

주파수 응답함수를 이용한 구조 파라미터 예측

Identification of Structural Parameters from Frequency Response Functions

김 규 식* · 강 연 준†

Kyu-Sik Kim and Yeon June Kang

Key Words : structural parameter (구조 파라미터), normal frequency response function (정규 주파수 응답함수), elimination of matrix inverse operation (역함수 소거), weighting matrix (가중 행렬), least squares method (최소자승법).

ABSTRACT

An improved method based on a normal frequency response function (FRF) is proposed to identify structural parameters such as mass, stiffness and damping matrices directly from the FRFs of a linear mechanical system. The method for estimating structural parameters directly from the measured FRFs of a structure is presented. This paper demonstrates that the characteristic matrices are extracted more accurately by using a weighted equation and eliminating the matrix inverse operation. The method is verified for a four degree-of-freedom lumped parameter system and an eight degree-of-freedom finite element beam. Experimental verification is also performed for a free-free steel beam whose size and physical properties are the same as those of the finite element beam. The results show that the structural parameters, especially the damping matrix, can be estimated more accurately by the proposed method.

1. 서 론

기계 시스템의 동적 거동을 예측하기 위해, 정확한 수학적 모델이 요구된다. 그러나 기계 시스템이 복잡해짐에 따라, 그 구조물의 질량, 강성, 댐핑 등의 구조 파라미터 값을 정확히 예측할 수 없으므로 수학적 모델의 구성에 어려움이 있다. 이러한 이유로 구조 파라미터를 정확히 예측하기 위한 많은 연구가 진행되어왔다.

구조 파라미터를 예측하기 위해 일반적으로 사용되는 방법 중 하나는 구조물의 주파수 응답 함수(FRF)를 간접적으로 이용하는 것이다. 이는 측정된 주파수 응답 함수를 이용하여 모드 형상(mode shape), 모달 주파수(modal frequency) 등의 모달 파라미터를 추출하고 이를 통하여 구조 파라미터를 예측하는 것이다^(1, 2). 그러나 이러한 간접적인 방법은 모달 파라미터를 추출하는 과정상의 오차 등과 같은 부정확성으로 인하여 구조 파라미터를 예측할 때 오차를 유발할 수 있는 단점이 있다⁽³⁾.

이러한 간접적 방법의 단점을 극복하기 위해 주파수 응답함수를 직접적으로 사용하는 방법이

활용되어 왔다. 이는 측정된 주파수 응답 함수로부터 모달 파라미터를 구하지 않고 주파수 응답 함수를 직접적으로 사용하므로 간접적 방법에 비해 간단하다. 노이즈가 포함된 주파수 응답함수를 이용해 구조 파라미터를 적절히 예측하기 위해 IV (Instrumental Variable) 방법을 활용하는 방법을 Fritzen⁽⁴⁾이 제안하였다. 그는 이 방법으로 예측한 구조 파라미터를 최소 자승법(least squares method) 으로부터 구한 값과 비교하여 IV 방법의 효용성을 증명하였다. 그러나 IV 방법을 사용하여 구조 파라미터를 예측하기 위해서는 많은 수의 데이터 셀이 필요하며, 이에 따라 긴 예측시간이 소요되는 단점이 있다. 이러한 단점을 극복하기 위해 Wang⁽⁵⁾은 데이터 셀을 선택하는 최적화된 형상을 제안하여 IV 방법을 사용함에 있어서 소요되는 데이터의 개수를 줄임과 동시에 구조 파라미터 예측의 정확도를 확보하였다.

복소 주파수 응답함수로부터 정규 주파수 응답 함수(normal FRF)를 계산하고 이를 통하여 구조 파라미터를 예측하는 방법이 Chen⁽⁶⁾에 의해 제안되었다. 그는 정규 주파수 응답함수를 이용하여 질량 및 강성 파라미터를 감쇠 파라미터와 분리 시킴으로써 감쇠 파라미터의 값을 기존의 방법보다 정확히 예측하였다. 이 방법을 활용하여 Lee⁽⁷⁾는 점성 감쇠기를 설치한 구조물의 점성 감쇠 및 구조 감쇠를 예측하였고, 주파수 응답함수에 포함된 노이즈의 영향에 따른 감쇠 파라미터 예측의 정확

† 교신저자; 정회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : yeonjune@snu.ac.kr

Tel : (02) 880-1691, Fax : (02) 888-5950

* 서울대학교 기계항공공학부

성에 대한 연구를 수행하였다. 또한 그는 측정된 동강성 함수(dynamic stiffness or inverse of receptance)를 직접적으로 사용하는 방법을 제안하였다⁽⁸⁾. 이 방법은 정규 주파수 응답함수를 계산할 필요성이 없기 때문에 기존의 방법에 비해 간단하나, 구조 파라미터를 정확히 예측하기 위해 힘 변환기 및 가속도계를 이용하여 측정된 데이터의 위상 보정, 부호 조정 및 주파수 응답 행렬의 대칭화를 위한 보정 과정이 추가적으로 필요하다.

