

# 주기대칭법을 이용한 원통형 배열 구조물의 접수진동 해석

## Vibration Analysis of Waterloaded Cylindrical Array Structures

신창주† · 홍진숙\* · 정의봉\*\* · 서희선\*\*\*

Chang Joo Shin, Chinsuk Hong, Weui Bong Jeong and Hee Seon Seo

**Key Words :** Cylindrical Array Structure (원통형 배열 구조), Cyclic Symmetric Method (주기대칭법), Mode Mapping Method (모드맵핑법), Finite Element Method (유한요소법), Boundary Element Method (경계요소법), Water Loading Effect (접수효과)

### ABSTRACT

This paper summarized a solution procedure for a large cylindrical structure mounted underneath a ship as a sonar. Vibration analysis of the water loaded structure is required to enhance the structural reliability as well as acoustic performance of the sonar. It is, however, often very difficult to solve such structures since they have many DOFs, considering the frequency of interest and the waterloading. The cyclic symmetric method is firstly reviewed to show how the eigen properties of the full model can be obtained from the representative segment model. The mode mapping method is then proposed and verified to take into account the waterloading with the minimum DOF for the analysis. The solution procedure is finally proposed and applied for a waterloaded cylindrical array structure.

### ———— 기호설명 ————

- [A] : 주기대칭 구조물의 특성 행렬
- [M] : 질량 행렬
- [K] : 강성 행렬
- {x} : 전체모델 계산시 변위 벡터
- {f} : 전체모델 계산시 외부 가진 벡터
- [Φ] : 전체모델 계산시 고유 모드 행렬
- {q} : 전체모델 계산시 모달 좌표 벡터
- ω : 외부 가진 각속도
- ω<sub>n</sub> : 구조물의 고유 각속도
- [I<sub>m</sub>] : m by m 단위 행렬
- {x<sub>MM</sub>} : mode mapping 계산시 변위 벡터
- {f<sub>MM</sub>} : mode mapping 계산시 외부 가진 벡터
- [Φ<sub>MM</sub>] : mode mapping 계산시 고유 모드 행렬
- {q<sub>MM</sub>} : mode mapping 계산시 모달 좌표 벡터

## 1. 서 론

선박은 수중의 상태를 탐지하기 위해 지상에서

† 부산대학교 기계공학부 소음진동실

\* 부산대학교 기계공학부 BK21 사업단

\*\* 부산대학교 기계공학부

\*\*\* 국방과학연구소

의 레이더와 같은 역할을 하는 소나를 사용한다. 목적과 기능에 따라 여러가지 형태로 센서를 배열한 배열 소나의 종류는 선배열 음탐기, 원통형 배열 음탐기 등이 있다. 이들 중 원통형 배열 음탐기는 일반적으로 선수부 하부에 부착하여 탐지 성능을 향상시킨 장비이다. 원통형 배열 음탐기는 대형의 원통형 벽면 상에 많은 센서가 부착되어 있는 형상을 가진다. 소나는 수중의 상태를 확인할 수 있는 중요한 장비로 수중 환경을 정확히 묘사할 수 있어야 한다. 따라서 소나는 구조적으로, 음향적으로 외부 환경으로부터 잘 보호되어야 한다. 구조적 외부 환경으로는 수중폭발이나 선체 충격 등으로 강력한 외부 가진이 소나 구조에 전달되었을 때 개별 센서 및 소나 구조의 파손 등이 유발될 수 있다. 음향학적 외부 환경으로는 선체로부터 전달되는 진동 및 방사소음이 센서에서 감지되어 소나의 자체 소음을 증가시켜 소나의 탐지 성능을 저하시키게 된다. 이들의 영향을 예측하여 소나 구조물의 생존성이나 성능 향상 측면에서 효과적으로 설계하기 위해 구조 및 음향학적 해석 모델이 필요하다.

그러나 이들 소나의 거동을 관심 주파수를 고려해 구조물의 해석을 시도하면 유한요소의 모델 자유도가 너무 많아지게 되고 원통형 배열 센서의 경우 선체 하부에 부착되어 물과 접촉하고 있으므로 접수효과를 포함한 해석이 불가능해질 수 있다.

