

구형 음향 홀로그래피에서 측정위치 부정확성에 의한 음압 추정 오차의 정량화

Quantification of Acoustic Pressure Estimation Error due to Sensor Position Mismatch in Spherical Acoustic Holography

이 승 하† · 김 양 한*

Seungha Lee and Yang-Hann Kim

Key Words : spherical acoustic holography(구형 음향 홀로그래피), sensor position mismatch error(측정위치 부정확성 오차), backward prediction(후방예측), random error(랜덤 오차), bias error(바이어스 오차), amplification ratio of random error(랜덤 오차 증폭비)

ABSTRACT

When we visualize the sound field radiated from a spherical sound source, spherical acoustic holography is proper among acoustic holography methods. However, there are measurement errors due to sensor position mismatch, sensor mismatch, directivity of sensor, and background noise. These errors are amplified if one predicts the pressures close to the sources: backward prediction. The goal of this paper is to quantitatively examine the effects of the error due to sensor position mismatch on acoustic pressure estimation. This paper deals with the cases of which the measurement deviations are distributed irregularly on the hologram plane. In such cases, one can assume that the measurement is a sample of many measurement events, and the cause of the measurement error is white noise on the hologram plane. Then the bias and random error are derived mathematically. In the results, it is found that the random error is important in the backward prediction. The relationship between the random error amplification ratio and the measurement parameters is derived quantitatively in terms of their energies.

1. 서 론

음향 홀로그래피(acoustic holography)는 홀로그램면(hologram plane)에서 획득된 음장 정보를 이용하여 예측면에서의 음장을 추정하는 방법이다. 음장 예측은 예측면의 위치에 따라 홀로그램면과 음원면 사이의 음장을 예측하는 후방 예측(backward prediction)과 음파가 진행하는 방향으로 음장을 예측하는 전방 예측(forward prediction)으로 나뉠 수 있다. 그리고 음향 홀로그래피는 홀로그램면의 형상에 따라 평면 음향 홀로그래피(planar acoustic holography), 실린더형 음향 홀로그래피(cylindrical acoustic holography), 구형 음향 홀로그래피(spherical acoustic holography)등으로 분류된다. 홀로그램면의 형상은 음원을 형성하는 구조물의 형상과 관심 영역에 따라 선택될 수 있다. 예를 들어, 음원이 어느 한 곳에 집중 되어 있고 관심 영역이 음

원 외 모든 영역이라면 구형 음향 홀로그래피가 적당하다. 특히, 구형 음향 홀로그래피는 랩어라운드 오차(wraparound error)^[1], 창문 함수에 의한 오차^[2]가 생기지 않기 때문에 더 좋은 결과를 기대할 수 있다.

하지만, 홀로그램면에서 발생한 오차는 예측된 음장의 정확도를 저하시키며, 전방 예측 보다 후방 예측에서 오차의 영향이 커진다^[1]. 이때, 홀로그램면에서 발생 가능한 오차 요인들은 실제 측정 지점과 요구되는 측정지점이 일치하지 않음으로써 발생하는 측정위치 부정확성(sensor position mismatch), 획득된 음장과 함께 측정되는 배경 잡음(background noise), 센서의 방향성, 센서에 의한 음장의 산란 등이 있다. 이 중, 측정위치 부정확성 오차 요인이 중요할 것이다. 왜냐하면, 구면 위의 요구되는 측정지점에 센서들을 정확히 위치시키는 것이 어렵기 때문이다.

본 연구에서는 측정위치 부정확성에 의해 발생하는 음압 추정 오차를 측정위치 부정확성 오차로 정의하였다. 그리고 확률적 관점에서 이를 바이어스 오차와 랜덤 오차로 분류하여 수학적으로 유도하였다. 또한, 홀로그램면과 예측면 사이의 랜덤 오차 증폭 특성을 랜덤 오차의 증폭비로 정의하고 이론적으로 유도하였다.

