 주는지 알아보기 위해 역산을 수행하였다. Fig. 5는 감쇄계수가 0.1인 경우의 역산 결과이다. 로그변환 파동장에 의한 역산법을 제외하고는 거의 정확한 속도 모델을 얻었다. 감쇄계수가 1.0인 경우(Fig. 6)의 역산 결과에서는 로그변환 파동장에 의한 역산이 가장 좋은 속도 모델을 얻었고 일반 파동장을 이용한 최소자승법은 왼쪽 부분에 속도의 왜곡이 발생하였다. 감쇄계수가 3.0으로 상당히 큰 경우(Fig. 7)에는 일반 파동장을 이용한 최소자승법은 영상화 심도가 1 km 미만으로 감쇄계수에 매우 민감한 것을 확인할 수 있다. 로그변환 파동장을 이용한 역산은 침투 심도가 크게 달라지지는 않지만 속도 구조가 불안정하게 역산되는 것을 볼 수 있다. 이에 비해 본 논문에서 제안한 최소절대오차법에 의한 역산은 감쇄계수에 따라 침투 심도가 영향을 받기는 하지만 전반적으로 일관적인 역산 결과를 주는 것을 확인할 수 있다.

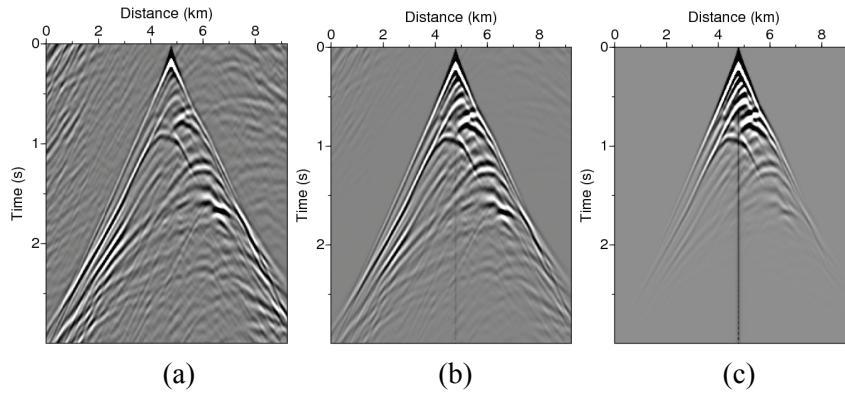


Fig. 4. The synthesized seismogram when the damping coefficient is (a) 0.1, (b) 1.0 and (c) 3.0

