

# MFC 작동기가 부착된 실린더 쉘 구조물의 동적 모델링과 능동진동제어기 설계 및 실험

## Dynamic Modeling, Active Vibration Controller Design and Experiments For Cylindrical Shell equipped with MFC Actuators

곽문규† · 정문산\*

Moon K. Kwak and Moonsan Jung

**Key Words :** Active Vibration Control(능동진동제어), Dynamic Modeling(동적모델링), Cylindrical Shell(실린더 쉘)

### ABSTRACT

This paper is concerned with the dynamic modeling, active vibration controller design and experiments for a cylindrical shell equipped with MFC actuators. The dynamic model was derived by using Rayleigh-Ritz method based on Donnel-Mushtari shell theory. The actuator and sensors for the MFC actuator equations were derived based on pin-force model. The equations of motion were then reduced to modal equations of motion by considering the modes of interest. The sensor equations were also converted to a reduced form. An aluminum shell was fabricated to demonstrate the effectiveness of modeling and control techniques. The boundary conditions at both ends of the shell were assumed to be shear diaphragm. Theoretical natural frequencies were calculated and compared to experimental result. It was observed that the theoretical result is in good agreement with experimental result for the first two modes. The multi-input and multi-output positive position feedback controller, which can cope with first two modes, was then designed based on the block-inverse theory and implemented using DSP. It was found from experiment that vibrations can be successfully suppressed.

### 1. 서론

얇은 원통형의 쉘 구조물은 액체 또는 가스 저장과 같은 압력용기로 사용될 뿐만 아니라 잠수함과 같이 외압을 받는 구조물로 사용된다. 이와 같은 원통형 쉘 구조물의 능동진동제어를 위해서는 무엇보다도 운동방정식의 유도가 필요하다.

원통형 쉘 구조물의 운동방정식 유도는 Arnold and Waburton[1]으로부터 시작하였으며 다양한 쉘 구조물의 연구에 관해서는 많은 연구자들이 쉘에 대해서 다양한 가정을 하고 운동방정식을 유도하였다. 이 중 가장 단순한 이론은 Donnel and Mushtari[2] 이론이다. 이 이론이 유용하게 사용될 수 있지만 좀더 정확한 계산을 위해

다양한 이론들이 제안되었다[3-4].

원통형 쉘을 압전 작동기를 이용해 진동 및 음향을 제어하고자 하는 연구 결과로는 Tzou 등[5], Lester and Lefebvre[6], Sonti and Jones[7], Clark and Fuller [8]의 연구가 있다. Tzou 등[5]은 모달 압전 작동기를 이용한 쉘 구조물의 제어기법에 대한 연구를 수행하였다. Lester and Lefebvre[6]는 압전체가 원통형 쉘과 결합된 구조물에 대한 운동방정식을 유도하고 모달 스펙트라를 이용해 실린더와 내부음향 캐비티사이의 연성 효과를 조사하고 압전작동기를 이용해 내부 소음제어를 이룩할 수 있음을 이론으로 입증하였다. Sonti and Jones[7]는 원통형 쉘에 압전작동기가 결합된 구조물에 대해 단순화된 해석 모델을 개발하고 수치계산을 통해 큰 크기의 압전작동기가 보다 효과적임을 주장하였다. Clark and Fuller [8]는 압전세라믹 작동기, 마이크, PVDF 센서를 알루미늄 쉘에 부착하고 Filtered-x LMS 제어기 기법을 이용해 음향 제어를 수행하였는데 실린더 쉘의 진동 모드 중 아코디

† 교신저자; 동국대학교 기계공학과, 정회원

E-mail : kwakm@dongguk.edu

Tel : (02) 2260-3705, Fax : (02) 2263-9379

\* 동국대학교 대학원 기계공학과, 학생회원

온 형태의 모드는 제어가 쉬운 반면에 실린더 모드는 가진하는 진동수가 높아짐으로 인해 제어가 쉽지 않음을 보여주었다.

