감쇠를 포함한 유한요소모형의 개선

Updating of Finite Element Models Including Damping

박오철† ·이건명*

O-Cheol Park and Gun-Myung Lee

Key Words : Finite Element Analysis(유한요소해석), Model Updating(모형 개선), Frequency Response Function(주파수 응답 함수), Optimization Technique(최적화 기법)

ABSTRACT

Finite element model updating has been performed using an optimization technique in the paper. The objective function consists of natural frequencies, modal assurance criterion values, and bandwidths of modes, which are obtained from finite element analysis and experiment. Young's modulus and damping coefficient of the material are selected as design variables whose values are modified to make the objective function as small as possible. To consider the loading effect of an accelerometer, its mass and moment of inertia are added to design variables. This model updating method has been applied to a cantilever beam, and experimental data are measured by modal test.

1. 서 론

최근에 구조물의 유한요소해석에 관한 연구가 항공우주, 해양, 토목공학 등의 분야에서 활발히 진행되고 있고, 자동차, 항공기, 토목 구조물 및 공작기계 등의 기계 구조물이 다양화, 경량화 되면서 동적특성 개선을 요구하는 사례가 급속하게 늘어가고 있다.

구조물이나 기계장치를 설계할 때 외부 가진력에 대한 구조물과 기계의 정확한 동적응답특성을 예측해야 한다. 만약 구조물이나 기계가 복잡한 기하하적 형상과 재료의 성질을 가질 경우 이들의 동적응답특성을 구하는 것은 쉽지 않다. 그래서 적절한 근사해를 구하기 위한 유한요소해석을 사용하여 동적특성을 예측하게 되는데 유한요소해석에서 얻어진 이론적 결과는 실험으로 측정된 동적특성과 완전히 일치하지는 않는다. 이 때문에 정확한 동적응답을 알아내기 위하여 유한요소 결과를 바로 사용하지 않고 측정된 데이터에 유한요소모형(Finite Element Model)을 일치시킨 모형개선(Model Updating) 이라는 방법을 사용한다.

유한요소모형을 실제 실험 데이터에 일치시킬 수 있다면 개선된 유한요소모형으로 하중의 크기가 변화하거나 하는 등의 다른 조건의 상태에 놓일 때와 설계 변경시의 동적특성을 보다 정확히 예측할 수 있게 되어 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있게 된다.

최근에는 측정방법과 분석 기술의 발전으로 진동데이터를 이용하는 방법에 대한 연구가 많이 이루어지고 있다. 진동데이터를 사용하여 유한요소모형을 개선하는 방법에는 모드 영역의 방법[1-5]과 주파수응답함수 (Frequency Response Function)를 사용한 응답영역의 방법[6-7] 등이 있다.

FRF 를 사용하는 방법 중에 Lin[8]과 Imregun[9]등에 의하여 개발된 방법이 있는데, 이 방법에서는 실험에서 얻어진 FRF 와 유한요소모형으로부터 예측한 FRF 와의 차이를 계산하여 각 유한요소 질량, 강성행렬의 모든 항을 일정한 비율로 변화시킴으로써 측정한 FRF 와 유한요소모형으로부터 예측한 FRF 가 일치하도록 하고 있다.

본 논문에서는 외팔보의 유한요소모형 개선을 위하여 최적화 기법을 적용하였다. 목적함수는 유한요소해석과 모드시험으로부터 구한 고유진동수, MAC(Modal Assurance Criterion) 값, 그리고 각 모드의 대역폭 차이로 나타내었다. 이를 위해 설계변수는 영계수, 가속도계의 집중질량과 질량관성모멘트, 그리고 감쇠계수로 하였다.

2. 유한요소해석

일반적으로 Fig. 1 과 같은 보 요소[10]의 경우

† 교신저자; 경상대학교 기계공학과 대학원
E-mail : maxchel@hanmail.net
Tel : (055) 751-5313, Fax : (055) 757-5622

* 경상대학교 기계항공공학부

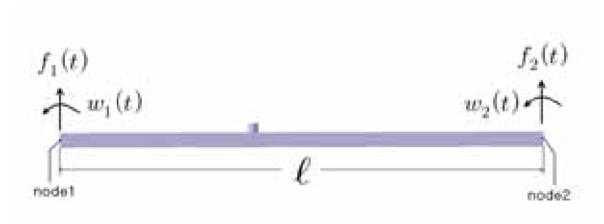

Fig. 1. Beam element.

