

# 유연매체의 거동해석: II. 공기의 영향을 고려한 해석

## Analysis of Flexible Media: II. Including Aerodynamic Effect

지 중근† · 장 용훈\* · 박 노철\*\* · 박 영필\*

Jung-Geun Jee, Yong-Hoon Jang, No-Cheol Park and Young-Pil Park

**Key Words :** LBB condition(LBB 조건), GLS(Galerkin Least Squares), FSI(Fluid Structure Interaction: 유체구조연성)

### ABSTRACT

The media transport systems, such as printers, copy machines, facsimiles, ATMs, cameras, etc. have been widely used and being developed rapidly. In the development of those sheet-handling machineries, it is important to predict the static and dynamic behavior of the sheet with a high degree of reliability because the sheets are fed and stacked at such a high speed. Flexible media are very thin, light and flexible, so they behave in geometric nonlinearity with large displacement and large rotation but small strain. In the flexible media analysis, aerodynamic effect from the surrounding air must be included because any small force can make large deformation. In this paper, surrounding air was modeled by incompressible Navier-Stokes flow and an arbitrary Lagranigan-Eulerian(ALE) finite element method with automatic mesh-updating technique was formulated for large domain changes. In the numerical simulations, the results with consideration of the air fast decayed and converged into static results while the results without considering air oscillated continuously.

### 1. 서 론

복사기, 프린터, 팩시밀리, ATM 등 유연매체를 취급하는 장치들이 널리 보급되어 있으며 소형화 · 고속화 추세를 보이고 있다. 이러한 기기에서 피딩(Feeding) 시스템은 중요한 역할을 담당하고 있으며, 반송 시에 발생할 수 있는 체류와 찌의 예측은 피딩 기구를 설계하는데 있어서 중요한 인자라 할 수 있다. 유연매체는 매우 얇고, 가볍고 잘 휘는 특성을 가지고 있으며, 대변형 · 소변형률의 기하비선형 거동을 보인다. 유연매체는 매우 작은 힘에도 큰 변형이 일어날 수 있으며 공기 중에서 움직이는 유연매체의 거동을 예측하기 위해서는 공기의 영향을 고려해야만 함은 자명한 사실이다. 공기의 해석을 위해서는 Navier-Stokes(NS) 방정식을 풀어야 하며 일반적인 갤러킨 타입의 유한요소법을 이용한 해석에서는 정확한 압력 분포를 얻을 수 없게 된다. NS 방정식을 푸는 방법은 크게 안정한(stable) 방법과 안정화된(stabilized) 방법으로 나눌 수 있다. 안정한 방법은 LBB(Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi) 조건을 만족하는 요소를 사용하여 해석하는 방법으로 P2P1, Q2Q1 등의 요소가 여기에 해당된다[1].

이 방법에서는 속도와 압력의 형상함수를 다르게 취하기 때문에 수치해석이 복잡하게 되는 단점이 있다. LBB 조건과 관계없이 일반적인 요소를 이용하기 위해서는 Least-squares FEM 방법[2]이나 SU(Streamline Upwind), SUPG(Streamline Upwind Petrov Galerkin), GLS(Galerkin Least Squares) 방법[3-6] 등을 적용해야만 한다.

본 논문에서는 GLS 방법을 사용하여 ALE 유한요소법[7-10]을 적용하여 유체구조연성(FSI) 문제를 수식화하고 수치해석을 수행한다.

### 2. 구조의 수식화

본 절에서는 유연매체를 2-D 오일러 빔으로 가정하여 수식화를 수행한다. 기하비선형에 대한 수식화 방법은 여러 가지가 있지만 여기서는 Co-rotational 방법을 이용하여 수행한다. 구조에 대한 강형식(Strong Form)의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\rho^s \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho^s g_i \quad (2.1)$$

위 식에서 위 첨자  $s$  는 구조성분을 나타내며  $\rho$  와  $g$  는 밀도와 중력가속도를 나타낸다. 행렬 형식의 비선형 시스템 방정식을 각 시간스텝에서의 증분형태(Incremental form)으로 나타내면 다음과 같다.

$${}^t M^s \Delta \dot{\phi}^s + {}^t K_t \Delta U^s = {}^{t+\Delta t} F^s - {}^t Q^s \quad (2.2)$$