본 논문에서는 주파수 응답 함수를 직접적으로 이용하여 구조 파라미터를 정확히 예측하는 방법을 제안한다. 본 방법은 기존의 정규 주파수 응답 함수를 활용한다. 구조 파라미터 계산 과정상의 오차 증폭을 줄이고 정확성을 확보하기 위해 역행렬 과정을 제거하고, 가중 행렬을 적용하는 것이 제안하는 방법의 특징이다. 4 자유도 질량-스프링계와 유한 요소 빔 구조물을 이용한 모의 실험과 실제 빔 구조물을 이용하여 본 방법의 정확성을 검증하였다.

2. 이론

다 자유도계의 운동 방정식은 다음과 같은 형태로 주어진다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{K} + j\mathbf{D})\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (1)$$

여기서, \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{C} , \mathbf{D} 는 각각 시스템의 질량, 강성, 점성 감쇠, 구조 감쇠 행렬이며, \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$, \mathbf{f} 는 각각 변위, 속도, 가속도, 외력 벡터이다. 조화 가진 강제진동의 경우 수식 (1)은 다음과 같다.

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{X}(\omega) + j(\omega\mathbf{C} + \mathbf{D})\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (2)$$

수식 (2)의 양변에 $(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})$ 를 곱하면 다음과 같은 형태의 수식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &(\mathbf{I} + j[-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}]^{-1}[\omega\mathbf{C} + \mathbf{D}])\mathbf{X}(\omega) \\ &= [-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}]^{-1}\mathbf{F}(\omega). \end{aligned} \quad (3)$$

정규 주파수 응답 함수 $\mathbf{H}^N(\omega)$ 와 변환 행렬 $\mathbf{G}(\omega)$ 을 다음과 같이 정의할 수 있으므로⁽⁶⁾,

$$\mathbf{H}^N(\omega) = [-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}]^{-1}, \quad (4)$$

$$\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{H}^N(\omega)[\omega\mathbf{C} + \mathbf{D}], \quad (5)$$

수식 (4), (5)를 수식 (3)에 대입하면 다음과 같은 간단한 형태로 나타낼 수 있다.

$$[\mathbf{I} + j\mathbf{G}(\omega)]\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}^N(\omega)\mathbf{F}(\omega) \quad (6)$$

또한, 복소 주파수 응답함수는 다음과 같은 형태로 표현될 수 있다.

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}^C(\omega)\mathbf{F}(\omega) \quad (7)$$

여기서 $\mathbf{H}^C(\omega)$ 는 복소 주파수 응답 행렬이다. 수식 (7)을 실수부와 허수부로 분리시켜 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{X}(\omega) = [\mathbf{H}_R^C(\omega) + j\mathbf{H}_I^C(\omega)]\mathbf{F}(\omega) \quad (8)$$

여기서 하첨자 R 은 실수부를, I 는 허수부를 의미한다.

수식 (8)을 수식 (6)에 대입하면

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^N(\omega) &= [\mathbf{H}_R^C(\omega) - \mathbf{G}(\omega)\mathbf{H}_I^C(\omega)] \\ &+ j[\mathbf{G}(\omega)\mathbf{H}_R^C(\omega) + \mathbf{H}_I^C(\omega)] \end{aligned} \quad (9)$$

와 같이 표현할 수 있다. 수식 (9)는 실수부와 허수부의 합 형태로 표현되어 있으나, 정규 주파수 응답함수 $\mathbf{H}^N(\omega)$ 는 수식 (4)에서와 같이 실수로 구성된 행렬이므로 수식 (9)의 허수부를 이용하여 변환 행렬 $\mathbf{G}(\omega)$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{G}(\omega) = -\mathbf{H}_I^C(\omega)[\mathbf{H}_R^C(\omega)]^{-1} \quad (10)$$

여기서, 변환 함수는 역행렬 과정을 포함하고 있으므로, 역함수가 취해지는 행렬이 불량조건(ill-condition)일 경우 그 행렬에 포함되어 있는 작은 노이즈가 크게 증폭될 가능성이 있음을 주목해야 한다.