† 한국과학기술원 기계공학과 소음 및 진동제어 연구센터(NoViC)

E-mail : seunghabird@kaist.ac.kr

Tel : (042) 869-3065, Fax : (042) 869-8220

* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과 소음 및 진동제어 연구센터(NoViC)

2. 이론적 유도

2.1 구형 음향 홀로그래피

음원이 어느 한 곳에 모여있을 때, 음원의 중심으로부터 반지름(r_p)인 예측면(θ_r, ϕ_s)에 형성된 음장($p_p(\theta, \phi)$)은 다음과 같은 이산화된 키르히호프-헬름홀츠 적분 방정식(Kirchhoff-Helmholtz integral equation)과 홀로그래피면에서의 음장($p_H(\theta_r, \phi_s)$)을 이용하여 예측할 수 있다^[1].

$$p_p(\theta, \phi) = \sum_{r'}^R \sum_{s'}^S p_H(\theta_{r'}, \phi_{s'}) g_{PH}(\theta, \phi | \theta_{r'}, \phi_{s'}) \Delta_{r's'} \quad (2.1)$$

여기서 $\Delta_{r's'}$ 는 공간샘플링(spatial sampling)방법에서 구면에 위치한 센서들의 위치에 따른 가중치(weighting factor)이다^[3]. $g_{PH}(\theta, \phi | \theta_{r'}, \phi_{s'})$ 는 공간영역에서의 전파자로서 다음과 같이 디리클레트 경계조건(Dirichlet boundary condition)을 만족하는 그린함수(Green's function)로 표현된다^[4].

$$g_{PH}(\theta, \phi | \theta_{r'}, \phi_{s'}) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \frac{h_n(kr_p)}{h_n(kr_H)} Y_n^m(\theta_{r'}, \phi_{s'})^* Y_n^m(\theta, \phi) \quad (2.2)$$

여기서 $|m| \leq n$ 이고 $h_n(kr_H)$ 는 제 1종 구형 Hankel 함수(spherical Hankel function of the 1st kind)^[4]로써 음원으로부터 반경방향으로 전파하는 음장(outgoing wave)을 표현한다. $Y_n^m(\theta, \phi)$ 는 구형조화함수(spherical harmonics)로써

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (2.3)$$

와 같이 정의된다^[5]. 여기서 $P_n^m(\cos\theta)$ 는 버금 Legendre 함수(associated Legendre function)로써 θ 방향 음장의 변화를 표현하고 $e^{im\phi}$ 는 조화함수(harmonic functions)로써 ϕ 방향 음장의 변화를 표현한다. 버금 Legendre 함수(θ 방향)는 조화함수(ϕ 방향)와 함께 구형조화함수로 정의된다.

식(2.2)와 함께 식(2.1)는 다음과 같이 표현된다.

$$p_p(\theta_r, \phi_s) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \left[\sum_{r'}^R \sum_{s'}^S p_H(\theta_{r'}, \phi_{s'}) Y_n^m(\theta_{r'}, \phi_{s'})^* \Delta_{r's'} \right] \times \frac{h_n(kr_p)}{h_n(kr_H)} Y_n^m(\theta_r, \phi_s) \quad (2.4)$$

일반적으로, 음향 홀로그래피를 수행할 때 계산의 편리함을 위해 식(2.4)를 이용하여 음장을 예측한다. 먼저, 공간 푸리에 변환(spatial Fourier transform)으로 정의되는 각 괄호($[\cdot]$)내부를 계산한다. 여기서 변환된 결과를 구형파 스펙트럼(spherical wave spectrum, $P_{mn}(kr_H)$)으로 나타낸다^[5]. 그 후, 전파자($h_n(kr_p)/h_n(kr_H)$)를 이용하여 예측면에서의 구형파 스펙트럼을 구한 다음, 이를 역변환함으로써 예측면에서의 음장을 구할 수 있다.

2.2 측정된 음장의 근사화

그림 1은 본 연구에서 사용한 구형 측정면을 나타낸다. 그리고 이산화된 측정면에서 θ 와 ϕ 방향으로 r, s 번째 지점(θ_r, ϕ_s)을 기준으로 요구되는 측정지점과 실제 측정지점을 그림 2에 나타내었다. 여기서, 요구되는 측정지점(θ_r, ϕ_s)으로부터 $\Delta\theta_{rs}$, $\Delta\phi_{rs}$ 만큼 편차가 있는 지점에서 측정된 음장($\hat{p}_H(\theta_r, \phi_s)$)은 실제 음장($p_H(\theta_r, \phi_s)$)과 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\hat{p}_H(\theta_r, \phi_s) = p_H(\theta_r + \Delta\theta_{rs}, \phi_s + \Delta\phi_{rs}) \quad (2.5)$$