본 연구에서는 접수효과를 고려하기 위해 유한요소/경계요소 결합법을 이용하였다. 계산의 부담을 줄이기 위해 모드좌표 계에서 결합하는 방법을 채택하였으며 이를 위해 구조의 모드 해석을 수행한 후 이를 경계요소로 모델링된 유체 영역과 결합하여 결합된 모드를 구하고 이를 중첩하여 구조의 응답을 구하게 된다. 접수효과 해석을 하기 위

해 모드 결합을 하기 전, 구조물의 고유 모드는 원통형 배열 구조물이므로 이는 주기대칭성을 이루는 구조물이기 때문에 cyclic symmetric method 를 통해 구조물을 대표할 수 있는 조각 모델로 전체 모델의 고유 진동수와 고유 모드를 구하였다. 이 조각 모델의 모드를 전체 구조물의 모드로 합성한 후 접수되는 부분만의 mesh 에 mapping 하여 접수 효과를 고려할 수 있는 모드매핑 법(mode mapping)을 제안하였다.

모드매핑 법은 구조와 유체의 연성 문제의 컴퓨터 자원을 효율을 사용하기 위하여 주어진 전체 구조물의 접수 mesh 만을 모델링하여 앞에서 구한 고유진동수와 고유 모드를 접수 mesh 에 mapping 시켜 응답을 구하는 방법이다.

## 2. 주기대칭 구조물의 고유모드 해석

본 장에서는 주기대칭 구조물 해석을 위해 cyclic symmetric 기법을 제시한다.

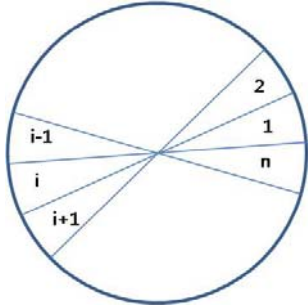


Fig. 1 Cyclic symmetric layout

n 개의 주기대칭형의 그림은 Fig. 1 로 표현된다. 주기대칭 구조물의 특성 행렬  $[M]$ ,  $[K]$ 은 (1)과 같이 순회행렬로 표현될 수 있다.

$$[A] = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & \cdots & P_{n-2} & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_0 & P_1 & \cdots & P_{n-3} & P_{n-2} \\ P_{n-2} & P_{n-1} & P_0 & \cdots & P_{n-4} & P_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_2 & P_3 & P_4 & \cdots & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_2 & P_3 & \cdots & P_{n-1} & P_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

이때 P 행렬은  $m \times m$  행렬 크기를 가진다. 따라서 A 행렬은  $(n \times m) \times (n \times m)$ 의 행렬 크기를 가지게 된다. [A] 행렬의 고유치와 역행렬 계산의 편의를 위해 식 (3)를 이용하여 [B] 행렬을 식 (2) 과 같이 구성한다.

$$[B] = \begin{bmatrix} W_0^0 & W_1^0 & W_2^0 & \cdots & W_{n-2}^0 & W_{n-1}^0 \\ W_0^1 & W_1^1 & W_2^1 & \cdots & W_{n-2}^1 & W_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_0^{n-2} & W_1^{n-2} & W_2^{n-2} & \cdots & W_{n-2}^{n-2} & W_{n-1}^{n-2} \\ W_0^{n-1} & W_1^{n-1} & W_2^{n-1} & \cdots & W_{n-2}^{n-1} & W_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$[W_i^l] = e^{j \frac{2\pi i l}{n}} [I_m] \quad (3)$$

여기서 식(3)에서  $[W_i^l]$ 는 임의로 구성하는 행렬이며  $[I_m]$ 은  $m \times m$  크기의 단위 행렬이다.