또한 수식 (10)을 수식 (9)의 실수부에 대입하면 정규 주파수 응답함수는 다음과 같다.

$$\mathbf{H}^N(\omega) = \mathbf{H}_R^C(\omega) + \mathbf{H}_I^C(\omega)[\mathbf{H}_R^C(\omega)]^{-1}\mathbf{H}_I^C(\omega) \quad (11)$$

일단, 수식 (10)과 (11)을 이용하여 정규 주파수 응답함수와 변환 행렬을 구한 뒤, 수식 (4), (5)에 대입하면 구조 파라미터를 계산할 수 있다. 그 수식은 다음과 같다.

$$[\omega\mathbf{H}^N(\omega) \quad \mathbf{H}^N(\omega)] \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\omega) \quad (12)$$

$$[-\omega^2\mathbf{H}^N(\omega) \quad \mathbf{H}^N(\omega)] \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (13)$$

위 수식에서 구조 파라미터 값은 최소 자승법에 의해 구할 수 있으며, 노이즈가 포함되어 있지 않은 주파수 응답함수를 이용할 경우 정확한 구조 파라미터 값을 구할 수 있다. 그러나, 측정된 주파수 응답함수는 노이즈가 포함되어 있으므로 수식 (12), (13)으로 계산된 값은 높은 오차율을 보일 수 있다. 특히 수식 (12)로 계산되어진 감쇠 파라미터의 경우 앞에서 언급한 바와 같이 역행렬 항이 포함되어 있는 $\mathbf{G}(\omega)$ 를 사용하므로 노

이즈의 증폭 가능성이 매우 크다.

본 논문에서는 이러한 오차 증폭의 가능성을 배제하기 위해 감쇠 파라미터 계산 상의 역행렬 항을 제거한 뒤 최소 자승법을 적용 하고자 한다. 수식 (5)를 수식 (10)에 대입하면 다음과 같다.

$$-\mathbf{H}_l^c(\omega)[\mathbf{H}_r^c(\omega)]^{-1} = \mathbf{H}^N(\omega)\mathbf{Z}_1 \quad (14)$$

여기서 $\mathbf{Z}_1(\omega)$ 은 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{Z}_1(\omega) = \omega \mathbf{C} + \mathbf{D} \quad (15)$$

수식 (14)의 양변에 $\mathbf{H}_r^c(\omega)$ 를 곱해주면 다음과 같이 역행렬 항이 제거된 수식을 얻을 수 있다.

$$-\mathbf{H}_l^c(\omega) = \mathbf{H}^N(\omega)\mathbf{Z}_1(\omega)\mathbf{H}_r^c(\omega) \quad (16)$$

또한, 기존의 방법으로 질량 및 강성 파라미터를 계산하기 위해서는 외적 확장법(outer product expansion)을 사용하여 수식 (13)을 $[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{b}\}$ 의 형태를 갖는 일련의 선형 연립 방정식으로 만들어 최소 자승법을 적용해야 한다. 이와 같이 외적 확장법을 사용할 경우 그 것의 특성상 연립 방정식 계수 행렬 $[\mathbf{A}]$ 는 항상 0의 값을 가지는 요소들이 존재하게 되며, 이는 행렬의 조건수(condition number)를 작게 만들 수 있다. 조건수가 작은 행렬의 역함수를 계산할 경우, 그 행렬에 포함되어 있는 노이즈가 증폭될 가능성이 매우 높다. 또한 연립 방정식 계수 행렬에 가중 함수를 적용할 경우 이러한 요소들은 가중 시킬 수 없게 되어 수학적 계산상의 정확도를 떨어뜨릴 수 있다. 따라서 이러한 0을 갖는 요소가 없는 연립 방정식 계수 행렬이 필요하며, 이를 위해 수식 (4)의 양변에 $\mathbf{H}_r^c(\omega)$ 를 곱하고 정리하면 수식 (16)와 같은 형태의 아래 수식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{H}_r^c(\omega) = \mathbf{H}^N(\omega)\mathbf{Z}_2(\omega)\mathbf{H}_r^c(\omega) \quad (17)$$

여기서 $\mathbf{Z}_2(\omega)$ 는 아래와 같다.

$$\mathbf{Z}_2(\omega) = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \quad (18)$$

수식 (16), (17)은 복소 주파수 응답 함수의 실수 항으로 가중된 수식(weighted equation)이며, 아래 수식과 같은 형태를 갖는다.

$$\mathbf{H}_A(\omega)\mathbf{Z}_s(\omega)\mathbf{H}_B(\omega) = \mathbf{H}_c(\omega) \quad (19)$$

여기서, $\mathbf{H}_A(\omega)$, $\mathbf{H}_B(\omega)$, $\mathbf{H}_c(\omega)$ 는 각각 주파수 응답 함수로부터 계산되는 행렬이며, $\mathbf{Z}_s(\omega)$ 는 구조 파라미터 행렬이다.

