

# 동적모드 AFM 마이크로캔틸레버의 적합직교모드 해석

## Proper Orthogonal Mode Analysis of AFM Microcantilevers in Dynamic Mode

조 흥 모\*· 이 수 일†  
Hong Mo Cho and Soo Il Lee

**Key Words:** Proper Orthogonal Mode(적합직교모드), AFM(원자현미경), Microcantilever(마이크로캔틸레버)

### ABSTRACT

Proper orthogonal decomposition (POD) is a method for extracting bases for modal decomposition from the ensemble of dynamic signals. Using the POD method, we analyzed the proper orthogonal modes (POMs) of AFM microcantilevers in dynamic mode operations such as Tapping Mode. The POMs and POVs (proper orthogonal values) were computed through MATLAB simulation for the 5-mode model of the microcantilever. We found that the POV portion of the higher POMs of the tapping microcantilever slightly increased in comparison with no tapping. This implies that the modal energy in the fundamental mode can be transferred to the higher modes during tapping.

## 1. 서 론

적합직교모드(POM: proper orthogonal mode)는 큰 자유도계나 여러가지 복잡한 물리 현상이 연성된 계의 해석에서 주된 요소(principal component)를 효과적으로 추출할 수 있게 해 주는 방법으로 최근 일반적인 구조시스템 뿐 아니라 AFM 등 미소시스템 등과 관련한 응용사례가 보고되고 있다.[1-3] Aziz 등[2]은 캔틸레버의 끝단에 작용하는 충격에 의해 발생하는 복잡한 진동 현상을 몇 개의 POD 모드로 해석한 결과를 보여주고 있으며, 또 Li 등[3]은 AFM 프로브에 부착된 복잡한 고분자의 진동 특성을 POM 으로부터 동정(identification)하는 연구가 진행되었다.

본 연구에서는 AFM 마이크로캔틸레버의 탭핑(tapping)과정을 5 개 모드로 근사화한 5 자유도 모델과 끝단에 작용하는 선형 스프링 요소로 모델링하였다. 이 모델의 시간응답으로부터 POM 과 POV 를 계산하여 비접촉 공진 상태와 탭핑 상태의 차이를 비교하였다. 이는 저자들의 이전 연구[4]에서 단순 실험의 POM 을 추출하는 연구에서 한걸음 더 나아간 결과라고 할 수 있다. 즉 탭핑 과정에서 적합직교모드의 직교값(POV)의 변화를 바탕으로 실제 탭핑과정에서 여러 특성에 따른 모드에너지 변화를 추정할 수 있을 것이다.

## 2. 적합직교분해(POD)

적합직교분해(POD: proper orthogonal decomposition)는 Karhunen-Loeve 변환으로도 알려져 있으며 매우 큰 자유도계나 여러 가지 복잡한 물리 현상이 연성된 계의 해석에서 활용되고 있다.[1, 5-6]

진동 해석의 경우 일반적인 계의 주어진 영역  $\Omega$ 에서 진동 신호를  $v(x, t)$ 라고 하고 일정한 시간  $t_i$ 에서 샘플링 된 신호(일종의 snapshot)를  $v_i(x)$ 라 할 때 POD 에서는 이들 snapshot 들로부터 원래 구조 진동 모드에 가장 유사한  $\phi(x)$ 를 다음 최적화 과정을 통하여 적분고유치문제를 푸는 문제로 귀결된다.

$$\int_{\Omega} K(x, x')\phi(x')dx' = \lambda\phi(x). \quad (1)$$

여기서  $K$ 는 다음 식으로 정의되는 2 점 관계함수(two-point correlation function)이다.

$$K(x, x') = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i(x)v_i(x'). \quad (2)$$

이상의 과정을 실제 측정 과정에 적용하기 위해서는  $m$  개의 각 측정점  $x_k$ 에 대한 다음의 관계행렬(correlation matrix)을 구하고,

\* 서울시립대학교 대학원 기계정보공학과

† (Corresponding Author)  
서울시립대학교 기계정보공학과  
E-mail : leesooil@uos.ac.kr

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} K(x_1, x_1) & \cdots & K(x_1, x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_m, x_1) & \cdots & K(x_m, x_m) \end{bmatrix} \quad (3)$$