[A] 행렬을  $[B]$ ,  $[D]$  행렬을 이용해 식(4)과 같이 쓴다.

$$[A][B] = [B][D] \quad (4)$$

식(4)의  $[D]$ 는 식(5)로 표현할 것이며  $[D]$  를 구성하는 Q 는 식(6)과 같다.

$$[D] = \begin{bmatrix} Q_0 & & & & \\ & Q_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & Q_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[Q_i] = \sum_{h=0}^{n-1} [P_h][W_i^h] \quad (6)$$

식(4)에서의 특성 행렬 [A] 성질은 식(7)과 같다.

$$[A]^{-1} = [B][D][B]^{-1} = \frac{1}{n}[B][D]^{-1}[B]^* \quad (7)$$

[A]의 고유치 계산을 위해 식(8)을 구성한다.

$$[A]\{u\} = \lambda\{u\} \quad (8)$$

식(9)의  $\{u\}$ 를 식 (8)에 대입하면 식 (10)이 구성된다.

$$\{u\} = [B]\{y\} \quad (9)$$

$$[B]^{-1}[A][B]\{y\} = [D]\{y\} = \lambda\{y\} \quad (10)$$

식(5)에서 구한  $[D]$  를 식(10)에 대입하여 식 (11)을 만든다.

$$\begin{bmatrix} Q_0 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$[Q_i]\{y_i\} = \lambda\{y_i\} \quad (12)$$

$[D]$ 는  $[Q_i]$ 로 구성되어 있으며 식(12)에서  $i$ 에 대한 각각의 고유치를 계산할 수 있다. 전체  $n$ 번의 고유치를 식(12)으로 구할 수 있으며 이는 곧  $[A]$ 의 특성 행렬의 고유치를 구한 것과 같게 된다.

따라서 주기대칭형 구조물의 고유치를 찾기 위해  $[A]$ 의 전체 고유치 해석보다는 식 (12)을 이용하여  $[Q_i]$  고유치 해석을  $n$  번 수행하여  $[A]$ 의 전체 고유치 해석과 같은 결과를 얻는다.

Fig. 2의 조각 모델은 Fig. 3의 전체 모델을 대표한다.

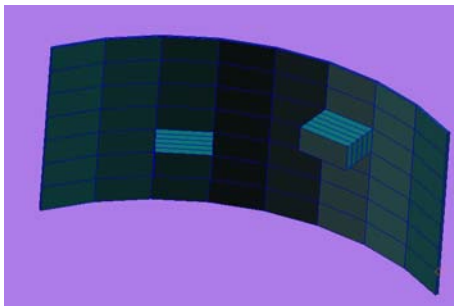


Fig. 2 Representative segment model

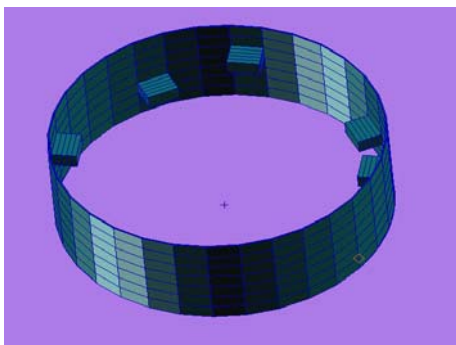


Fig. 3 Full model

유한요소법을 통하여 Fig. 2의 조각 모델을 이용해 전체모델의 고유모드를 구하였으며 Fig. 4에 1차모드를 표시했다. 마찬가지로 유한요소법을 이용하여 Fig. 3의 전체 모델의 고유모드를 구하고 Fig. 5에 1차 모드를 나타냈다. Fig. 4와 같이 cyclic symmetric method를 이용하면 조각 모델의

작은 자유도 만으로도 전체 모델의 고유모드를 찾을 수 있음을 알 수 있다. 유한요소 해석시 nastran을 이용하였다.

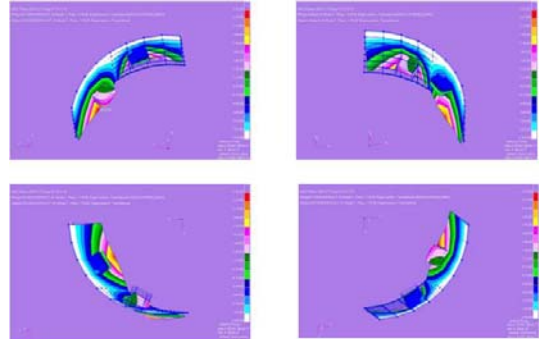


Fig. 4 The first mode of the representative segment and the corresponding cyclic symmetric segment