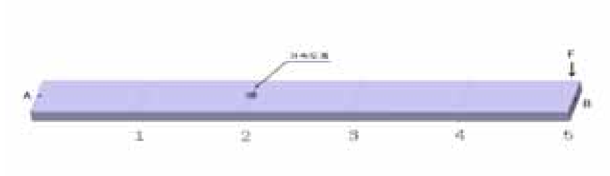

Fig. 2. Geometry of cantilever beam with 5 elements.

각각의 절점에 대하여 병진변위 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 와 회전변위 $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ 총 4 개의 자유도를 가지게 된다. 이러한 보 요소에 대한 강성행렬 $[K_e]$과 질량행렬 $[M_e]$은 식 (1) 과 식 (2)와 같이 나타내어지며 이것을 이용하여 여러 개의 요소로 이루어진 시스템에 대해서도 각각의 강성행렬과 질량행렬을 구할 수 있게 된다. 여기서 행렬의 결합은 같은 절점에 대응하는 행렬의 요소끼리 더하고 나머지 부분은 그대로 두게 되며 요소가 없는 부분은 0 으로 둔다.

$$[K_e]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}12 & 6l & -12 & 6l\\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2\\ -12 & -6l & 12 & -6l\\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2\end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[M_e]=\frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix}156 & 22l & 54 & -13l\\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2\\ 54 & 13l & 156 & -22l\\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2\end{bmatrix} \quad (2)$$

여기에서 E 는 외팔보의 탄성계수, I 는 단면 관성모멘트, A 는 단면적, ρ 는 밀도 그리고 l 은 요소 하나의 길이이다.

$$[K]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}24 & 0 & -12 & 6l\\ 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2\\ -12 & -6l & 12 & -6l\\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2\end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[M]=\frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix}312 & 0 & 54 & -13l\\ 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2\\ 54 & 13l & 156 & -22l\\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2\end{bmatrix} \quad (4)$$

Fig. 2 의 외팔보를 2 개의 요소로 나눌 경우 A 점이 고정되어 있으므로 이에 대한 강성 및 질량행렬의 첫 번째와 두 번째 행과 열을 제거하면 식 (3)과 (4)로 나타낼 수 있다.

유한요소모형의 개선을 위해 다섯 개의 요소로 나누어진 외팔보를 대상시스템으로 하여 이 시스템의 질량행렬, 강성행렬을 구하고 이로부터 FRF 행렬을 구하였다. 시뮬레이션에 사용된 외팔보의 제원은 Table 1 에 나타나있다.

외팔보를 다섯 개의 요소로 나누었을 때 병진변위와 회전변위 각각 다섯 개씩 모두 10 자유도가 생성된다. 유한요소모형의 FRF 는 해석적으로 쉽게 구해질 수 있다. 시뮬레이션을 위해 주파수 범위는 0Hz~800Hz 로 설정하였고, 주파수 간격 Δf 는 2Hz 로 정하였다.

ω 값과 외팔보의 질량, 강성행렬을 식 (5)에 적용시켜 receptance 형태의 FRF 를 찾아낼 수 있다.

$$[H_f]=([K]-\omega^2[M])^{-1} \quad (5)$$

여기에서 $[H_f]$는 FRF 응답모델을 구성하는 행렬이며, 식 (5)를 통해 구해진 값에 $-\omega^2$ 을 곱하여 inertance 형태로 변환하였다. 이 유한요소해석을 통해 얻어진 H_{15} (하첨자 1 과 5 는 각각 응답점과 가진점을 의미함)에 대한 FRF 의 크기와 위상각을 표시한 그래프가 Fig. 3 에 나타나있다. 그리고 이 때의 고유진동수를 Table 2 에 나타내었으며, 첫 번째 모드형을 Fig. 4 에 나타내었다.