3. 구조 파라미터 추정 과정

수식 (19)를 구성하고 있는 각각의 행렬 크기

가 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 이면, 수식 (19)는 크로네커 곱(Kronecker product)과 행렬 재배열 함수를⁽⁹⁾ 이용하여 다음과 같은 일련의 연립방정식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$[\mathbf{K}_p]_{N^2 \times N^2} \{\mathbf{z}\}_{N^2 \times 1} = \{\mathbf{r}\}_{N^2 \times 1} \quad (20)$$

여기서 수식 (20)의 각각의 행렬 및 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{H}_A \otimes \mathbf{H}_B^T, \quad (21)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{v}[\mathbf{Z}_s], \quad \mathbf{r} = \mathbf{v}[\mathbf{H}_c]. \quad (22, 23)$$

여기서 기호 \otimes , $\mathbf{v}[\cdot]$ 는 각각 크로네커 곱, 행렬 재배열 함수를 의미하며, 위 첨자 T는 행렬의 전치이다. 벡터 \mathbf{z} 는 구조 파라미터 행렬 \mathbf{Z}_s 를 재배열한 것이므로 주파수 함수이며, 다음과 같은 변환 행렬을 이용해 주파수에 독립적인 벡터 \mathbf{x} 로 만들 수 있다.

$$[\mathbf{K}_p]_{N^2 \times N^2} [\mathbf{E}]_{N^2 \times 2N^2} \{\mathbf{x}\}_{2N^2 \times 1} = \{\mathbf{r}\}_{N^2 \times 1} \quad (24)$$

여기서 \mathbf{E} 와 \mathbf{x} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{E} = [\omega/\omega_{\max} \mathbf{I} \quad \mathbf{I}], \quad \mathbf{x} = \{\omega_{\max} \mathbf{c} \quad \mathbf{d}\}^T, \quad (25, 26)$$

또는

$$\mathbf{E} = [- (\omega/\omega_{\max})^2 \mathbf{I} \quad \mathbf{I}], \quad \mathbf{x} = \{\omega_{\max}^2 \mathbf{m} \quad \mathbf{k}\}^T. \quad (27, 28)$$

여기서 \mathbf{I} 는 단위 행렬이며, ω_{\max} 는 측정 혹은 해석 주파수의 최대 각 속도를 의미한다. 만약 변환 행렬 \mathbf{E} 에 ω_{\max} 가 적용되지 않으면 변환 행렬은 주파수가 변함에 따라 ω 또는 ω^2 에 의해 그 요소의 크기가 크게 변하며, 이는 식 (24)의 계산 결과의 정확도를 떨어뜨릴 수 있다⁽¹⁰⁾. 이러한 영향을 줄이기 위해 ω_{\max} 값이 식 (25) ~ (28)에 적용되었다.

행렬 \mathbf{K}_p 는 주파수 응답 함수로부터 계산되므로 주파수의 변화에 따라 그 크기가 크게 달라진다. 특히 공진 주파수 영역의 주파수 응답함수는 그 크기가 매우 크므로 수식 (24)를 최소 자승법으로 계산할 때 그 결과는 공진 주파수 영역의 값에 많은 영향을 받는다. 다시 말해, 비 공진 주파수(off-resonance) 영역의 주파수 응답 함수로 구성된 연립방정식의 계수 행렬 값은 공진 주파수 영역의 계수 항렬 값에 의해 무시될 수 있다. 또한 연립 방정식의 계수 또한 각각의 방정식 별로 그 크기의 차이가 크므로, 이러한 영향을 줄이기 위해 가중 인자(weighting factor)를 주파수와 방정식 별로 각각 적용한다. 본 논문에서는 가중 인자를 \mathbf{K}_p 의 최대 요소 크기가 1이 되도록 하였으며, 적용한 수식은 다음과 같다.

$$[\mathbf{S}(\omega)]_{N^2 \times 2N^2} \{\mathbf{x}\}_{2N^2 \times 1} = \{\mathbf{r}'(\omega)\}_{N^2 \times 1} \quad (29)$$

여기서

$$[\mathbf{S}(\omega)]_{N^2 \times 2N^2} = [\mathbf{W}(\omega)]_{N^2 \times N^2} [\mathbf{K}_p(\omega)]_{N^2 \times N^2} [\mathbf{E}]_{N^2 \times 2N^2}, \quad (30)$$

$$\{\mathbf{r}'(\omega)\}_{N^2 \times 1} = [\mathbf{W}(\omega)]_{N^2 \times N^2} \{\mathbf{r}(\omega)\}_{N^2 \times 1}. \quad (31)$$

여기서 $\mathbf{W}(\omega)$ 는 가중 인자들로 구성된 가중 행렬이다.