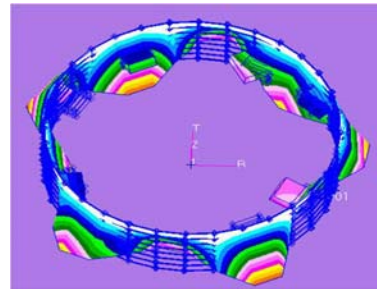


Fig. 5 The first model calculated using full FE model

### 3. Mode Mapping 법

본 절에서는 점수 진동 해석 시 구조물이 접수되는 부분과 접수되지 않는 부분을 가지고 있고, 접수되지 않는 부분의 자유도가 매우 클 경우 해석 모델의 규모를 줄일 수 있는 방법을 제안한다.

구조물의 지배 방정식은 식 (13)와 같이 표현한다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (13)$$

여기서  $\{x\}$ ,  $\{f\}$ 는 각각 구조물의 변위벡터, 힘벡터이다. 식(13)의 운동 방정식은 식(14)의 Modal 좌표계를 사용하여 식(15)과 같이 변형된다. 여기서  $\{\Phi\}$ 는 구조물의 고유 모드 행렬,  $\{q\}$ 는 구조물의 모드 좌표 벡터이다.

$$\{x\} = [\Phi]\{q\} \quad (14)$$

$$-\omega^2[\Phi]^T[M][\Phi]\{q\} + j\omega[\Phi]^T[C][\Phi]\{q\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{q\} = [\Phi]^T\{f\} \quad (15)$$

$$[\Phi] = \left[ \begin{array}{c|c} \Phi_{1c} & \dots & \Phi_{Nc} \\ \Phi_{1d} & & \Phi_{Nd} \end{array} \right] \quad (16)$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_c \\ x_d \end{Bmatrix}, \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_c \\ f_d \end{Bmatrix}$$

식(16)의  $\Phi_{1c}$ 는 1번 고유 모드의 구조물 최외각 mesh의 node에 해당하는 벡터,  $\Phi_{1d}$ 는 1번 고유 모드의 구조물 최외각 mesh를 제외한 내부 node에 해당하는 벡터이다.  $x_c, f_c$ 는 구조물 최외각 mesh에 node에 해당하는 변위 및 가진력이며,  $x_d, f_d$ 는 구조물 최외각 mesh를 제외한 내부 node에 해당하는 각각의 변위 및 가진력이다. 모드의 직교성을 이용하고 구조감쇠로 가정했을 때 식(15)의 각 항은 식(17)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} [\Phi]^T[M][\Phi] &= [I] \\ [\Phi]^T[C][\Phi] &= \text{diag}[2\zeta_n\omega_n] \\ [\Phi]^T[K][\Phi] &= \text{diag}[\omega_n^2] \end{aligned} \quad (17)$$

식 (15)은 식 (17)를 이용해 식(18)과 같이 쓸 수 있다.

$$-\omega^2[I]\{q\} + j\omega \times \text{diag}[2\zeta_n\omega_n]\{q\} + \text{diag}[\omega_n^2]\{q\} = [\Phi]^T\{f\} \quad (18)$$

위의 과정을 통해 전체 모델로 구성된 구조물의 고유 모드를 구할 수 있다. 식(18)을 통해 얻어진  $[I], \text{diag}[2\zeta_n\omega_n], \text{diag}[\omega_n^2], [\Phi]$ 를 최외각 mesh로 구성된 구조물에 각 정보들을 입력시킨다. 여기서 최외각 mesh를 다음과 같이 정의한다.

전체 모델 mesh를 Fig. 6과 같이 나타낸다고 가정한다. 최외각 mesh란 내부의 node가 없어지고 구조물의 최외각 경계를 구성하는 mesh만 구성하는 mesh를 남겨둔 상태를 최외각 mesh라 정의한다. Fig. 6의 최외각 mesh는 Fig. 7로 표현될 수 있다.