† 교신저자; 연세대학교 기계공학과 대학원  
E-mail : jgjee@yonsei.ac.kr  
Tel : (02) 2123-4677, Fax : (02) 365-8460

\* 연세대학교 기계공학부 부교수

\*\* 연세대학교 정보저장기기협동과정 부교수

\*\*\* 연세대학교 기계공학부 정교수

여기서  $M$ ,  $K_t$ ,  $F$  와  $Q$  는 질량행렬, 접선강성행렬, 외력벡터 그리고 내력벡터를 각각 나타낸다. 그리고  $\dot{\phi}$  과  $\Delta U$  는 가속도 벡터와 변위벡터의 증가량을 나타낸다.

$M$  행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$M = \int_V N^T \rho N dV \quad (2.3)$$

변환행렬  $T$  는 다음과 같이 정의된다.

$$B = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/l_n & c/l_n & 1 & s/l_n & -c/l_n & 0 \\ -s/l_n & c/l_n & 0 & s/l_n & -c/l_n & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

전체 좌표계에서의 접선강성행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$K_t = B^T K_l B + \frac{zz^T}{l_n} N + \frac{1}{l_n^2} (rz^T + zr^T) (M_1 + M_2) \quad (2.5)$$

여기서,

$$\begin{aligned} r &= [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T \\ z &= [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T \\ K_l &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & 4EI & 2EI \\ 0 & 2EI & 4EI \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 3. 유체의 수식화

본 절에서는 매체를 둘러싸고 있는 유체에 대한 수식화를 전개한다. 유체를 비압축성 점성 유체로 가정하면 지배방정식은 다음과 같은 Navier-Stokes 방정식이 된다[8].

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 u + f \\ \frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{B} u \nabla p + \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Advection-diffusion 방정식은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$R_\phi = a \cdot \nabla \phi - \nabla \cdot (k \nabla \phi) - q = 0 \quad (3.2)$$

SU, SUPG, GLS 에 대한 변분을 취하면 다음과 같이 정리된다.

Streamline-upwind (SU):

$$(R_\phi, \psi)_\Omega + \sum_K \int_{\Omega_K} (a \cdot \nabla \phi) \tau (a \cdot \nabla \psi) d\Omega_K = 0 \quad (3.3)$$

Streamline-upwind/Petrov-Galerkin(SUPG):

$$(R_\phi, \psi)_\Omega + \sum_K \int_{\Omega_K} R_\phi \tau (a \cdot \nabla \psi) d\Omega_K = 0 \quad (3.4)$$

Galerkin-least-squares(GLS):

$$(R_\phi, \psi)_\Omega + \sum_K \int_{\Omega_K} R_\phi \tau (a \cdot \nabla \psi - \nabla \cdot (k \nabla \psi)) d\Omega_K = 0 \quad (3.5)$$

식(3.1)의 지배방정식에 갤러킨 방법을 적용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} A_1(u, v) + A_2(u, v) + B_1(v, p) &= F(v) \\ B_2(u, q) + B_3(p, q) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_1(u, v) &= \rho u^* \int_\Omega v \cdot \nabla u d\Omega \\ A_2(u, v) &= \mu \int_\Omega \nabla v \nabla u d\Omega \\ B_1(v, p) &= - \int_\Omega p \nabla \cdot v d\Omega \\ B_2(u, q) &= \int_\Omega q \nabla \cdot u d\Omega \\ B_3(p, q) &= \int_\Omega q \frac{1}{B} u \nabla p d\Omega \\ F(v) &= \int_\Omega f \cdot v d\Omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

위 식을 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(v) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

위 식을 쌍일차(Bilinear) 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q(u, p; v, q) &= F(v, q) \\ Q(u, p; v, q) &= A_1(u, v) + A_2(u, v) \\ &\quad + B_1(v, p) + B_2(u, q) + B_3(p, q) \\ F(v, q) &= F(v) \end{aligned} \quad (3.9)$$