이러한 관계행렬은 다음과 같이  $n$  번 샘플링한 측정값 행렬로부터 얻을 수 있다.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1(t_1) & \cdots & q_1(t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n(t_1) & \cdots & q_n(t_n) \end{bmatrix} = [\mathbf{q}(t_1) \cdots \mathbf{q}(t_m)] \quad (4)$$

이때,  $\mathbf{G} = \frac{1}{n} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T$  와 같고,  $\mathbf{G}$  의 고유벡터가 바로 POM 이, 고유치는 POV 가 된다.

또한 다음과 같이 특이값 분해 (singular value decomposition) 방법으로도 POM 을 계산할 수 있다.[5] 즉 식(5)는 다음과 같이 SVD 방법을 적용한 경우를 나타낸다.

$$\mathbf{Q} = \underbrace{[\mathbf{X}]}_{\mathbf{U}} \underbrace{[\mathbf{I} \quad \mathbf{Z}]}_{\mathbf{S}} \underbrace{[\mathbf{E} \quad \mathbf{R}]}_{\mathbf{V}^T} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (5)$$

단, 이때 구한 특이값은 위 POV 의 측정위치 개수를 곱하고 제곱근한 값과 같게 된다.

### 3. 수치 해석

#### 3.1 탭핑 캔틸레버의 운동방정식

POD 해석에 필요한 진동응답을 구하기 위하여 Fig. 1 과 같이 마이크로캔틸레버를 기저부에 조화가진이 되는 외팔보 구조와 탭핑모드의 경우 끝단에 단순히 선형 스프링이 추가되는 형태로 모델링하였다.

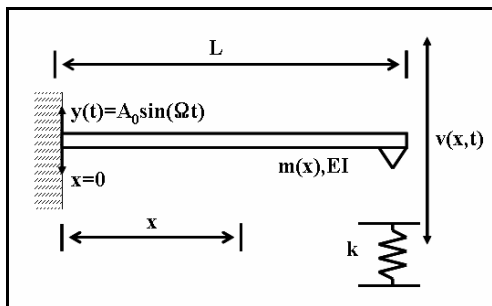


Fig. 1 Cantilever beam

이러한 마이크로캔틸레버 모델의 운동방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right] = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} [v(x,t) + y(t)] \quad (6)$$

$$v(0,t) = \frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 v(L,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = k [v(L,t) + y(t)]$$

여기서 기저부 조화가진은  $y(t) = A_0 \sin(\Omega t)$  와 같다.

위 운동방정식(6)과 경계조건을 무차원화 한 뒤 외팔보의 선형 정규모드 함수  $Y_i(x)$  를 이용하여 Galerkin 근사화를 수행하면 다음과 같은 상미분 형태의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$M \ddot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (7)$$

여기서  $M$ ,  $K$ ,  $F$  는 각각 질량, 강성, 외력을 나타내는데 탭핑모드 마이크로캔틸레버에 대하여 각 요소는 다음 Galerkin 적분과정으로부터 얻을 수 있다.

$$m_{ij} = m_{ji} = \int_0^1 Y_i(x) Y_j(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$k_{ij} = k_{ji} = \int_0^1 \frac{d^2 Y_i(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_j(x)}{dx^2} dx \quad (9)$$

$$+ \frac{kL^3}{EI} Y_i(1) Y_j(1), \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$F_j = \left\{ \int_1^2 Y_j(x) \frac{L^3 m \Omega^2}{EI} dx - Y_j(1) \frac{kL^2}{EI} \right\} A_0 \sin(\gamma t)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

(10)

#### 3.2 탭핑모드 POD 해석

한편 식(7)은 선형모드를 이용하여 다음과 같이 질량과 강성이 비연성화된 모달(modal) 방정식 형태로 변환할 수 있다. 아래 식에는 해석의 편의를 위하여 임의의 모달 감쇠를 추가하였다.