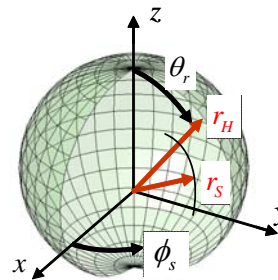


그림 1. 구형 측정면과 측정점 분포 및 음원의 위치

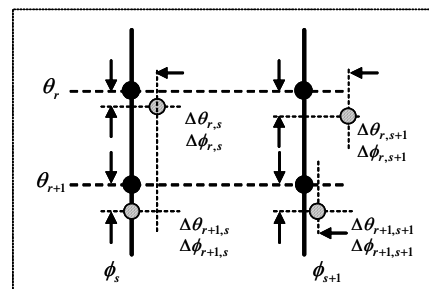


그림 2. 요구되는 측정지점과 실제 측정지점

편차들이 작다는 가정하에 측정된 음장은 측정 지점 $(\theta_r + \Delta\theta_{rs}, \phi_s + \Delta\phi_{rs})$ 에 대해 이차항까지 테일러 급수 전개(Taylor series expansion)함으로써 다음과 같이 근사화된다.

$$\begin{aligned} \hat{p}_H(\theta_r, \phi_s) &\approx p_H(\theta_r, \phi_s) + v_{\theta,H} \Delta\theta_{rs} \\ &\quad + v_{\phi,H} \Delta\phi_{rs} + c_{\theta,H} \Delta\theta_{rs}^2 \\ &\quad + c_{\phi,H} \Delta\phi_{rs}^2 + c_{\theta\phi,H} \Delta\theta_{rs} \Delta\phi_{rs} \end{aligned} \quad (2.6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} v_{\theta,H} &= \left. \frac{\partial p_H(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right|_{\substack{\theta=\theta_r \\ \phi=\phi_s}}, & v_{\phi,H} &= \left. \frac{\partial p_H(\theta, \phi)}{\partial \phi} \right|_{\substack{\theta=\theta_r \\ \phi=\phi_s}}, \\ c_{\theta,H} &= \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_H(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} \right|_{\substack{\theta=\theta_r \\ \phi=\phi_s}}, & c_{\phi,H} &= \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_H(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right|_{\substack{\theta=\theta_r \\ \phi=\phi_s}}, \\ c_{\theta\phi,H} &= \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_H(\theta, \phi)}{\partial \theta \partial \phi} \right|_{\substack{\theta=\theta_r \\ \phi=\phi_s}} \end{aligned}$$

이다. 측정지점에서의 음장과 실제 음장의 차는 테일러 급수 1차항 이상에서 발생한다.

2.3 측정편차에 대한 확률적 가정

확률적 접근에서 측정위치 부정확성 오차는 각각의 측정 사건에서 획득된 음장 $(\hat{p}_H(\theta_r, \phi_s))$ 이 실제 음장 $(p_H(\theta_r, \phi_s))$ 에 얼마나 근접하는가를 나타내는 바이어스 오차(bias error)와 바이어스된 평균값 $(E[\hat{p}_H(\theta_r, \phi_s)])$ 을 기준으로 얼마나 넓게 분포하는가를 나타내는 랜덤 오차(random error)로 분류할 수 있다^[6].

이러한 바이어스 오차와 랜덤 오차를 구하기 위해서는 각각의 편차들의 모집단 정보를 아는 것으로 충분하다. 이를 알기 위해 무한에 가까운 측정을 실제로 시도하는 것은 불필요하므로 다음과 같이 가정하고자 한다.

한 측정사건에서 각 지점별로 센서를 위치시키므로 r, s 지점에서 발생하는 측정편차들은 서로에게 독립적이며, 다른 지점에서 발생하는 측정편차들과도 독립적인 관계를 가진다고 가정하였다. 또한, 다른 측정사건에서 발생하는 측정편차들은 동일한 지점이라 하더라도 독립적인 관계를 가진다고 가정하였다. 그래서 각 지점 측정편차들은 각각의 모집단에서 임의로 추출되고 또한, 모든 모

집단들은 동일한 평균값과 분산값을 가진 정규분포를 따른다고 가정하였다. 여기서, 요구되는 지점에 센서를 정확히 위치시키기 위해 노력할 것이므로 평균값은 0으로 가정하였다.