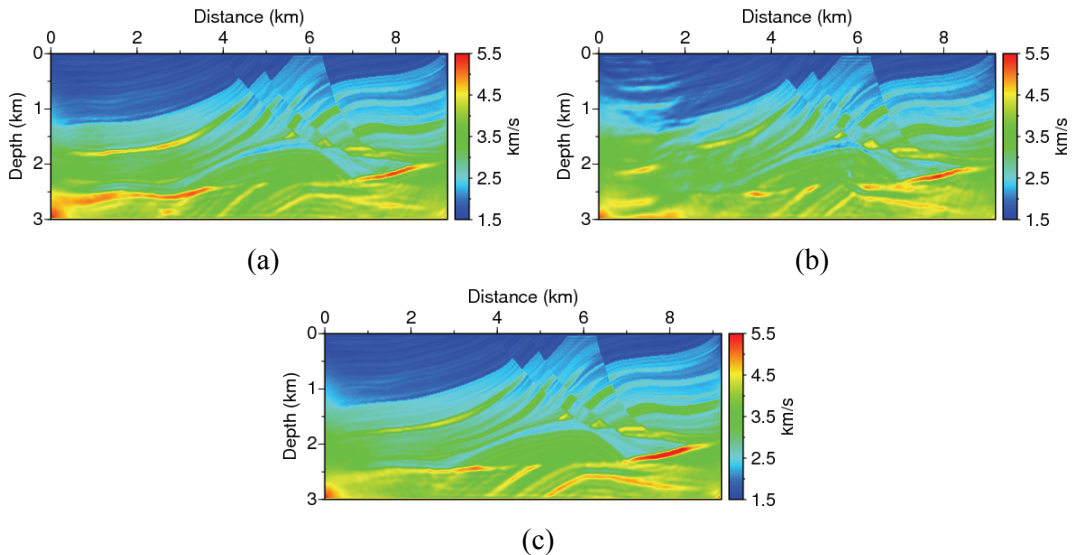


Fig. 5. The inverted velocity model using (a) the conventional least-squares, (b) the logarithmic and (c) the least-absolute inversion when the damping coefficient is 0.1.

주파수 영역 파형역산

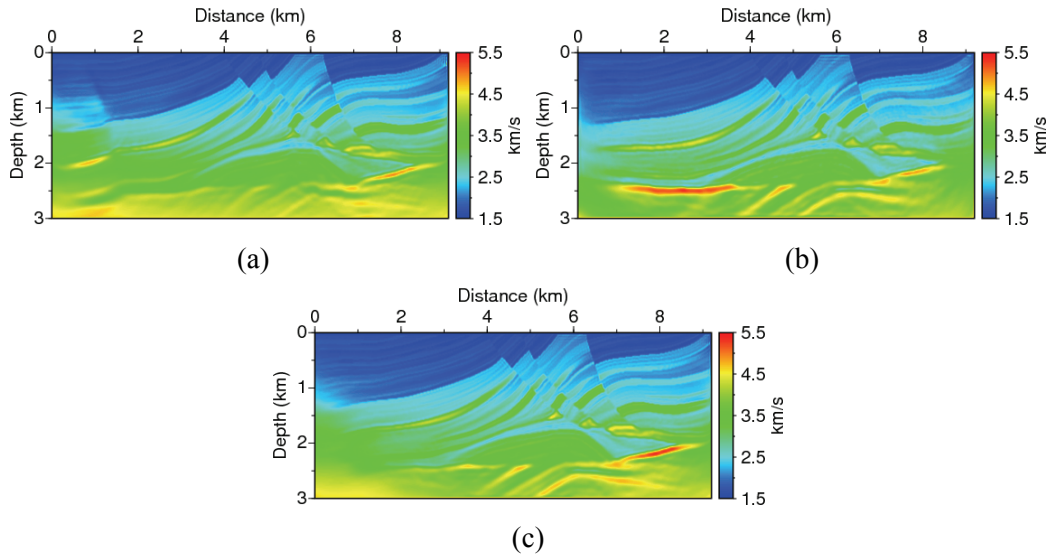


Fig. 6. The inverted velocity model using (a) the conventional least-squares, (b) the logarithmic and (c) the least-absolute inversion when the damping coefficient is 1.0.