Table. 1. Properties of the cantilever beam.

length(l)	0.27m
width(b)	0.034m
height(h)	0.001476m
Young's modulus(E)	$1.9\times10^{11}N/m^2$
density(ρ)	$7850kg/m^3$

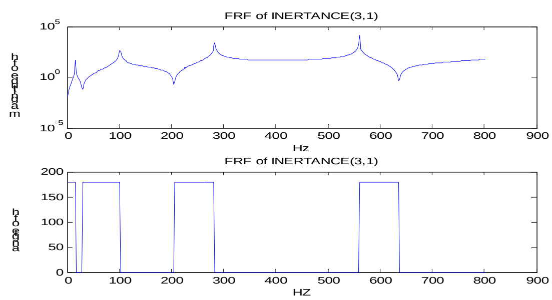

Fig. 3. FRF H_{15} obtained by FEA.

Table. 2. Natural Frequencies obtained by FEA.

Mode	Natural Frequency (Hz)
1	16
2	100
3	284
4	560

Mode	Experiment (Hz)	FEA (Hz)
1	18	16
2	100	97
6	248	281
12	548	546

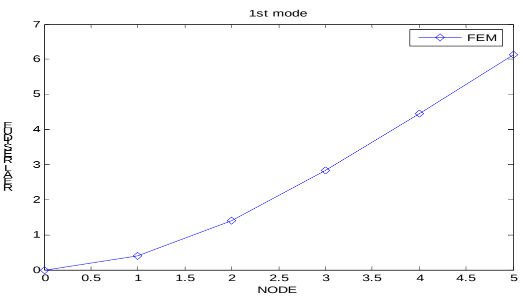

Fig. 4. The first mode shape from FEA.

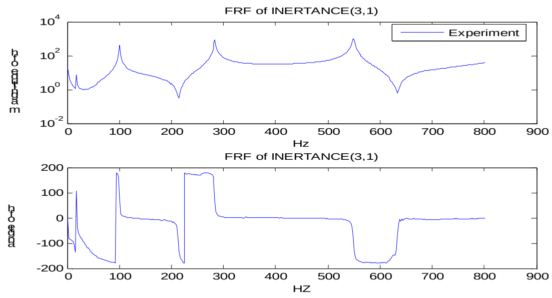

Fig. 5. FRF H_{15} obtained by modal test.

3. 모드시험

외팔보의 실제 동적응답특성을 알아내기 위해 FFT 분석기(HP 35670A)를 이용하여 Fig. 2 와 같이 5개의 노드로 구성된 외팔보를 A점에서 고정시킨 후 가속도계를 설치하여 실험을 수행하였다.

이 실험에서 측정범위는 유한요소해석과 동일한 0Hz~800Hz, 데이터 사이의 주파수 간격은 2Hz 로 설정하였고 외팔보의 재질은 steel 이며 가속도계(PCB 352C66)는 Fig 2 에서와 같이 설치하였다. 충격해머(KISTLER 9724A2000)에 의한 힘은 B 점에서 F 방향으로 가하였고 FRF 는 inertance 형태로 측정하였다.

Table. 3. Natural Frequencies obtained by modal test.

Mode	Natural Frequency (Hz)
1	18
2	100
3	284
4	548

Table. 4. Result of modal analysis.

Mode	Natural Frequency (Hz)	Damping Ratio (%)	Real Residue
1	16.298	1.6709	0.2943×10^{-2}
2	97.849	0.4905	0.6860×10^{-2}
3	105.823	1.7209	0.3573×10^{-2}
4	242.024	7.4783	0.1497×10^{-3}
5	267.675	7.3719	-0.2928×10^{-3}
6	281.414	0.4161	0.4121×10^{-2}
7	338.328	1.7790	0.2670×10^{-4}
8	392.835	5.4655	0.9371×10^{-4}
9	453.006	28.3369	-0.8418×10^{-3}
10	450.055	2.2506	0.2179×10^{-4}
11	540.238	3.9999	-0.1588×10^{-3}
12	546.624	0.3168	-0.1887×10^{-2}

Table. 5. Comparison of natural frequencies obtained by FEA and modal test.