GLS 방법에 대한 쌍일차 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q(u, p; v, q) &= F(v, q) \\ Q(u, p; v, q) &= A_1(u, v) + A_2(u, v) \\ &\quad + B_1(v, p) + B_2(u, q) + B_3(p, q) \\ &\quad + \sum_K \int_{\Omega_K} \left\{ \begin{aligned} &(\rho u \cdot \nabla u - \mu \nabla^2 u + \nabla p) \tau \\ &(\rho u \cdot \nabla v - \mu \nabla^2 v + \nabla q) \end{aligned} \right\} d\Omega_K \\ F(v, q) &= F(v) \\ &\quad + \sum_K \int_{\Omega_K} f \tau (\rho u \cdot \nabla v - \mu \nabla^2 v + \nabla q) d\Omega_K \end{aligned} \quad (3.10)$$

식(3.3-5)는 쌍일차(Bilinear)요소에서는 적분식의 두 번째 항이 사라지기 때문에 SU, SUPG 와 GLS 가 모두 같은 식이 된다.

식(3.10)의 GLS 식은 다음과 같이 정리된다.,

$$\begin{aligned} Q(u, p; v, q) &= A_1(u, v) + A_2(u, v) \\ &\quad + B_1(v, p) + B_2(u, q) + B_3(p, q) \\ &\quad + C(u, v) + D_1(u, q) + D_2(v, p) + E(p, q) \end{aligned} \quad (3.11)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
A_1(u, v) &= \rho u^* \int_{\Omega} v \cdot \nabla u \, d\Omega \\
A_2(u, v) &= \mu \int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, d\Omega \\
B_1(v, p) &= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v \, d\Omega \\
B_2(u, q) &= \int_{\Omega} q \nabla \cdot u \, d\Omega \\
B_3(p, q) &= \int_{\Omega} q \frac{1}{B} u \nabla p \, d\Omega \\
C(u, v) &= \sum_K \int_{\Omega_K} \rho u^* \cdot \nabla u \, \tau \, \rho u^* \cdot \nabla v \, d\Omega_K \\
D_1(v, p) &= \sum_K \int_{\Omega_K} \nabla p \, \tau \, \rho u^* \cdot \nabla v \, d\Omega_K \\
D_2(u, q) &= \sum_K \int_{\Omega_K} \rho u^* \cdot \nabla u \, \tau \, \nabla q \, d\Omega_K \\
E(p, q) &= \sum_K \int_{\Omega_K} \nabla p \, \tau \, \nabla q \, d\Omega_K
\end{aligned} \tag{3.12}$$

위 식을 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A_1 + A_2 + C & B_1 + D_1 \\ B_2 + D_2 & B_3 + E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.13}$$

식(3.13)에 질량행렬을 추가하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
M^p \dot{P} + \Lambda^p P + G^T V &= 0 \\
M_u \cdot \dot{V} + \Lambda \cdot V + K_u \cdot V - G \cdot P &= F
\end{aligned} \tag{3.14}$$

위 식을 하나의 식으로 나타내면 식(3.15)와 같이 나타낼 수 있다.

$$M^f \dot{\phi} + C^f \phi = F^f \tag{3.15}$$

위 식을 증분형태로 나타내면 다음 식이 얻어진다.

$${}^t M^f \Delta \phi^f + {}^t C^f \Delta \phi^f = {}^{t+\Delta t} F^f - {}^t Q^f \tag{3.16}$$

#### 4. 유체와 고체의 연성 방정식

본 절에서는 구조와 유체의 연성방정식을 유도한다.

유체와 구조 사이에는 완전 상호조건(full interaction conditions)이 적용되며 기하학적 적합조건과 평형조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
v_i^f &= v_i^s \text{ on } \partial R_i^c, \\
\sigma_{ji}^f n_j^f + \sigma_{ji}^s n_j^s &= 0 \text{ on } \partial R_i^c,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

여기서,  $n^f$  와  $n^s$  는 유체와 구조에서의 바깥방향의 법선벡터를 나타내며  $\partial R_i^c$  는 유체와 구조의 접촉부를 나타낸다.