$$I\ddot{r}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{r}(t) + \Lambda r(t) = f(t) \quad (11)$$

위에서 구한 식(11)에 대하여 Runge-Kutta 방법을 이용하여 외팔보의 시간 응답  $r_i(t)$ , ( $i=1, \dots, n$ ) 를 구하고, 운동방정식의 시간 응답  $x_i(t)$  를 구한다. 이로부터 캔틸레버의 최종 변위는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^n Y_i(x) \cdot x_i(t) \quad (12)$$

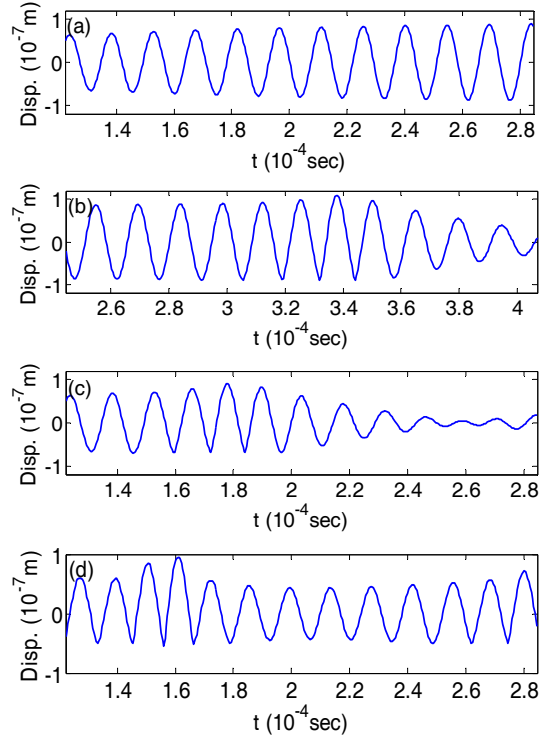
본 연구에서는 실제 AFM 마이크로캔틸레버 모델에 대한 POM 해석을 위해 OLYMPUS™ OMCL-AC240TC 을 대상으로 하였다. 마이크로캔틸레버의 특성은 Table.1 에 나타낸 것과 같다

시간 응답을 구하기 위해 MATLAB 상에서 시뮬레이션을 수행하였는데 마이크로캔틸레버 상 다섯 개 위치점에 대한 시간응답을  $\Delta t = 4.0732 \times 10^{-7}$  초 간격으로 각 400 개의 시간 샘플링 값(동적 신호에 해당)을 구하였다. 다음 Fig.2 는 비접촉 공진 상태일 때(a)와 탭핑시 팁 끝단과 표면 사이의 Gap 에 따른 끝단의 변위(b-d)를 MATLAB 에서 계산한 결과이다. 갭의 크기에 따라 탭핑 시간 응답에서 진폭이 순간적으로 변화하는 형태가 나타나는 것을 알 수 있다.

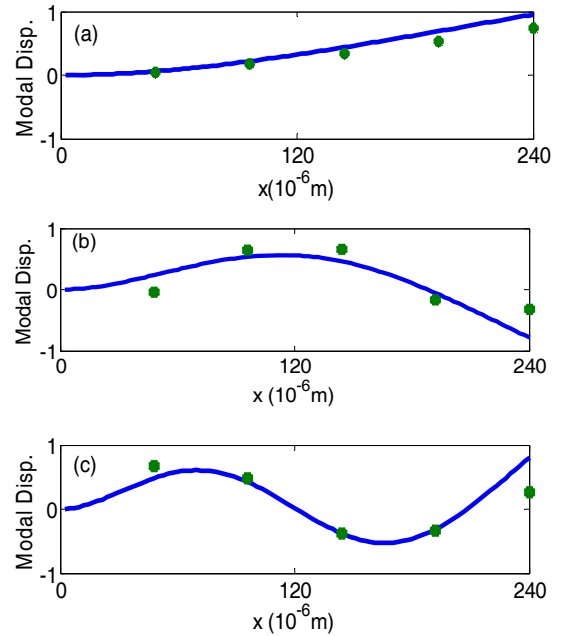
이러한 시간응답으로부터 2 절에 설명한 바와 같은 POM 과 POV 를 구하였다. Fig 3 는 비접촉의 경우, Fig. 4-6 은 각 Gap 에 따른 POM 이다. 또한 각 경우 POV 는 Table 2 에 나타낸 것과 같다.