셸 구조물에 압전세라믹 작동기를 적용하는 경우의 가장 큰 문제점은 곡률이다. 현재 사용하는 압전세라믹 작동기는 취성이 매우 커 깨지기 쉽고 곡면형상을 가지는 구조물에는 사용할 수 없다. 최근에 이런 단점을 극복하고 작동력의 효율을 좀더 높인 압전 작동기가 개발되고 있다. 그중 하나가 MFC(Macro Fiber Composite) 작동기[9]이다. MFC 작동기는 곡면에 부착할 수 있으며 압전상수  $d_{33}$ 를 이용해 작동력이 다른 압전 작동기보다 높다. 손정우 등[10]은 MFC 작동기가 부착된 실린더 셸 구조물의 유한요소모델링 방법과 제어 특성을 토의하고, LQG 제어기를 고려하여 수치해석을 통해 제어가 가능함을 입증하였다.

본 연구에서는 원통형 셸 구조물에 MFC 작동기가 부착된 경우를 고려하여 동적 모델을 유도하고 이 동적 모델을 기반으로 능동진동제어기를 설계하였다. 그리고 본 연구의 타당성을 입증하고자 실험을 수행하였다. 원통형 셸의 동적 모델링과 제어기 설계를 위해서 기존의 Rayleigh-Ritz 방법에 관한 연구[2] 내용을 수정하여 운동방정식을 유도하고 MFC 액추에이터를 pin-force 모델로 가정한 액추에이터와 센서방정식들을 유도하였다. 유도된 방정식들을 근거로 고유치 문제를 해석하고 충격해머를 이용한 진동실험 결과와 비교하여 동적 모델의 타당성을 검증하였다. 능동진동제어기 중 가장 효과적으로 사용된 제어기는 양변위 피드백 제어기(PPF)이다[11]. 본 연구에서는 유도된 동적 모델에 블록 역행렬 양변위 피드백 제어기법[12]을 적용해 능동진동제어기를 설계하고 실험을 통해 능동진동제어기가 성공적으로 이루어짐을 입증하였다.

## 2. 실린더형 셸의 운동에너지와 탄성에너지

먼저 Rayleigh-Ritz 방법을 이용해 실린더형 셸 구조물의 동적 모델을 유도해보자. 이에 대해서는 여러 연구가 있지만, 간략한 형태로 정리되어 있지 않아 본 연구에서는 수치계산에 적합한 형태의 운동방정식을 유도하고자 한다. 그림 1은 본 연구에서 다루고자 하는 실린더형 셸의 좌표계와 변위를 보여주고 있다.

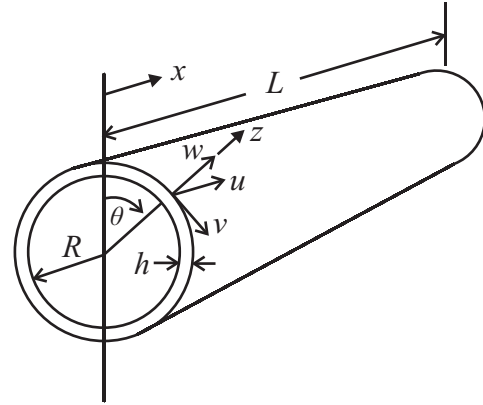


Fig. 1 Coordinate of Cylindrical Shell

여기서  $R$ 는 실린더의 반지름,  $h$ 는 셸의 두께,  $L$ 은 실린더의 길이,  $\theta$ 는 수직 축에 대한 각도,  $x$ 는 길이 방향 좌표축,  $u, v, w$ 는 각각  $x$  방향 변위,  $\theta$  방향 변위,  $z$  방향의 변위를 나타낸다. 이와 같은 실린더형 셸의 대한 운동에너지는 다음 식으로 주어진다[2].

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) R dz d\theta dx \quad (1)$$

여기서  $\rho$ 는 셸의 질량밀도를 나타낸다. 탄성에너지를 구하기 위해서는 변형율과 응력에 대한 식이 필요한데 다음과 같다[2].