실험을 통해 얻어진 FRF 를 그래프로 나타낸 것이 Fig. 5 에 나타나 있다. 이 그래프는 H_{15} 를 나타낸 것이며 위의 그래프는 크기, 아래 그래프는 위상을 나타낸다.

실험체인 외팔보의 고유진동수, 감쇠비 그리고 모드형을 구하기 위해 실험에서 얻은 데이터를 바탕으로 모드해석을 수행하였다. 모드해석에 사용된 방법은 Complex Exponential Method(11)이다. 고유진동수 범위인 18Hz~548Hz 전체의 주파수 범위를 해석하기 위해 모드해석 범위는 6Hz~300Hz 와 80Hz~580Hz 2번으로 나누어서 해석하였고 각각의 데이터 개수는 256 개, 자유도는 12 로 설정하였다. 이 때 각각의 고유진동수를 나타낸 것이 Table 3 에 나타나 있으며, Table 4 는 모드해석으로부터 구한 고유진동수, 감쇠비 그리고 Real Residue 를 첫 번째 노드에 대해 나타낸 것이다.

이 모드해석을 통해 찾아낸 고유진동수를 실험값과 비교한 것이 Table 5 에 나타나 있다. 이를 통해 모드해석 결과가 실제 실험 데이터와 비교하였을 때 주파수 간격 1 개 정도의 차이만 보이는 높은 일치도를 가지고 있음을 알 수 있었다.

4 유한요소모형의 개선

4.1 감쇠가 포함되지 않은 경우

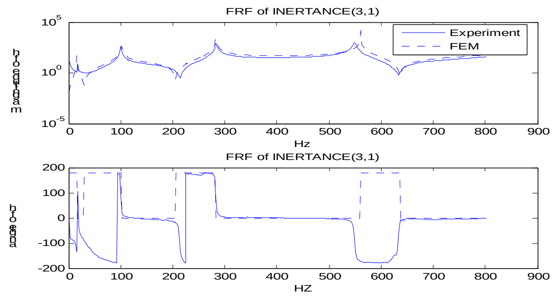

Fig. 6. Comparison of FRFs obtained by FEA and modal test before model updating.

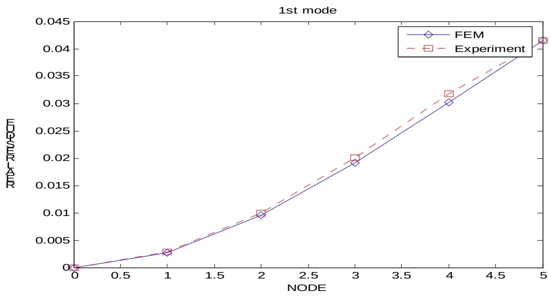

Fig. 7. Comparison of mode shape obtained by FEA and modal test before model updating.

Table 1 에서 주어진 제원을 기본으로 하여 첫 번째 노드에서 유한요소해석을 수행한 결과와 실험을 통해 구한 FRF 그래프를 비교한 것이 Fig. 6 에 나타나있다. 여기에서 2 번째 고유진동수에서의 피크와 주위 응답특성은 유사하게 나타나지만 나머지 부분에서는 피크점과 주위 응답특성이 잘 맞지 않음을 확인할 수 있었다. 그리고 이때의 첫 번째 모드형을 비교한 것이 Fig. 7 에 나타나있는데 고정된 영점과 끝단에서의 모드형은 일치하지만 나머지 부분에서의 모드형이 약간씩 서로 차이를 보이고 있음을 알 수 있었다.

이를 개선시키기 위하여 즉, 실험으로 구한 외팔보의 동적응답특성과 유한요소해석을 통한 동적응답특성을 만족할 수 있는 범위 내에서 서로 일치시키기 위해 몇 가지 설계변수를 변화시켜 목적함수를 최소화하는 최적화 기법을 사용하였다.