**Table. 1** Constants and properties of AFM microcantilever (OLYMPUS™ OMCL-AC240TC)

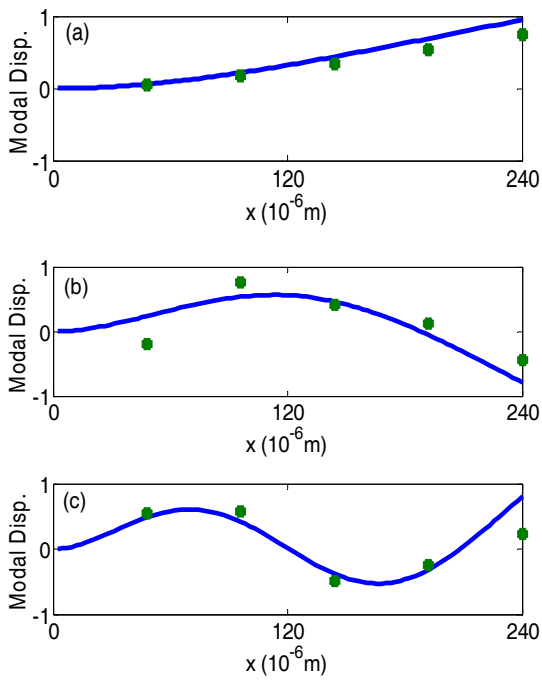
| Description                            | OMCL |
|--|------|
| Tip radius (nm)                        | 10   |
| Tip height ( $\mu\text{m}$ )           | 14   |
| Cantilever thickness ( $\mu\text{m}$ ) | 2.8  |
| Cantilever length ( $\mu\text{m}$ )    | 240  |
| Cantilever width ( $\mu\text{m}$ )     | 30   |
| Spring constant (N/m)                  | 1.8  |
| Resonant frequency (kHz)               | 70   |
| E (GPa)                                | 176  |
| $\rho$ ( $\text{kg m}^{-3}$ )          | 2300 |



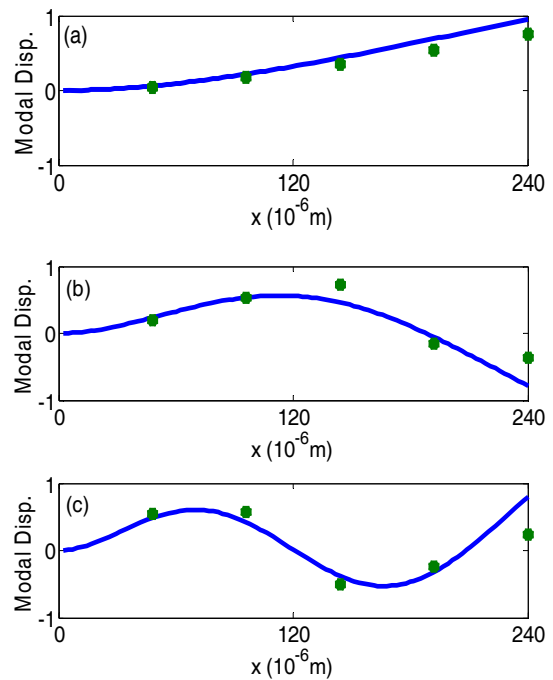
**Fig. 2** Tip displacement with (a) no tapping; (b) 90nm gap; (c) 70nm gap; and (d) 50nm gap.