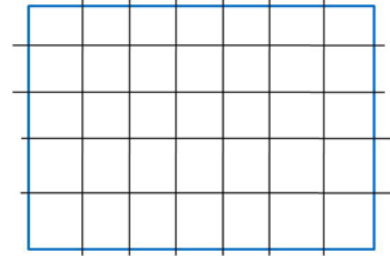


Fig. 6 Full model mesh

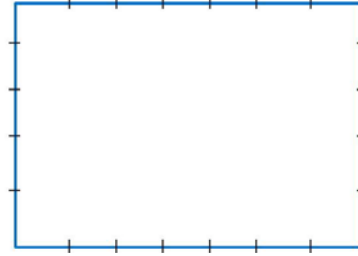


Fig. 7 Exterior mesh

최외각 mesh 구성 정보에는 Fig. 7과 같이 내부 node가 없다. 따라서  $[\Phi]$ 에 구성 성분 중  $\Phi_{1d}$ 는 삭제되고  $\Phi_{1c}$ 만 남게 되고 이를 식 (19)과 같이  $[\Phi_{MM}]$ 로 표현한다.

$$[\Phi_{MM}] = [\{\Phi_{1c}\} \dots \{\Phi_{Nc}\}] \quad (19)$$

고유 진동수와 맵핑된 모드를 이용하여 식(18)를 다시 쓰면 식(20)과 같이 된다.

$$-\omega^2[I]\{q\} + \text{diag}[2\zeta_n\omega_n]\{q\} + \text{diag}[\omega_n^2]\{q\} = [\Phi_{MM}]^T\{f_{MM}\} \quad (20)$$

여기서  $\{f_{MM}\} = \{f_c\}$ 이며 식(20)로부터 식(18)와 동일한  $\{q\}$ 를 얻기 위해서  $\{f_d\} = 0$ 이어야 한다. 즉 모든 가진력은 최외각 mesh에만 존재해야 한다. 식(20)로부터 얻은  $\{q\}$ 를 이용하여 최외각 mesh의 변위를 식(21)에 의해 구할 수 있다.

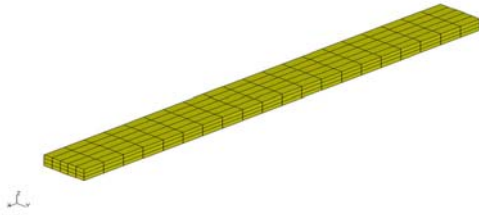
$$\{x_{MM}\} = \{x_c\} = [\Phi_{MM}]\{q\} \quad (21)$$

검증을 위해 Fig. 8의 모델을 제시한다.  $1\text{m} \times 0.1\text{m} \times 0.3\text{m}$  크기의 solid 모델이며 철의 물성치를 입력시켰다. 모드맵핑 전 유한요소 해석 모델의 solid mesh 수는 300개이며 모드맵핑 시 최외각 mesh 수는 350개이다. 유한요소 해석으로 solid mesh를 모드 해석을 수행하였고, 또한 그 결과를 mode mapping 시켰다. FRF 결과 비교를 위해 Fig. 8의 모델 왼쪽 하부 하나의 꼭지점에 각각 서로

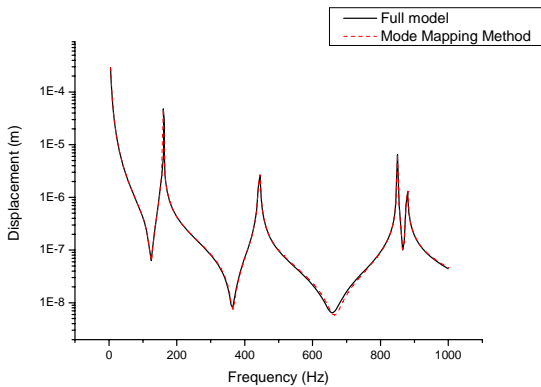
같은 위치에 모델의 상판방향으로 1N 수직력을 주고 서로 같은 장소에서 응답을 비교하였다.

Fig. 9 을 통하여 응답점에서의 변위 응답 결과가 일치하는 것을 확인할 수 있다.

위의 유한요소 해석으로 solid model 해석엔 nastran, 모드맵핑 해석 시엔 sysnoise 를 사용하였다.