식(4.1)에서 기술한 접촉 조건식을 기초로 하여, 유체와 구조의 접촉부에서의 변위, 속도, 가속도가 연성된다. 연성된 방정식의 증분형태는 식

(4.2)와 같다.

$${}^t M^{fs} \Delta \phi^{*fs} + {}^t C^f \Delta \phi^{fs} + {}^t K^s \Delta U^s = {}^{t+\Delta t} F^{fs} - {}^t Q^{fs} \tag{4.2}$$

여기서  $\phi^{fs}$  와  $U^s$  는 연성 시스템의 변수벡터들이며 다음과 같은 요소를 갖는다.

$$\begin{aligned}
\phi^{fs} &= \{P \quad V_i^f \quad V_c \quad V_i^s\}^T \\
U^s &= \{- \quad - \quad U_c \quad U_i^s\}^T
\end{aligned} \tag{4.3}$$

여기서,  $P$  는 유체의 압력 벡터이며,  $V_i^f$  는 구조와 독립적인 유체의 속도벡터이고,  $V_c$  는 연성된 속도벡터,  $V_i^s$  는 유체와 독립인 구조의 속도벡터,  $U_c$  는 연성된 변위 벡터,  $U_i^s$  는 유체와 독립인 구조의 변위 벡터를 각각 나타낸다.  $F^{fs}$  는 연성시스템에 작용하는 외력벡터이고,  $Q^{fs}$  는 내력벡터를 나타낸다.  $M^{fs}$  는 유체와 구조의 질량행렬을 나타낸다.  $C^f$  는 유체의 divergence, viscous 그리고 convective 항으로 구성된다.  $K^s$  는 구조의 접선 강성행렬이 된다. 그리고  $( )^*$  는 ALE 좌표계에서의 시간미분을 나타낸다.

#### 5. 수치적분 알고리즘

예측자-다중수정자 알고리즘 (Predictor - Multicorrector Algorithm : PMA)은 지배방정식이 시간에 대한 1 계 미분인 유체의 동적해석에 널리 쓰이고 있다. 하지만 구조의 관성력항은 변위에 대한 2 계 미분 형태를 갖기 때문에 유체구조연성 시스템의 동적해석을 위해서 PMA 방법은 뉴마크베타(Newmark- $\beta$ )에 초하여 확장되어야만 한다. 예측자와 수정자 그리고 해는 다음과 같은 식으로 정리된다.

예측자:

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t} U^{s(0)} &= {}^t U^s + \Delta t {}^t V^s + \Delta t^2 (0.5 - \beta) {}^t \dot{V}^s \\
{}^{t+\Delta t} \phi^{fs(0)} &= {}^t \phi^{fs} + \Delta t (1 - \gamma) {}^t \dot{\phi}^{fs}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$${}^{t+\Delta t} \phi^{*fs(0)} = 0$$

연성시스템의 해:

$$M^* \Delta \phi^{*fs(k)} = {}^{t+\Delta t} R^{(k)} \tag{5.2}$$

여기서,  ${}^{t+\Delta t} R^{(k)} (= {}^{t+\Delta t} F - {}^t Q^{fs})$  는 시간증분  $[t, t + \Delta t]$  에 대한  $k$  번째 반복의 시작에서의 잉여를 나타내며, 행렬  $M^*$  는 다음과 같이 정의된다.

$$M^* = {}^{t+\Delta t} M^{fs(k)} + {}^{t+\Delta t} C^{f(k)} \Delta t \gamma + {}^{t+\Delta t} K^{s(k)} \Delta t^2 \beta \tag{5.3}$$

수정자:

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}U^{s(k+1)} &= {}^{t+\Delta t}U^{s(k)} + \Delta V^{*s(k)} \Delta t^2 \beta \\
 {}^{t+\Delta t}\varphi^{fs(k+1)} &= {}^{t+\Delta t}\varphi^{fs(k)} + \Delta \varphi^{*fs(k)} \Delta t \gamma \\
 {}^{t+\Delta t}\varphi^{*fs(k+1)} &= {}^{t+\Delta t}\varphi^{*fs(k)} + \Delta \varphi^{*fs(k)}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

여기서,  $\gamma$  와  $\beta$  는 수치적분의 정확성과 안정성을 위해서 선택되는 파라미터이다.