측정된 주파수 응답 함수가 n 개의 스펙트럼으로 이루어져 있다면, 수식 (29)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\omega_1) \\ \mathbf{S}(\omega_2) \\ \vdots \\ \mathbf{S}(\omega_n) \end{bmatrix}_{nN^2 \times 2N^2} \{\mathbf{x}\}_{2N^2 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}''(\omega_1) \\ \mathbf{r}''(\omega_2) \\ \vdots \\ \mathbf{r}''(\omega_n) \end{bmatrix}_{nN^2 \times 1} \quad (32)$$

수식 (36)을 간단한 형태로 표현 하면 다음과 같다.

$$[\bar{\mathbf{S}}]_{nN^2 \times 2N^2} \{\mathbf{x}\}_{2N^2 \times 1} = \{\bar{\mathbf{r}}\}_{nN^2 \times 1} \quad (33)$$

최종적으로 유도한 수식 (37)의 해는 다음과 같은 최소 자승법(least squares method)을 이용하여 구할 수 있다.

$$\{x\} = \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{S}(\omega_i)^T \mathbf{S}(\omega_i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{S}(\omega_i)^T \bar{\mathbf{r}}(\omega_i) \right] \quad (34)$$

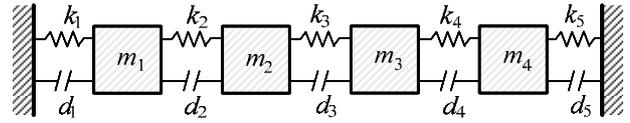


Fig. 1 Four-degree-of-freedom lumped mass system

Table 1. System matrices of 4-d.o.f. system

Mass Matrix				Stiffness Matrix $\mathbf{K} \times 10^7$				Damping Matrix			
150	0	0	0	100	-50	0	0	15	-10	0	0
0	160	0	0	-50	200	-150	0	-10	15	-5	0
0	0	130	0	0	-150	200	-50	0	-5	10	-5
0	0	0	100	0	0	-50	100	0	0	-5	25

4 모의실험 및 실험결과

본 장에서는 제안된 방법으로 구조 파라미터를 예측하기 위해 4 자유도 질량-스프링 시스템과, 축약된 4 자유도 유한 요소(FE) 빔 모델을 이용하여 모의 실험을 수행하였다. 또한, FE 빔 모델과 동일한 실험 모델을 구성하여 최종적으로 제안된 방법을 검증하였다.

Table 2. Comparison of identified structural parameters from FRFs with 10 % random noise.

Proposed method								Previous method							
Estimated matrix				Error (%)				Estimated matrix				Error (%)			
M (kg)															
150.5	-0.0	-0.0	0.0	0.3	0	0	0	149.6	-0.4	-0.8	-0.2	0.2	0	0	0
-0.1	159.2	-0.6	0.1	0	0.4	0	0	-0.7	153.8	0.8	3.5	0	3.8	0	0
-0.0	-0.9	129.2	-0.2	0	0	0.5	0	-0.7	-7.8	130.1	0.5	0	0	0.1	0
0.0	-0.0	-0.2	100.1	0	0	0	0.1	-0.3	-4.1	1.75	99.5	0	0.0	0	0.1
K $\times 10^7$ (Ns/m)															
100.3	-50.1	0.3	-0.0	0.3	0.2	0	0	99.8	-52.6	-1.3	-0.8	0.2	5.2	0	0
-50.0	199.9	-150.2	0.5	0.1	0.1	0.1	0	-49.3	194.7	-144.9	5.2	1.2	2.6	3.4	0
0.2	-150.4	199.5	-50.2	0	0.2	0.2	0.5	-0.3	-157.3	202.2	-52.7	0	4.9	1.0	5.4
-0.0	0.3	-50.3	100.3	0	0	0.7	0.3	-0.3	-4.3	-45.2	99.7	0	0.0	9.5	0.3
D (N/m)															
15.1	-9.9	0.0	-0.0	0.9	0.3	0	0	14.9	-8.5	-0.7	-0.2	0.2	14.8	0	0
-10.1	14.9	-4.9	-0.0	0.4	0.7	0.2	0	-15.8	14.1	-2.5	-0.2	58.1	5.5	48.5	0
0.0	-5.1	10.1	-5.0	0	1.9	1.0	0.1	5.7	-5.5	11.0	-5.6	0	11.6	10.4	12.6
0	-0	-5.1	25.1	0	0	1.1	0.4	-1.2	-1.6	-5.2	24.4	0	0	4.5	2.1