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} - \frac{z}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (2a,b)$$

$$\epsilon_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \quad (2c)$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{\theta z} = \epsilon_{zz} = 0 \quad (2d)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x) \quad (3a,b)$$

$$\sigma_{x\theta} = \sigma_{\theta x} = \frac{E}{(1+\nu)} \epsilon_{x\theta} \quad (3c)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zz} = 0 \quad (3d)$$

여기서  $E$ 는 영의 계수,  $\nu$ 는 프와송 비를 나타낸다. 이를 이용한 탄성에너지 식은 다음과 같이 표현된다[2].

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \sigma_{x\theta} \epsilon_{x\theta}) R dx d\theta dz \quad (4)$$

식 (2)와 (3)을 식 (4)에 대입하면 탄성에너지 식이 다음과 같이 유도된다[2].

$$\begin{aligned}
V = & \frac{ERh}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\
& + \frac{w^2}{R^2} + \frac{h^2}{12R^4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 + \frac{2}{R^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) w + \frac{2\nu}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{2\nu}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) w + \frac{\nu h^2}{6R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\
& + \frac{(1-\nu)}{2R^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{(1-\nu)h^2}{6R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right)^2 \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] dx d\theta
\end{aligned} \tag{5}$$

세 방향 변위는 원주 방향  $n$  개의 절점을 가지는 함수들로 다음과 같이 급수 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned}
u(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, \theta, t), \quad v(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, \theta, t) \\
w(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, \theta, t)
\end{aligned} \tag{6a-c}$$

$n=0$  인 경우는 실린더 쉘 전체가 진동하는 경우로 본 연구의 범위에서 벗어난다. 따라서  $n \geq 1$  인 경우만을 고려한다. 원주 방향의  $n$  번째 모드는 각각 sine 과 cosine 모드로 나뉘어 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$u_n(x, \theta, t) = \Phi_u(x) [\cos n\theta q_{nuc}(t) + \sin n\theta q_{nus}(t)] \tag{7a}$$

$$v_n(x, \theta, t) = \Phi_v(x) [\sin n\theta q_{nvs}(t) + \cos n\theta q_{nvc}(t)] \tag{7b}$$

$$w_n(x, \theta, t) = \Phi_w(x) [\cos n\theta q_{nwc}(t) + \sin n\theta q_{nws}(t)] \tag{7c}$$

여기서  $\Phi_u(x), \Phi_v(x), \Phi_w(x)$  는 각 방향의 허용함수 벡터,  $q_{nuc}(t), q_{nus}(t), q_{nvs}(t), q_{nvc}(t), q_{nwc}(t), q_{nws}(t)$  는 sine 과 cosine 모드에 대한 각 방향의 일반 변위 벡터를 나타낸다.

식 (6)을 식 (1)과 식 (5)에 대입하기 전에 수치 해석의 용이성을 위해 다음과 같은 무차원 변수를 도입해 보자.

$$\xi = x/L, \quad \alpha = L/R, \quad \beta = h/R \tag{8a,b,c}$$

$n$  번째의 함수들로 급수 전개한 것을 고려하면 운동에너지와 탄성에너지 역시 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n, \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \tag{9a,b}$$

식 (8)을 고려하고 식 (6)을 식 (1)과 식 (5)에 대입하면 원주방향의  $n(\geq 1)$  번째 모드에 대해 운동에너지와 탄성에너지가 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}
T_n = & \frac{1}{2} \rho R h L \pi \left( \dot{q}_{nuc}^T M_{uu} \dot{q}_{nuc} + \dot{q}_{nvs}^T M_{vv} \dot{q}_{nvs} + \dot{q}_{nwc}^T M_{ww} \dot{q}_{nwc} \right. \\
& \left. + \dot{q}_{nus}^T M_{uu} \dot{q}_{nus} + \dot{q}_{nvc}^T M_{vv} \dot{q}_{nvc} + \dot{q}_{nws}^T M_{ww} \dot{q}_{nws} \right)
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
V_n = & \frac{\pi ERh}{(1-\nu^2)L} \left( \frac{1}{2} q_{nuc}^T K_{nuu} q_{nuc} + \frac{1}{2} q_{nvs}^T K_{nvv} q_{nvs} + \frac{1}{2} q_{nwc}^T K_{nww} q_{nwc} \right. \\
& + q_{nuc}^T K_{nvw} q_{nvs} + q_{nvs}^T K_{nvw} q_{nwc} + q_{nuc}^T K_{nvw} q_{nws} \\
& + \frac{1}{2} q_{nus}^T K_{nuu} q_{nus} + \frac{1}{2} q_{nvc}^T K_{nvv} q_{nvc} + \frac{1}{2} q_{nws}^T K_{nww} q_{nws} \\
& \left. + q_{nus}^T K_{nvw} q_{nvc} + q_{nvc}^T K_{nvw} q_{nws} + q_{nus}^T K_{nvw} q_{nws} \right)
\end{aligned} \tag{11}$$