**Fig. 8 FE model for the verification of Mode Mapping method**

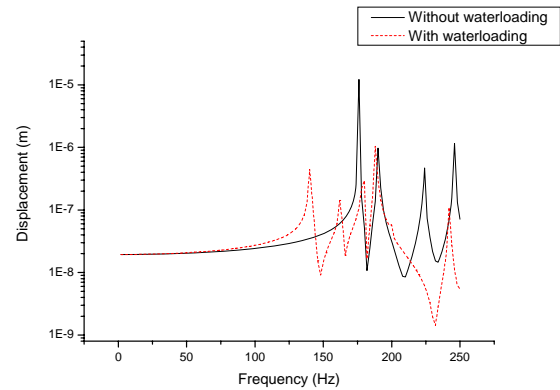


**Fig. 9 Comparison of point displacement response obtained using mode mapping method with that using full model FEM**

#### 4. 원통형 배열 구조물의 접수 진동 해석

3 절에서 mode mapping 이 되었다는 것은 최외각 mesh 에 공기 중에 놓여 있는 구조물의 특성이 정확히 입력되었다는 것을 의미한다. 본 절에서는 구조물의 최외각 mesh 를 둘러싼 유체를 물로 설정하고 그 결과를 공기로 둘러쌓였을 때, 물로 둘러 쌓였을 때의 결과를 서로 비교하고자 한다.

각각의 FRF 를 구하기 위해 최외각 mesh 의 임의의 한 점에 외력을 가하고, 역시 최외각 mesh 의 임의의 응답점에서 관심 주파수 250Hz 까지 변위 값을 받았다.



**Fig. 10 Comparison of the displacement at with and without waterloading**

Fig. 10 의 ‘Without waterloading’은 공기중, 즉 접수효과를 고려하지 않은 구조물의 진동 해석이고, ‘With water Loading’은 접수효과를 고려한 진동 해석이다. 접수효과로 인한 구조물의 고유 진동수가 공기중의 구조물 고유 진동수보다 낮게 표현되는 것을 확인할 수 있다.

#### 5. 결 론

본 연구는 원통형 배열 음탐기와 같은 주기대칭적인 대형 접수 구조물을 효율적으로 계산하는 방법을 제시하였다. 주기대칭인 구조물 해석 시 대표되는 한 조각만으로 cyclic symmetric method 를 이용하여 전체 구조물의 [M], [C], [K] 행렬을 순회 행렬 형태로 완전히 표현할 수 있고, 또한 전체 구조물의 고유 진동수와 고유 모드를 찾을 수 있었다.

앞서 구한 고유 진동수와 고유 모드를 구조물의 최외각 mesh 에 mode mapping 시킬 수 있다. 이때 최외각 mesh 란 접수효과가 고려 되는 부분만으로 구성되는 mesh 이다. 전체 구조물에서 구한 고유 모드 형상 중 최외각 mesh 에 해당하는 부분 이외의 정보는 mode mapping 과정에서 모두 삭제된다. Mode mapping 시 최외각 mesh 만 남아있으므로 가진점과 응답점은 반드시 최외각 mesh 를 구성하는 node 중에서 선택되어야 한다.

Cyclic symmetric method 와 mode mapping 을 통해 작은 자유도수로 구성된 효율적인 구조물 model 을 통해 접수효과가 고려된 FRF 를 구할 수 있다.

## 후 기

이 연구는 국방과학연구소의 지원으로 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Singiresu S. Rao., 1995, "Mechanical Vibrations", Third edition, Addison-wesley.
- (2) Lee, J. -M., 1996, "Theory and Application of Modal Analysis", pp.1-24~1-30.
- (3) MSC software, 2001, "MSC. Nastran 2001 Quick Reference Guide", MSC software , pp. 754~755, pp. 758
- (4) Yoo, H. -Y., Kwak, H. -S., Oh, D. -H., 1996, "FORTRAN 77", DaeYungSa.
- (5) Maurice Petyt, 1990, "Introduction to Finite Element Vibration Analysis", Cambridge University.
- (6) 長松, 大熊, 1990, 部分構造合成法, 培風館