3.1 모의 실험 1

Fig. 1 과 같은 간단한 4 자유도 시스템(4-degree-of-freedom, 4-d.o.f.)을 먼저 고려한다. 이 시스템의 질량, 강성, 감쇠 값들로 구성된 시스템 행렬은 Table 1 과 같다. Table 1 의 시스템 행렬로 만든 주파수 응답함수를 이용하여 구조 파라미터를 예측 하되, 기존의 방법과(chen⁽⁶⁾)과 제안된 방법으로 각각 예측과정을 수행하여 결과값을 비교하였으며, 각각의 계산과정은 앞에서 설명한 과정을 따랐다. 모의 실험에 사용한 주파수 응답함수는 1 Hz ~ 1000 Hz의 주파수 범위를 가지며, 그 분해능은 1 Hz로 설정하였다. 일반적으로 실험에 의해 측정된 주파수 응답함수에는 측정에 의한 노이즈가 포함되어 있으므로, 모의 실험 시스템의 주파수 응답 함수에 임의의 노이즈를 컴퓨터 프로그램화 하여 포함시켰다. 본 모의실험에서는 10 % 임의의 노이즈(random noise)를 사용하였다. 여기서 10 % 노이즈 신호라 함은 실제 주파수 응답함수 값이 1 이라 할 때 0.9 에서 1.1 사이의 임의의 값을 곱해준 것을 의미한다. 주파수 응답 함수는 복소수 값이므로 각각의 실수 및 허수항에 위와 같은 임의의 값을 추가하였다. 노이즈가 포함된 주파수 응답함수를 사용하였을 때 기존의 방법과 제안된 방법에 의해 예측된 구조 파라미터 값들을 Table 2 에 나타냈다.

Table 2 에서 보듯이 제안된 방법에 의해 예측된 질량과 강성 파라미터들은 약 1 % 이내의 오차 값을 가지며 실제 파라미터와 큰 차이를 보이지 않는다. 하지만, 기존의 방법으로 예측한 질량 및 강성 파라미터들은 약 10 % 의 오차를 보임을 확인할 수 있다. 특히 감쇠 파라미터의 경우 기존의 방법은 약 58 % 오차를 보여 그 예측의 신뢰도가 낮으나 제안된 방법으로 예측한 값은 최대 오차 2 % 값을 보이며 높은 신뢰도를 유지함을 확인할 수 있다. 일반적으로 감쇠 파라미터는 예측하기 쉽지 않으나, 본 논문에서 제안된 방법은 감쇠 파라미터의 값을 높은 정확도로 예측할 수 있음 확인할 수 있다. 본 모의 실험을 통해 제안된 방법이 노이즈에 덜 민감하며, 질량 및 강성 파라미터 뿐만 아니라 댐핑 파라미터 또한 정확히 예측함을 확인할 수 있다.

3.2 모의 실험 2

Fig. 2 와 같은 FE 빔 모델의 주파수 응답 함수를 생성한 뒤, 그 주파수 응답함수를 이용하여 구조 파라미터를 각각의 방법으로 예측한다. 앞에서 확인한 모의 실험과 같이 사용된 주파수 응답함수의 주파수 영역은 1 ~ 1000 Hz이며, 그 분해능은 1 Hz 로 설정하였으며, 주파수 응답함수에 포함된 노이즈 레벨은 10 %로 설정하였다. 본 모의

Table 3. Comparison of estimated structural parameters from FRFs with 10 % random noise.

Proposed method				Previous method											
Estimated matrix		Error (%)		Estimated matrix		Error (%)									
M (kg)															
0.157	0.099	-0.028	0.015	0.8	1.6	1.1	5.7	0.139	0.183	-0.142	0.033	12.2	81.4	393.6	123.2
0.100	0.513	-0.017	-0.029	1.0	1.9	16.2	0.6	0.094	0.546	0.022	-0.037	6.3	4.4	204.2	29.7
-0.031	-0.017	0.511	0.100	9.0	16.5	2.3	0.9	-0.024	-0.059	0.539	0.102	15.7	177.2	3.0	0.5
0.014	-0.029	0.098	0.158	0.9	2.4	2.3	0.5	0.032	-0.123	0.229	0.137	121.7	327.7	127.1	13.8
K ×10⁶ (Ns/m)															
1.207	-2.998	2.058	-0.267	0.8	0.7	1.0	3.3	1.121	-2.786	1.343	-0.150	7.9	7.8	35.4	45.2
-2.971	9.023	-8.098	2.054	1.6	1.8	1.8	1.2	-2.978	8.986	-6.166	1.711	1.4	2.2	25.2	17.7
2.014	-8.051	8.968	-2.983	3.1	2.4	2.4	1.2	1.958	-7.671	6.945	-2.583	5.8	7.0	24.4	14.5
-0.267	2.062	-2.998	1.218	2.9	0.8	0.7	0.1	-0.998	1.781	-2.350	1.089	27.4	14.3	22.2	10.5
D (N/m)															
137.1	-292.6	204.5	-26.5	0.3	0.1	0.2	2.0	125.8	-281.8	195.5	-35.7	8.5	3.5	4.6	37.1
-290.6	969.3	-820.4	206.0	0.5	0.2	0.8	0.4	-292.5	988.6	-803.5	212.6	0.1	1.7	2.8	3.6
205.3	-831.2	971.8	-295.3	0.1	0.4	0.0	1.1	208.2	-818.6	977.7	-286.4	1.5	1.0	0.6	1.9
-24.7	202.4	-287.9	136.9	4.9	1.3	1.4	0.4	-16.4	179.3	-288.5	137.8	36.8	12.5	1.2	0.2