## 6. 수치해석 결과

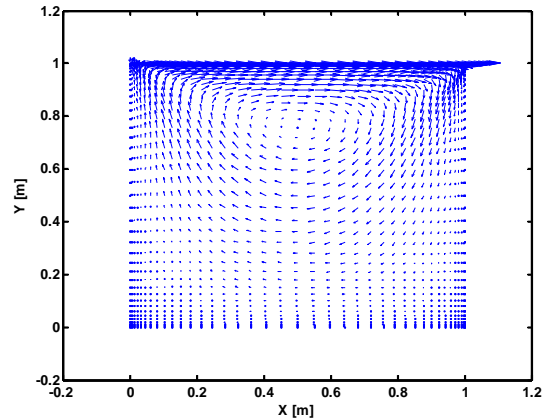
본 절에서는 앞에서의 유체와 구조에 대한 수식화를 이용하여 수치해석을 수행한다. 여기서 사용한 공기와 유연매체의 물성치는 표 1 과 같다.

Table 1 Material properties

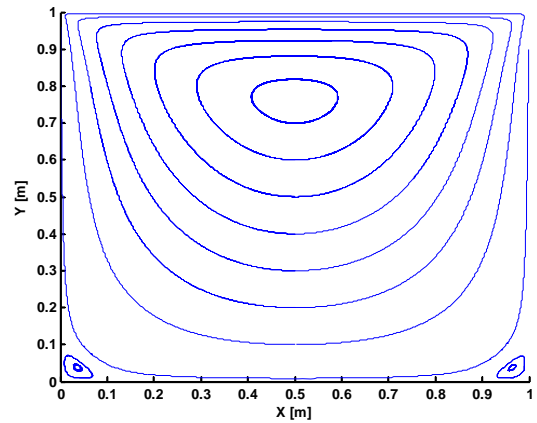
Material	Property	Value
Air	Density $[kg / m^3]$	1.1614
	Viscosity $[N \cdot s / m^2]$	184.6E-7
	Bulk modulus $[Pa]$	1.01E+5
Sheet	Density $[kg / m^3]$	681.8
	Young's modulus $[Pa]$	1.0E+9
	Thickness $[m]$	0.1E-3
	Length $[m]$	0.1

먼저 GLS 방법을 이용한 유체의 해석을 수행한다. 그림 1 은 Cavity flow 에 대한 해석으로 Stokes 방정식을 이용하여 해석을 수행하였다. 그림 1 의 (a)는 속도 벡터, (b)는 유선, (c)는 압력분포를 각각 나타낸다. 압력분포가 매끄럽게 예상한대로의 결과로, GLS 방법에 의한 안정화가 잘 이루어지고 있음을 확인할 수 있다.

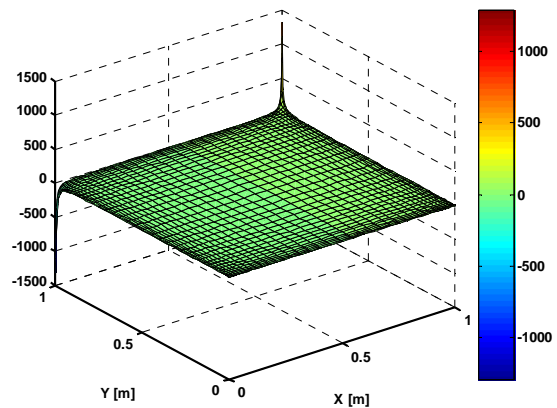
그림 2 는 Navier-Stokes 방정식을 이용하여 Cavityflow 에 대한 동적인 해석을 수행한 결과로 (a)는 초기의 속도분포를, (b)는 중간단계, (c)는 안정화된 상태에서의 속도분포를 각각 나타내고 있다. 수치적분 알고리즘으로 사용한 PMA 방법이 잘 적용되고 있음을 확인할 수 있다.