3. 바이어스 오차와 랜덤 오차, 랜덤 오차 증폭비

3.1 홀로그래프면에서 바이어스 오차와 랜덤 오차 식(2.6)에서 각 편차들에 의한 항이 분리되었으므로 2.3 절에서 언급한 측정편차들에 대한 확률적 가정으로부터 바이어스 오차와 랜덤 오차는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} b(\hat{p}_H(\theta_r, \phi_s)) &= E[\hat{p}_H(\theta_r, \phi_s)] - p_H(\theta_r, \phi_s) \\ &\approx \sigma_{\theta}^2 c_{\theta,H} + \sigma_{\phi}^2 c_{\phi,H} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(\hat{p}_H(\theta_r, \phi_s)) &= E[|\hat{p}_H(\theta_r, \phi_s)|^2] - |E[\hat{p}_H(\theta_r, \phi_s)]|^2 \\ &\approx \sigma_{\theta}^2 |a_{\theta,H}|^2 + \sigma_{\phi}^2 |a_{\phi,H}|^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

홀로그래프면에서의 바이어스 오차는 편차들의 분산과 각 각도 방향으로 실제 음장의 공간 이차 미분으로 표현되며, 랜덤 오차는 편차들의 분산과 각 각도 방향으로 실제 음장의 공간 일차 미분의 절댓값 제곱으로 표현된다.

3.2 예측면에서 바이어스 오차와 랜덤 오차

예측면에서의 음장은 홀로그래프면에서의 음장으로부터 예측된다. 예측과정에서 홀로그래프면에 존재하는 바이어스 오차와 랜덤 오차는 음장과 함께 예측면으로 전파되며, 다음과 같이 나타난다.

$$b(\hat{p}_p(\theta_r, \phi_s)) \approx \sum_{r'} \sum_{s'} b(\hat{p}_H(\theta_{r'}, \phi_{s'})) g_{pH}(\theta_r, \phi_s | \theta_{r'}, \phi_{s'}) \Delta_{r's'} \quad (3.3)$$

$$\sigma^2(\hat{p}_p(\theta_r, \phi_s)) \approx \sum_{r'} \sum_{s'} \sigma^2(\hat{p}_H(\theta_{r'}, \phi_{s'})) |g_{pH}(\theta_r, \phi_s | \theta_{r'}, \phi_{s'})|^2 \Delta_{r's'}^2 \quad (3.4)$$

위 식으로부터, 예측면에서의 바이어스 오차와 랜덤 오차는 홀로그래프면에 분포한 바이어스오차와 랜덤 오차가 예측면으로 전파되는 형태로 표현된다. 하지만, 랜덤오차는 바이어스 오차와는 다르게 전파자의 절댓값의 제곱으로 표현된다. 만일, 동일한 크기의 바이어스 오차와 랜덤 오차가 홀로

그램면에 분포되어 있다고 가정하면, 후방 예측시 바이어스 오차보다 랜덤 오차가 크게 증폭하므로 랜덤 오차의 증폭 문제가 중요할 것이다.

3.3 랜덤 오차 증폭비

본 절에서는 홀로그래프면과 예측면 사이의 랜덤 오차의 증폭 특성을 에너지 관점에서 살펴보고자 한다^[7]. 왜냐하면, 홀로그래프면의 랜덤 오차 분포에 따라 각 예측점에서의 증폭 특성이 달라지므로 매우 복잡한 결과를 얻기 때문이다. 그리고 홀로그래프면과 예측면에 대한 랜덤 오차는 음장과 전파자가 절대값의 제곱으로 표현되었으므로 에너지 개념을 내포하고 있다. 그러므로, 전체 에너지 관점에서 각 면에서의 랜덤 오차의 증폭비를 살펴보면, 비교적 효과적인 정보를 얻을 수 있을 것이다.