실험에서 사용한 빔의 탄성계수 E 와 밀도 ρ 는 각각 $210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 7800 kg/m^3 이다. 이 FE 모델과 동일한 실험 모델과의 비교를 위해 빔 모델의 질량과 강성 행렬은 축약 방법(guyan⁽¹²⁾)을 이용하여 다음과 같이 구성하였다.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.159 & 0.101 & -0.028 & 0.014 \\ 0.101 & 0.523 & -0.021 & -0.028 \\ -0.028 & -0.021 & 0.523 & 0.101 \\ 0.014 & -0.028 & 0.101 & 0.159 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.217 & -3.022 & 2.080 & -0.275 \\ -3.022 & 9.193 & -8.251 & 2.080 \\ 2.080 & -8.251 & 9.193 & -3.022 \\ -0.275 & 2.080 & -3.022 & 1.217 \end{bmatrix} \times 10^6.$$

빔 모델의 감쇠 행렬은 질량과 강성 행렬에 비례하도록 구성하였으며 그 값은 다음과 같다.

$$\mathbf{D} = \mathbf{K} \times 0.0001 + \mathbf{M} \times 100$$

본 모의 실험 또한 기존의 방법과 제안된 방법으로 구조 파라미터를 예측하였으며, 그 값을 Table 3에 나타내었다.

Table 3에서 보는 바와 같이, 제안된 방법으로 예측된 구조 파라미터는 값은 높은 정확도를 가짐을 확인할 수 있다. 여기서 질량 파라미터는 다른

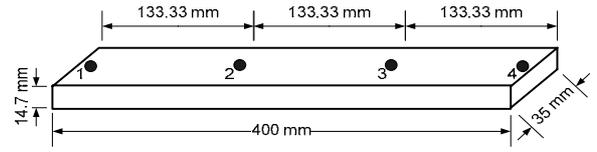


Fig. 2. Finite element beam structure

구조 파라미터 값에 비해 그 크기가 매우 작으므로, 예측된 값의 오차가 앞에서 살펴본 예에 비해 높다. 그러나 제안된 방법에 의해 예측된 질량 파라미터의 경우 그 오차율이 약 16 % 이내로 그 값이 기존의 방법의 오차에 비해 매우 낮음을 확인할 수 있다.

3.3 실험

앞의 모의 실험에서 살펴본 FE 빔과 같은 실제 빔 구조물을 사용하여 실험을 수행하였다. 빔 구조물을 고무줄로 지지하여 자유단 조건을 유지하도록 만들었으며 주파수 응답함수를 측정하기 위해 ENDEVCO 2301-10을 사용하여 구조물을 가진 하였으며, PCB 352C22 단축 가속도계를 사용하여 그 응답을 받아들였다. 이때 사용된 주파수 분석기는 LMS 사의 CADA-X 와 test.Lab 이다. 측정된 주파수 응답함수는 앞에서 살펴본 모의 실험과 같이 주파수 범위는 1 Hz ~ 1000 Hz, 분해능

Table 4. Comparison of estimated structural parameters from measured FRFs.

Proposed method								Previous method							
Estimated matrix		Error (%)		Estimated matrix		Error (%)									
\mathbf{M} (kg)															
0.189	0.115	-0.039	0.015	19.3	13.9	38.3	3.7	0.182	0.122	-0.040	0.008	14.8	20.5	39.5	39.9
0.109	0.548	-0.033	-0.035	7.8	4.8	54.6	21.5	0.095	0.515	0.023	-0.068	5.9	1.6	208.3	137.7
-0.035	-0.027	0.523	0.104	23.4	27.7	0.0	2.9	-0.020	-0.026	0.503	0.119	27.8	22.5	3.9	18.1
0.014	-0.038	0.105	0.177	3.8	31.8	4.5	11.6	0.022	-0.045	0.114	0.177	51.1	56.0	12.9	11.8
$\mathbf{K} \times 10^6$ (Ns/m)															
1.358	-2.993	2.014	-0.208	11.6	0.9	3.1	24.3	1.301	-2.705	1.822	-0.157	6.9	10.5	12.5	42.9
-3.197	9.244	-8.404	2.173	5.2	0.5	1.8	4.4	-3.511	8.559	-7.015	1.372	16.1	6.8	14.9	34.0
2.158	-8.217	9.274	-3.176	3.7	0.4	0.8	5.0	2.501	-8.086	8.439	-2.666	20.2	2.0	8.2	11.7
-0.242	2.077	-3.122	1.377	11.9	0.1	3.3	13.1	-0.159	1.807	-2.769	1.268	42.2	13.1	8.3	4.2
$\mathbf{D} \times 10^3$ (N/m)															
24.6	16.2	-25.8	-7.9					13.8	41.6	-31.5	7.0				
20.9	-288.8	273.9	-61.9					39.0	-205.5	136.3	-18.7				
-22.6	250.6	-124.8	11.2					-55.7	208.3	-88.3	9.6				
-4.5	-53.2	9.2	10.4					6.5	-73.1	38.8	34.2				