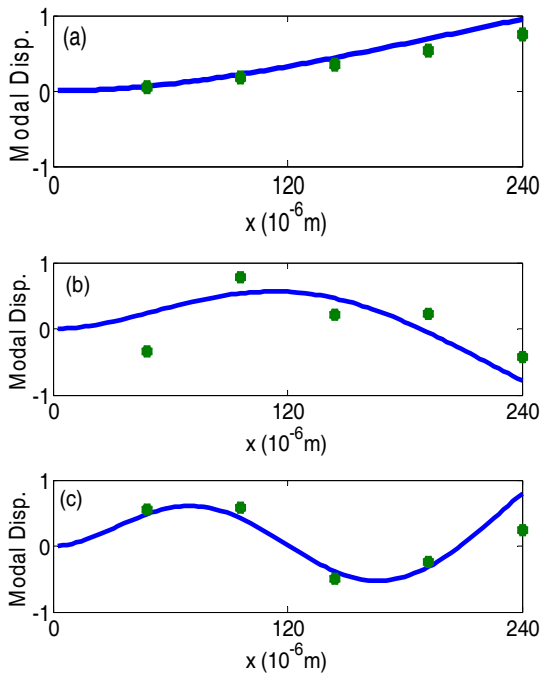
**Fig. 3** The first three POMs of the tip without tapping are plotted with solid circles. The corresponding LNMs are plotted with solid lines. (a) 1<sup>st</sup> mode, (b) 2<sup>nd</sup> mode, (c) 3<sup>rd</sup> mode.



**Fig. 4** The first three POMs of tapping tip with 90nm gap are plotted with solid circles. The corresponding LNMs are plotted with solid lines. (a) 1<sup>st</sup> mode, (b) 2<sup>nd</sup> mode, (c) 3<sup>rd</sup> mode.



**Fig. 6** The first three POMs of tapping tip with 50nm gap are plotted with solid circles. The corresponding LNMs are plotted with solid lines. (a) 1<sup>st</sup> mode, (b) 2<sup>nd</sup> mode, (c) 3<sup>rd</sup> mode.

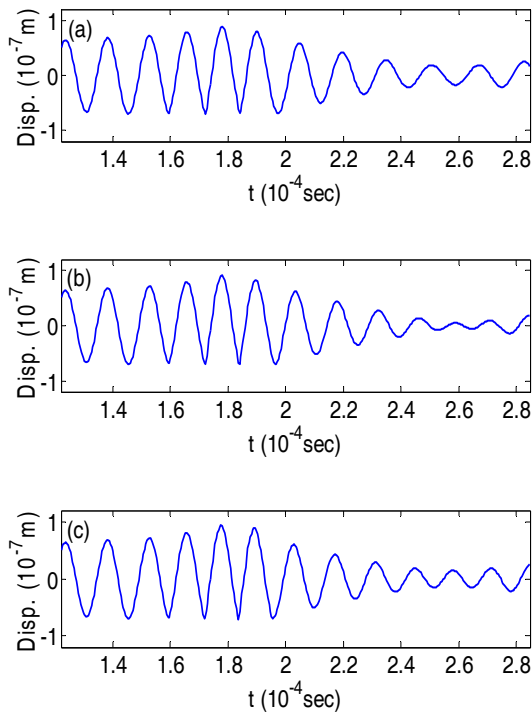


**Fig. 5** The first three POMs of tapping tip with 70nm gap are plotted with solid circles. The corresponding LNMs are plotted with solid lines. (a) 1<sup>st</sup> mode, (b) 2<sup>nd</sup> mode, (c) 3<sup>rd</sup> mode.