우선 고유진동수와 MAC 값을 목적함수로 설정하였고, 이를 최소화 하는 설계변수로는 영계수, 가속도계의 집중질량과 질량관성모멘트를 사용하였다.

$$F_o = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\omega_{ai}-\omega_{ei}}{\omega_{ei}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{4}\left(1-MAC_i\right) \qquad (6)$$

식 (6)에서 F_o 는 목적함수, ω_a 는 유한요소해석을 통해 구해진 고유진동수, ω_e 는 실험을 통해 구한 고유진동수, MAC 는 MAC 값, i 는 각 모드를 의미하며 MAC 값은 식 (7)과 같이 구해질 수 있다.

$$MAC\,(p,x) = \frac{\left|\sum_{j=1}^{n}(\phi_x)_j(\phi_p)_j^{\,*}\right|^2}{(\sum_{j=1}^{n}(\phi_x)_j(\phi_x)_j^{\,*})(\sum_{j=1}^{n}(\phi_p)_j(\phi_p)_j^{\,*})} \qquad (7)$$

여기에서 ϕ_x 는 실험으로 구한 모드형(mode shape)이며 ϕ_p 는 유한요소해석을 통해 구한 모드형을 의미한다.

식 (6)을 Matlab 의 Optimization Toolbox 프로그램에 적용시켜 주어진 목적함수를 최소로 만드는 설계변수들 값을 찾아냈고 이를 Table 6 에 나타내었다. 여기에서 영계수와 밀도는 Table 1 과 비교했을 때 약간 변화하였고, 가속도계의 집중질량과 질량관성모멘트는 목적함수를 위해 추가된 것이다. 최초 측정된 가속도계의 질량은 0.0021kg 이었고 변화된 설계변수에서의 가속도계의 질량은 0.00457kg 이었다. 이러한 차이는

Table. 6. Design variables at the optimum point.

Young's modulus(E)	$1.965\times10^{11}N/m^2$
density(ρ)	$7.9826\times10^{3}kg/m^3$
mass moments of inertia(J)	$6.905\times10^{-7}kgm^2$
consistent mass of accelerometer(m)	$0.00457kg$

Table. 7. Objective function for design variable.

Optimization Function for Design variable			
Young's modulus (×190E9)	consistent mass of accelerometer (×0.0021)	mass moments of inertia (×4.4447E-8)	Optimization Value
1.0254	1.9876	1.0003	0.0059
1.0343	2.1752	11.5675	0.0057
1.0256	1.9907	1.2605	0.0059
1.0256	1.9927	1.3056	0.0059
1.0250	1.9791	0.5867	0.0059
1.0246	1.9719	0.0850	0.0059

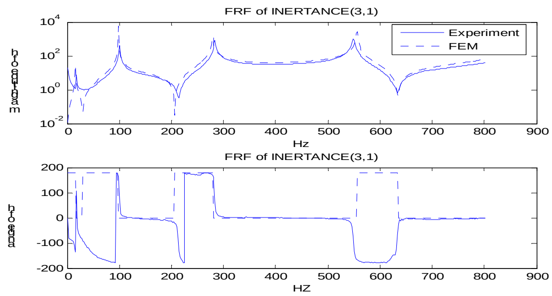

Fig. 8. Comparison of FRFs obtained by FEA and modal test after model updating.

가속도계에 연결된 와이어의 질량이 가속도계의 집중질량에 같이 포함되었기 때문으로 볼 수 있다.

Table 6 의 설계변수 값을 적용시켰을 때 목적함수 F_o 는 0.0057 으로 최소가 되었으며 사용된 최적화 프로그램의 시작점을 변화시켰을 때의 최적화 결과를 Table 7 에 나타내었다. 이 결과에서 살펴보면 시작점을 서로 다르게 하여도 최적화 결과 값이 0.0057~0.0059 사이에 존재하여 그 차이가 크지 않음을 알 수 있는데 이것은 최적화 과정이 성공적으로 이루어 졌음을 의미한다.

첫 번째 노드에 대해 Table 6 의 데이터를 유한요소해석에 적용시켜 구한 FRF 와 실험을 통한 FRF 의 그래프를 비교한 것이 Fig. 8 에 나타나 있다. 여기에서 두 그래프는 모형개선을 하기 전의 Fig. 7 의 그래프에 비해 정확도가 개선되었음을 확인할 수 있었다. 그러나 감쇠를 고려하지 않았기 때문에 피크의 크기는 많은 차이를 보이고 있음을 알 수 있다.