은 1 Hz 로 설정하였으며, 측정된 주파수 응답함수는 총 16 개이다. 측정된 주파수 응답함수로부터 예측된 구조 파라미터값은 Table 4 와 같으며 그 값은 모의 실험 2 에서 살펴본 FE 에 의한 파라미터와 비교하였다. 실제 빔 구조물의 감쇠 파라미터는 확인할 수 없으므로, 본 실험에서는 질량과 강성 파라미터 만을 비교하였다. 제안된 방법에 의해 예측된 질량과 강성 파라미터 값은 FE 빔의 그것과 비교해 54 %, 24 % 미만의 최대 오차값을 보이나, 기존의 방법을 사용하였을 경우 최대 오차는 질량의 경우 208 %, 강성의 경우 42 % 로 높은 값을 가짐을 확인할 수 있다. 실험의 경우 제안된 방법의 예측 정확도 또한 기존의 방법에 비해 높음을 확인할 수 있다. 실험에 의해 예측된 값의 오차율이 높은 이유는 비교되는 질량 및 강성행렬이 정측약되는 과정에서 계산 오차가 포함되었기 때문이다.

4. 결론

구조 파라미터를 예측함에 있어 기존의 방법을 사용할 경우 역행렬 계산식과 가중 되지 않은 식을 사용함으로써 예측된 값의 오차율이 매우 높다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 본 논문에서는 가중 행렬을 사용하여 역행렬 계산 과정을 줄이고, 계산 과정에서 에러를 유발시킬 수 있는 행렬을 변형시켜, 구조 파라미터 예측 과정 중 발생하는 오차를 크게 줄였다. 이러한 결과는 앞에서 살펴본 두 개의 모의실험과 실험을 통하여 검증되었다. 실제 주파수 응답함수를 이용하여 구조 파라미터를 예측할 경우 주파수 응답함수의 값은 주파수 별로 노이즈에 의한 영향이 다르므로 최소 자승법을 이용하여 계산할 경우 오차가 발생할 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해 실험 노이즈가 적은 주파수를 선택하여 구조 파라미터를 예측하는 노이즈 저감에 대한 연구가 더 필요하다.

후 기

이 연구는 BK21 기계 사업단, 서울대학교 마이크로 열시스템 연구센터의 지원으로 수행되었습니다.

- (1) Beliveau, J., 1976, "Identification of Viscous Damping in Structures from Modal Information", American Society of Mechanical Engineers Applied Mechanics. Vol. 43, pp. 335-338.
- (2) Burak, S. and Ram. Y. M., 2001, "The Construction of Physical Parameters from Modal Data", Mechanical System and Signal Processing. Vol. 15, No. 1, pp. 3-10.
- (3) Minas, C. and Inman, D. J., 1991, "Identification of Nonproportional Damping Matrix from Incomplete Modal Information", American Society of Mechanical Engineers Journal of Vibration and Acoustics. Vol. 113, pp. 219-224.
- (4) Fritzen, C. P., 1986, "Identification of Mass, Damping, and Stiffness Matrices of Mechanical System", American Society of Mechanical Engineers Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design. Vol. 108, pp. 9-16.
- (5) Wang, J. H., 1988, "Mechanical Parameters Identification with Special Consideration of Noise Effects", Journal of Sound and Vibration. Vol. 125, No. 1, pp. 151-167.
- (6) Chen, S. Y., Ju, M. S. and Tsuei, Y. G., 1995, "Estimation of Mass, Stiffness and Damping Matrices from Frequency Response Functions", American Society of Mechanical Engineers Journal of Vibration and Acoustics. Vol. 118, pp. 78-82.
- (7) Lee, J. H. and Kim, J., 2001, "Identification of Damping Matrices from Measured Frequency Response Functions", Journal of Sound and Vibration. Vol. 240, No. 3, pp. 545-565.
- (8) Lee, J. H. and Kim, J., 2001, "Development and Validation of a New Experimental Method to Identify Damping Matrices of a Dynamic System", Journal of Sound and Vibration. Vol. 246, No. 3, pp. 505-524.
- (9) Lancaster, P. and Tismenetsky, M., 1985, The Theory of Matrices, 2nd Edition, Academic Press, New York.
- (10) Ren, Y. and Beards, C. F., 1995, "Identification of Joint Properties of a Structure Using FRF Data, Journal of Sound and Vibration. Vol. 186, No. 4, pp. 567-587.
- (12) Guyan, R. J., 1965, "Reduction of Stiffness and Mass Matrix", AIAA Journal. Vol. 3, pp. 380.