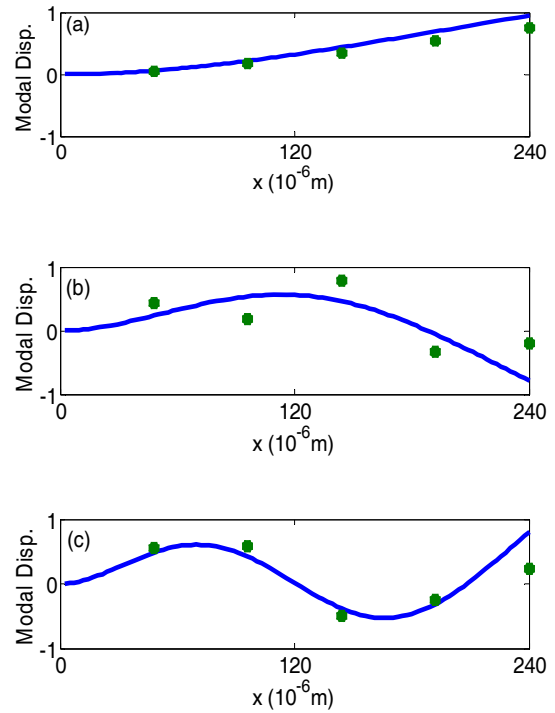
한편 팁과 표면 간의 강성 변화에 따른 POM의 변화를 살펴보기 위해 70nm gap 상태에서 기준 강성 ( $k = 136\text{N/m}$ ) 에서 30% 증감 했을 때의 시간 응답(Fig.7)과 POM/POV(Fig.8~9 및 Table 3)를 구하였다.

**Table 2** The % of POV with different tapping gaps

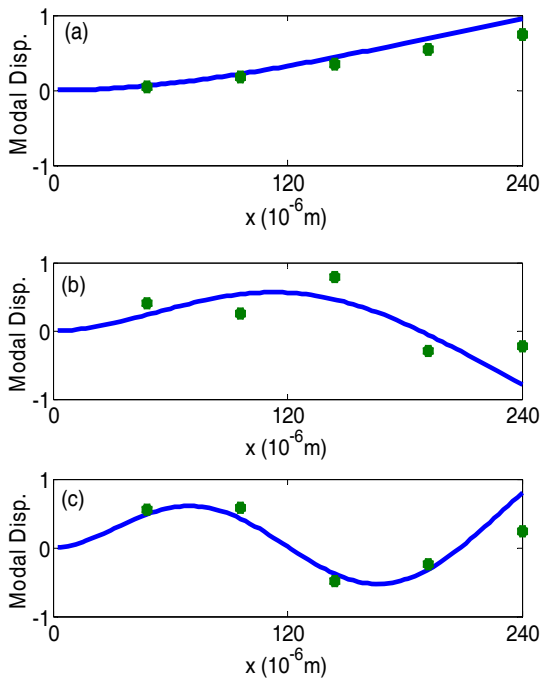
| mode \ gap | POV(%) |       |     |     |     |
|------------|--------|-------|-----|-----|-----|
|            | 1st    | 2nd   | 3rd | 4th | 5th |
| No tapping | 100.0  | 0.0   | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 90nm       | 99.998 | 0.002 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 70nm       | 99.994 | 0.006 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 50nm       | 99.948 | 0.052 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |



**Fig. 7** Tip displacement with 70nm gap tapping on the surface with (a) 30% increase, (b) reference, (c) 30% decrease from the tip-surface stiffness.



**Fig. 9** The first three POMs of tapping tip with the 30% decreased surface stiffness are plotted with solid circles. The corresponding LNMs are plotted with solid lines. (a) 1<sup>st</sup> mode, (b) 2<sup>nd</sup> mode, (c) 3<sup>rd</sup> mode.



**Fig. 8** The first three POMs of tapping tip with the 30% increased surface stiffness are plotted with solid circles. The corresponding LNMs are plotted with solid lines. (a) 1<sup>st</sup> mode, (b) 2<sup>nd</sup> mode, (c) 3<sup>rd</sup> mode.

**Table. 3** The % of POV with different surface stiffness.

| mode \ k | POV(%) |       |     |     |     |
|----------|--------|-------|-----|-----|-----|
|          | 1      | 2     | 3   | 4   | 5   |
| -30%     | 99.996 | 0.004 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| k        | 99.994 | 0.006 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| +30%     | 99.994 | 0.006 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

#### 4. 결과 토의

Table 2 에서 마이크로캔틸레버의 탭핑 gap 차이에 따른 POV 계산 결과를 살펴보면, 근원적으로 동적모드 AFM 에서는 1 차 굽힘모드 주파수로 가진을 하게 되므로 비접촉 공진일 때는 POV 비율이 1 차 POM 에 100%가 나타나는 것을 알 수 있