시간-주파수 스펙트럼에서 공간-구형파 스펙트럼으로 확장된 파스발 이론(Parseval's theorem)에 의해 홀로그래프면에서 전체 랜덤 오차는 구형파 스펙트럼의 전체 랜덤 오차와 같다.

$$\begin{aligned} E_H &= \sum_r \sum_s \sigma^2(\hat{p}_H(\theta_r, \phi_s))\Delta_{rs} \\ &= \sum_n \sum_m \sigma^2(\hat{P}_{mn}^H) \end{aligned} \quad (3.5)$$

또한, 예측면에 대한 랜덤 오차의 전체 에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_P &= \sum_r \sum_s \sigma^2(\hat{p}_P(\theta_r, \phi_s))\Delta_{rs} \\ &= \sum_n \sum_m \sigma^2(\hat{P}_{mn}^H) \left| \frac{h_n(kr_P)}{h_n(kr_H)} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

그러므로, 랜덤 오차의 증폭비는 다음과 같이 정의된다.

$$R = \frac{\sum_n \sum_m \sigma^2(\hat{P}_{mn}^H) \left| \frac{h_n(kr_P)}{h_n(kr_H)} \right|^2}{\sum_n \sum_m \sigma^2(\hat{P}_{mn}^H)} \quad (3.7)$$

4. 결 론

구형 음향 홀로그래피를 이용하여 음장을 가시화할 때, 홀로그래프면에서 발생하는 오차들은 예측된 음장의 정확도를 저하시킨다. 본 논문에서는

오차요인들 중 측정위치 부정확성에 관심을 두었다. 이로 인한 예측된 음장의 오차를 측정위치 부정확성 오차로 정의하고 이를 확률적 관점에서 바이어스 오차와 랜덤 오차로 분류하여 정량화하였다. 그 결과, 바이어스 오차는 각 방향 측정 편차의 분산과 실제 음장의 공간 2 차 미분에 비례하여 홀로그래프면에 분포함을 알았다. 랜덤 오차는 측정 편차의 분산과 실제 음장의 공간 1 차 미분의 절대값의 제곱에 비례하여 홀로그래프면에 분포함을 알았다. 반면, 예측면에서의 바이어스 오차와 랜덤 오차는 홀로그래프면에 분포한 오차들이 예측면으로 전파하는 형태로 표현됨을 알았다. 여기서, 바이어스 오차에 비해 랜덤 오차의 증폭 문제가 후방 예측에서 중요시 됨을 알 수 있었다. 왜냐하면, 예측면에서의 랜덤 오차는 홀로그래프면에서의 랜덤 오차가 전파자의 절대값의 제곱에 비례하여 전파되는 것으로 표현되기 때문이다. 향후 모의 실험을 통하여 랜덤 오차의 증폭 특성을 살펴볼 것이다. 또한, 측정변수와 랜덤 오차의 증폭 특성에 근거하여 개선된 구형 음향 홀로그래피 구현 방법론을 제시하고자 한다.

후 기

본 연구는 교육부의 두뇌한국 21(BK21) 프로그램의 지원에 의하여 연구되었음을 밝힙니다.

참고문헌

- (1) Maynard, J. D., Williams, E. G., and Lee, Y., 1985, "Nearfield acoustic holography: I. Theory of generalized holography and the development of NAH," J. Acoust. Soc. Am. Vol.78, pp.1395-1413.
- (2) Kwon, H. S. and Kim, Y. H., 1995 "Minimization of bias error due to windows in planar acoustic holography using a minimum error window," J. Acoust. Soc. Am. Vol.98, No.4, pp.2104-2111.
- (3) Rafaely, B., 2004, "Plane-wave decomposition of the pressure on a sphere by spherical convolution," J. Acoust. Soc. Am. Vol.116, No.4, pp.2149-2157.
- (4) Morse, P. M. and Ingard, K. U., 1968, Theoretical acoustics, Princeton.
- (5) Williams, E. G., 1999, Fourier acoustics-sound radiation and nearfield acoustical holography, Academic Press.
- (6) Bendat, J. S. and Piersol, A. G., 1986, Random Data: Analysis and Measurement Procedure, 2nd ed., Wiley & Sons, Inc., New York.
- (7) Nam, K. U. and Kim, Y. H., 1999, "Errors due to sensor and position mismatch in planar acoustic holography," J. Acoust. Soc. Am. Vol.106, No.4, pp.1655-1665.