4.2 감쇠가 포함된 경우

실제 우리가 사용하는 모든 기계나 구조물은 감쇠를 가지고 있으며 이로 인해 공진점에서의 진폭이 감소하게 된다. Fig. 8 에서 전체적인 그래프의 일치도는 비교적 정확했으나 피크점에서 큰 차이를 보이는 것을 확인하였는데 이것은 모드시험과는 달리 유한요소해석의 경우 감쇠가 적용되지 않았기 때문이다.

감쇠가 충분히 작은 경우 $(\zeta < 0.05)$ 에 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} \cong \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta} = Q \qquad (8)$$

공진에서의 진폭비는 계의 Q 계수(Q factor) 또는 양호도(quality factor)라 하는데, 이는 공진에서의 진폭을 가능한 크게 하려는 라디오 동조회로의 예외 비슷하다. 증폭률이 $Q/\sqrt{2}$ 로 떨어지는 점 R_1 과 R_2 는 반동력점(half power points)이라고 한다. 왜냐하면 주어진 진동수에 조화적으로 응답하는 감쇠기에 흡수되는 동력(ΔW)은 진폭(X)의 제곱에 반비례하기 때문이다.

$$\Delta W = \pi c \omega X^2 \qquad (9)$$

반동력점 R_1 과 R_2 에 해당하는 진동수의 차는 계의 대역폭(bandwidth)이라 불리운다.

그렇기 때문에 상대적으로 높게 나타난 피크점을 줄이기 위해 대역폭을 목적함수에 추가하였고, 감쇠계수를 설계변수에 추가하였다. 이 때의 목적함수 F_o 는 다음과 같이 나타내었다.

$$F_o = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\omega_{ai}-\omega_{ei}}{\omega_{ei}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{4}\left(1-MAC_i\right) + \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{bw_{ai}-bw_{ei}}{bw_{ei}}\right)^2 \qquad (10)$$

식 (10)에서 bw_a 는 유한요소해석을 통해 구해진 대역폭, bw_e 는 실험을 통해서 구한 대역폭 값을 의미한다.

시스템의 감쇠행렬은 식 (11)과 같이 나타내고, FRF 행렬은 식 (12)로부터 구한다.

$$[H_b] = \beta[K] \qquad (11)$$

$$[H_f] = [K + iH_b - \omega^2 M]^{-1} \qquad (12)$$

여기에서 $[K]$ 는 강성행렬, $[M]$ 은 질량행렬, β 는 감쇠계수를 나타낸다.

고유진동수, MAC 값 그리고 대역폭을 목적함수로 하고 이를 최소화 하는 설계변수로 영계수, 가속도계의 집중질량과 질량관성모멘트 그리고 감쇠계수를 적용시켜 모형개선을 수행한 결과가 Fig. 9 에 나타나 있다. 이것 역시 첫 번째 절점에 대한 것이며, 각각의 피크점의 크기가 실제 실험

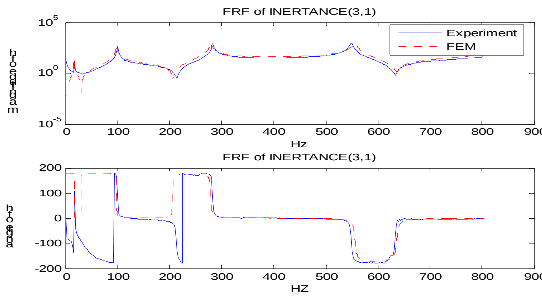

Fig. 9. Comparison of FRFs obtained by FEA and modal test when damping is considered.

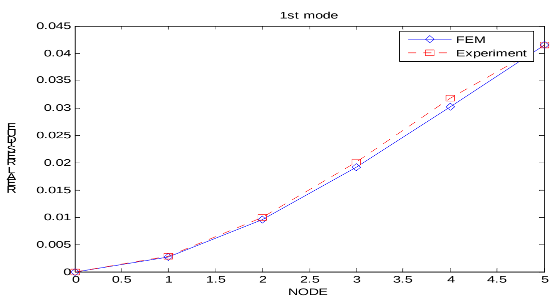

Fig. 10. Comparison of mode shape obtained by FEA and modal test when damping is considered.