(a) Velocity

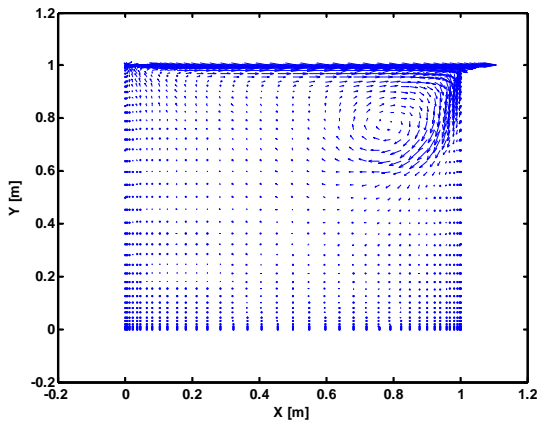


(b) Streamline

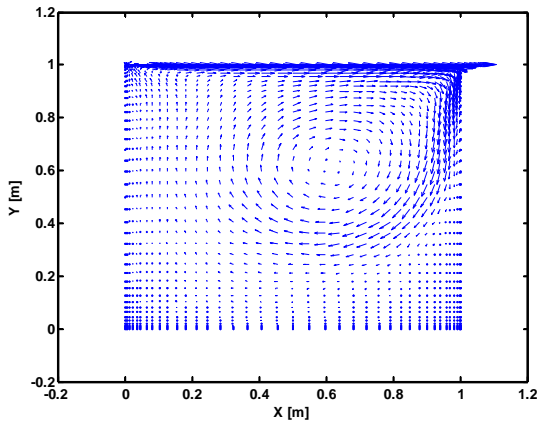


(c) Pressure

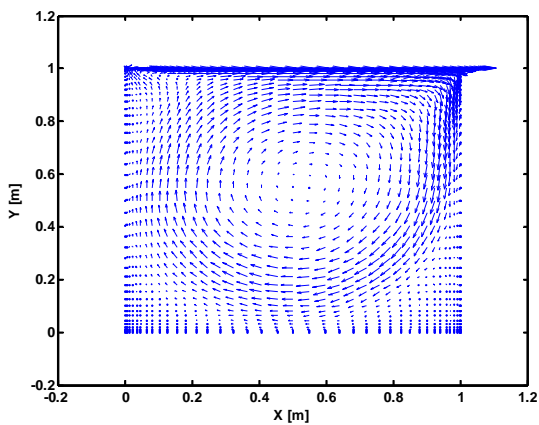
Fig.1 Driven Cavity Results with Stokes Equation



(a)



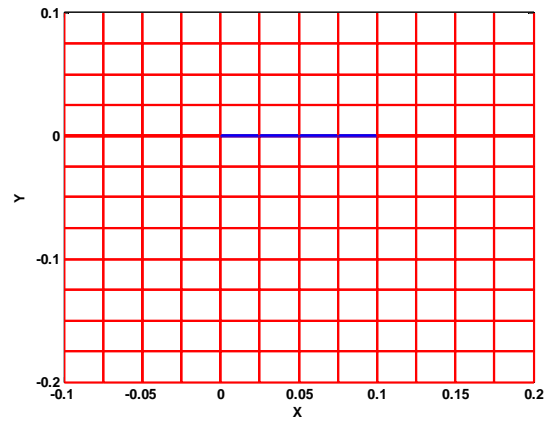
(b)



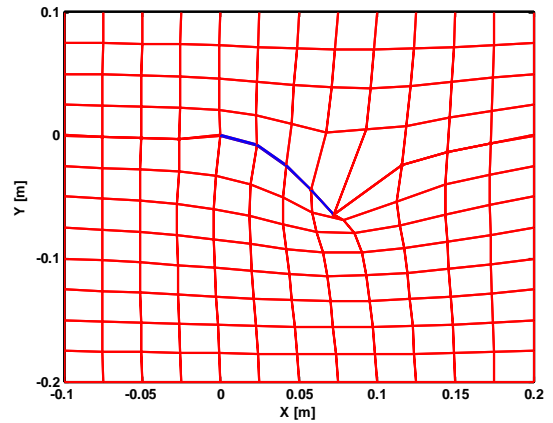
(c)

Fig.2 Velocity Fields of Driven Vavity with Dynamic Navier-Stokes Equation

그림 3 은 ALE 해석에서의 격자를 나타낸 것으로 빔의 인쪽은 고정되어 있다. (a)는 변형 전의 형상을 (b)는 변형 후의 격자를 나타낸다. 격자가 구조의 변화에 따라서 잘 추종하고 있는 것을 볼 수 있다.