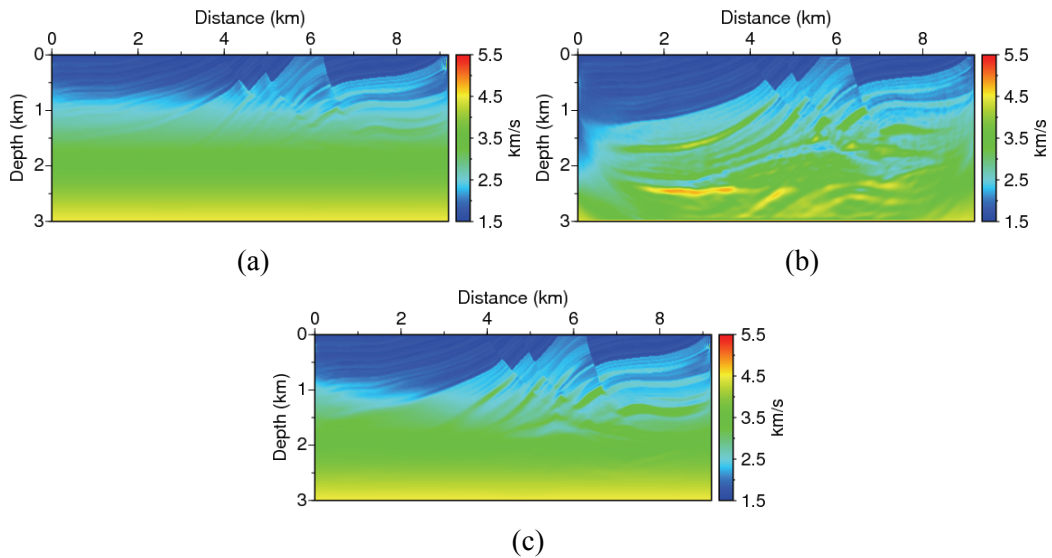


Fig. 7. The inverted velocity model using (a) the conventional least-squares, (b) the logarithmic and (c) the least-absolute inversion when the damping coefficient is 3.0.

4. 결론

본 논문에서는 주파수 영역의 파형역산에서 최소절대오차법에 의한 목적함수를 제안하였다. 본 알고리즘은 최소자승역산에서와 마찬가지로 파동방정식의 adjoint 특성을 이용하여 목적함수의 경사방향을 효율적으로 구할 수 있다. 기존 방법과의 차이점은 역전파시키는 잔차벡터가 파동장의 실수부와 허수부의 부호에만 의존한다는 것이다. 이는 주파수 스펙트럼을 평균화하는 특성을 지니고 있어서 시간영역에서 잔여오차 파동장을 스파이크화하는 효과가 있다. 이를 이용한 파형역산은 잡음에 덜 민감한 결과를 보여주었고 주파수 영역 모델링의 감쇄 계수에도 상대적으로 덜 민감한

결과를 주었다. 본 알고리즘을 통해 현장 자료의 잡음에 견고한 역산을 수행할 수 있을 것으로 사료된다.

감사의 글

이 논문은 2007년도 정부(과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2006-02610).

참고문헌

- Claerbout, J. F., and Muir, F., 1973, Robust modeling with erratic data, *Geophysics*, **38**, 826-844.
- Crase, E., Pica, A., Noble, M., McDonald, J., and Tarantola, A., 1990, Robust elastic nonlinear waveform inversion: Application to real data, *Geophysics*, **55**, 527-538.
- Djikpesse, H. A., and Tarantola, A., 1999, Multiparameter l_1 -norm waveform fitting: Interpretation of Gulf of Mexico reflection seismogram, *Geophysics*, **64**, 1023-1035.
- Gauthier, O., Virieux, J., and Tarantola, A., 1986, Two-dimensional nonlinear inversion of seismic waveforms: Numerical results, *Geophysics*, **51**, 1387-1403.
- Mora, P., 1987, Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multioffset seismic data, *Geophysics*, **52**, 1211-1228.
- Pica, A., Diet, J. P., and Tarantola, A., 1990, Nonlinear inversion of seismic reflection data in a laterally invariant medium, *Geophysics*, **55**, 284-292.
- Pratt, R. G., Shin, C., and Hicks, G. J., 1998, Gauss-Newton and full Newton methods in frequency domain seismic waveform inversions, *Geophysical Journal International*, **188**, 341-362.
- Pratt, R. G., 1999, Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part1: Theory and verification in a physical scale model, *Geophysics*, **64**, 888-901.
- Shin, C., 1988, Nonlinear elastic wave inversion by blocky parameterization, Ph.D. thesis, University of Tulsa.
- Shin, C., and Min, D. J., 2006, Waveform inversion using a logarithmic wavefield, *Geophysics*, **71**, R31-R42.
- Shin, C., Jang, S., and Min, D. J., 2001, Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory, *Geophysical Prospecting*, **49**, 592-606.
- Sirgue, L., and Pratt, R. G., 2004, Efficient waveform inversion and imaging: A strategy for selecting temporal frequencies, *Geophysics*, **69**, 231-248.
- Tarantola, A., 1984, Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation, *Geophysics*, **49**, 259-1266.