데이터와 큰 차이가 없고 전체적인 FRF 그래프도 거의 일치하고 있음을 알 수 있다. 개선된 유한요소해석 데이터를 이용하여 첫 번째 모드형을 구해 비교한 것이 Fig. 10 에 나와 있으며 개선되기 전과 비교하였을 때 크게 차이가 나지 않음을 확인 하였다. 이것은 감쇠계수가 모드형에는 크게 영향을 미치지 않는 것으로 해석할 수 있다.

결 론

본 논문은 유한요소모형의 개선을 위해 FRF 데이터를 이용하여 실제 시스템과 시뮬레이션 시스템을 비교 하였다. 목적함수를 고유진동수, MAC 값 그리고 대역폭으로 하고 이에 따른 설계변수들인 영계수, 가속도계의 집중질량과 질량관성모멘트 그리고 감쇠계수를 적용시켜 Matlab 의 Optimization Toolbox 프로그램을 통해 주어진 목적함수를 최소로 만드는 설계변수들 값을 찾아내었다. 이 결과 모드해석과 유한요소해석의 두 FRF 는 목적함수를 최소로 하는 설계변수들을 적용시켰을 때 그렇지 않았을 때보다 더 정확하게 일치하는 것을 확인할 수 있었다. 그러나 모드형의 경우 모델 개선 전과 후의 비교 그래프가 거의 변화하지 않았는데 이는 설계변수들이 FRF 에는 영향을 미치지만 모드형에는 거의 영향을 미치지 않다는 것으로 해석할 수 있다.

이 연구를 통해 외팔보에 유한요소해석과 모델개선을 적용시켜 동적응답특성이 실험과 일치하는 유한요소해석 결과를 얻을 수 있었으며, 이를 적용하여 복잡한 구조물이나 실험체에 대해서도 보다 정확한 동적응답특성을 알아 낼 수 있을 것으로 생각한다.

후 기

본 연구는 2 단계 BK21 사업의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Berman, A. and Nagy, E. J., 1983, “Improvement of a Large Analytical Model Using Test Data”, AIAA Journal, vol. 21, No. 8, pp.1168~1173.

(2) Baruch, M., 1984, “Methods of Reference Basis for Identification of Linear Dynamic Structures,” AIAA Journal, vol. 22, No.4, pp.561~564.

(3) O`Callahan, J. C. and Leung, R. K., 1985, “Optimization of mass and Stiffness Matrices Using a Generalized Inverse Technique Using the Measured Models,” Proceedings of the International Modal Analysis Conference, pp. 75~79.

(4) Imregun, M., Ewins, D. J., Hagiwara, I. and Ichikawa, T., 1994, “A Comparison of Sensitivity and Response Function Based Updating Techniques,” Proceedings of the International Modal Analysis Conference, pp. 1390~1400.

(5) 장경진, 박영필, 2000, “일반화 자유경계 모드감도법을 이용한 차제구조물의 모델개선”, 대한기계학회논문집 A 권, 제 24 권, 제 5 호, pp. 1133~1145.

(6) Friswell, M. I. and Penny, J. E. T., 1992, “The Effect of Close or Repeated Eigenvalues on the Updating of Model Parameters from FRF Data,” Journal of Vibration and Acoustics, vol. 114, pp. 514~520.

(7) Mottershead, J. E., 1998, “On the Zeros of Structural Frequency Response Functions and Their Application to Model Assessment and Updating,” Proceedings of the International Modal Analysis Conference, pp. 500~503.

(8) Lin, R. M. and Ewins, D. J., 1994, “Analytical Model Improvement Using Frequency Response Functions,” Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 8, No.4, pp. 437~458.

(9) Imregun, M., Visser, W. J. and Ewins, D. J., 1995, “Finite Element Model Updating Using Frequency Response Function Data – I. Theory and Initial Investigation,” Mechanical Systems and Signal Proxessing, vol. 9, No. 2, pp. 187~202.

(10) Rao, S.S., 2004, 4th Mechnacal Vibrations, Pearson Education, Inc.,pp. 862~881.

(11) Ewins, D. J., Modal Testing : Theory and Practice, RESEARCH STUDIES PRESS LTD., pp. 180~186.