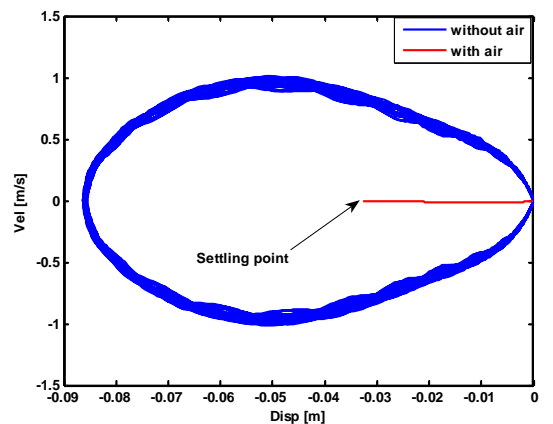
(a) Undeformed



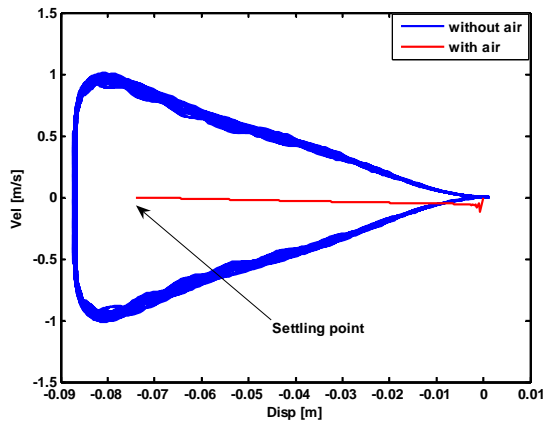
(b) Deformed

Fig.3 Finite Element Mesh for ALE Analysis

그림 4 는 ALE 해석에서의 결과로 공기의 영향을 고려한 경우가 그렇지 않은 경우의 빔 끝단의 위치를 비교한 그림이다. 공기의 영향을 고려하지 않은 경우에는 자중에 의한 진동이 줄어들지 않고 계속해서 일어나지만 공기의 영향을 고려한 경우 빠르게 정적 해석 결과에 수렴해 감을 확인할 수 있다.



(a) X-direction



(b) Y-direction

Fig.4 Phase Plot for the Trajectories of the End Point Position with and without Air Effect

## 7. 결론

유연매체는 작은 힘에도 큰 변형을 일으키기 때문에 동적해석 시에 반드시 매체 주변의 공기의 영향을 고려해야 한다. 본 논문에서는 매체 주변의 공기를 비압축성 점성유체로 가정하여 유체와 구조의 연성 해석을 수행하였다. 동적 해석결과 공기의 영향을 고려하지 않은 경우는 매체는 계속 해서 진동을 일으키지만 공기가 있는 경우에는 빠르게 정적해석 값에 수렴해 감을 확인할 수 있었다.

## 참고문헌

- (1) C. Taylor and P. Hood, 1973, "A Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations using the Finite Element Technique", *Computers and Fluids*, Vol.1, pp.73-100.
- (2) Bo-Nan Jiang, 1998, "On the Least-squares method", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.152, pp.239-257.
- (3) Alexander N. Brooks and Thomas J. R. Hughes, 1982, "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.32, pp.199-259.
- (4) Issac Harari and Thomas J. R. Hughes, 1992, "What are C and h?: Inequalities for the Analysis and design of Finite Element Methods", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.97, pp.157-192.
- (5) Leopoldo P. Franca and Sérgio L. Frey, 1992, "Stabilized finite element Methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.99, pp.209-233.
- (6) F. Ilinca, J. F. Héту and D. Pelletier, 2000, "On stabilized finite element formulations for incompressible advective-diffusive transport and fluid problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.188, pp.235-255.
- (7) J. Donea, S. Giuliani and J. P. Halleux, 1982, "An

Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element method for Transient Dynamic Fluid-Structure Interactions", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.33, pp.689-723.

(8) Qun Zhang and Toshiaki Hisada, 2001, "Analysis of Fluid-structure interaction problems with structural buckling and large domain changes by ALE Finite Element Method", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.190, pp.6341-6357.

(9) K. Namkoong, H. G. Choi, J. Y. Yoo, 2005, "Computation of dynamic fluid-structure interaction in two-dimensional laminar flows using combined formulation", *Journal of Fluids and Structures*, Vol.20, pp.51-69.

(10) R. van Loon, P. D. Anderson, F. N. van de Vosse and S. J. Sherwin, 2007, "Comparison of various fluid-structure interaction methods for deformable bodies", *Computers and Structures*, Vol.85, pp.833-843.