다. 그러다 탭핑을 하게 되고 점차로 그 gap 이 줄어들게 되면 아주 미소한 변화이긴 하나 1 차 POV 가 조금씩 감소하고 2 차 POV 가 점차 증가해 가는 것을 알 수 있다. 현재 시간응답을 계산하기 위한 마이크로캔틸레버의 모델에서 탭핑 시 적절한 표면 강성과 감쇠 등 파라미터가 모두 반영되어 있지 않은 상태에서 미소하나마 예측한대로의 변화가 발생함을 알 수 있다. 그리고 각 POM 의 형상을 비교하면 비접촉 공진 또는 탭핑 상태 모두 외팔보의 선형모드와 거의 일치 또는 유사함을 알 수 있다. 특히 해석 결과 중 탭핑 gap 이 50nm 인 경우, 2 차 POV 가 미소하나마 증가함에 따라 2 차 POM 도 2 차 선형 외팔보 모드에 보다 근접하는 것을 알 수 있다.(Fig. 6(b))

또한 Table 3 에 의하면 표면 강성 차이에 따른 POV 의 변화도 gap 의 경우와 유사하게 그 정도가 미미하지만, 일단 표면 강성 증가에 따라 1 차 POV 감소가 2 차 POV 로 증가되어 나타남을 알 수 있다.

이러한 POV 는 여러 POD 관련 문헌에 나온 바와 같이 [1, 2, 5] 각 POM 의 모드에너지 비율로 이해할 수 있다. 즉, 본 연구에서 진행한 AFM 마이크로캔틸레버 모델의 경우 대부분 모드에너지는 가진모드와 유사한 1 차 POM 에 집중되어 있다.[4] 그러나 탭핑 gap 이 감소하고 표면 강성이 증가하면, 좀 더 과격한 (severe) 탭핑 상태가 되어 1 차 POM 로부터 고차(여기서는 2 차) POM 으로 일부 모드에너지가 전이되는 것으로 해석할 수 있다.

## 5. 결론

본 연구에서는 기저부 가진과 팁 끝단에 선형 스프링을 추가한 단순 마이크로캔틸레버 모델의 다중모드 운동방정식을 유도하고 MATLAB 시뮬레이션을 진행하였다. 운동방정식으로부터 AFM 마이크로캔틸레버의 탭핑에 따른 POM 과 POV 를 계산하였다.

계산된 POV 로부터 동일 가진력에 대하여 탭핑 gap 이 감소할수록, 표면 강성이 증가할수록 고차 (2 차) POM 이 보다 명확해지며 이에따른 모드에너지 분포도 증가하는 것을 확인할 수 있었다.

향후 팁-샘플 간 복잡한 비선형 작용력을 추가하고 실제 표면 강성 및 가진에 따른 경계조건을 반영하여 나타나는 POM 과 POV 의 변화를 고찰하고자 한다.

## 후 기

이 논문은 2 단계 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

## 참고문헌

- (1) Kerschen G. and Golinval, J. C., 2002, "Physical interpretation of the proper orthogonal modes using the singular value decomposition," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 249, pp. 849-865.
- (2) Azeez, M. F. A. and Vakakis, A. F., 2001, "Proper orthogonal decomposition (POD) of a class of vibroimpact oscillators," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, pp. 859-889.
- (3) Li, A. and Dowell, E. H., 2006, "Modal reduction of mathematical models of biological molecules", *Journal of Computational Physics*, Vol. 211, pp262-288.
- (4) 조홍모, 홍상혁, 권원태, 이수일. 2007. "동적모드 AFM 마이크로캔틸레버의 적합직교모드 추출" *한국소음진동공학회 2007 춘계학술대회논문집* KSNVE07S-08-19.
- (5) Feeny, G. F. and Liang. Y., 2003, "Interpreting proper orthogonal modes of randomly excited vibration systems" *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 265, pp. 953-966.
- (6) 이수일, 황철호. 2005. "적합직교모드를 이용한 AFM 마이크로캔틸레버의 진동해석에 대하여" *한국소음진동공학회 2005 춘계학술대회논문집*, pp. 756~759.