여기서

$$M_{uu} = \Phi_{uu}, \quad M_{vv} = \Phi_{vv}, \quad M_{ww} = \Phi_{ww} \tag{12a-c}$$

$$K_{nuu} = \bar{\Phi}_{uu} + (1-\nu)\alpha^2 n^2 \Phi_{uu} / 2 \tag{12d}$$

$$K_{nvv} = \alpha^2 n^2 \Phi_{vv} + (1-\nu)\bar{\Phi}_{vv} / 2 \tag{12e}$$

$$K_{nww} = \alpha^2 \Phi_{ww} + \frac{\beta^2}{12} \left( \frac{\hat{\Phi}_{wvw}}{\alpha^2} + \alpha^2 n^4 \Phi_{wvw} - 2\nu n^2 \tilde{\Phi}_{wvw} + 2(1-\nu)n^2 \bar{\Phi}_{wvw} \right) \tag{12f}$$

$$K_{nvw} = \nu n \alpha \tilde{\Phi}_{uv} - \frac{(1-\nu)\alpha n}{2} \hat{\Phi}_{uv} \tag{12g}$$

$$K_{nvw} = \nu \alpha \tilde{\Phi}_{uv}, \quad K_{nvw} = \alpha^2 n \Phi_{vw} \tag{12h,i}$$

그리고

$$\Phi_{uu} = \int_0^1 \Phi_u^T \Phi_u d\xi, \quad \Phi_{vv} = \int_0^1 \Phi_v^T \Phi_v d\xi \tag{13a,b}$$

$$\Phi_{ww} = \int_0^1 \Phi_w^T \Phi_w d\xi, \quad \Phi_{vw} = \int_0^1 \Phi_v^T \Phi_w d\xi \tag{13c,d}$$

$$\bar{\Phi}_{uu} = \int_0^1 \Phi_u^T \Phi_u d\xi, \quad \bar{\Phi}_{vv} = \int_0^1 \Phi_v^T \Phi_v d\xi \tag{13e,f}$$

$$\bar{\Phi}_{ww} = \int_0^1 \Phi_w^T \Phi_w d\xi, \quad \tilde{\Phi}_{uv} = \int_0^1 \Phi_u^T \Phi_v d\xi \tag{13g,h}$$

$$\tilde{\Phi}_{uv} = \int_0^1 \Phi_u^T \Phi_w d\xi, \quad \tilde{\Phi}_{vw} = \int_0^1 \Phi_v^T \Phi_w d\xi \tag{13i,j}$$

$$\hat{\Phi}_{uv} = \int_0^1 \Phi_u^T \Phi_v d\xi, \quad \hat{\Phi}_{vw} = \int_0^1 \Phi_w^T \Phi_w d\xi \tag{13k,l}$$

### 3. MFC 센서와 액츄에이터 모델링

MFC 액츄에이터는 한방향으로 작동력이 작용하는 액츄에이터로 볼 수 있는데 원통형 쉘 구조물의 경우 원주 방향 또는 길이방향으로 부착할 수 있다. 부착하는 방향에 따라 진동 제어하는 효과가 다르게 나타나는데 본 연구에서는 각 경우를 구분하여 액츄에이터 방정식과 센서 방정식을 유도한다.

먼저 압전세라믹 액츄에이터를 pin-force 로 가

정하면, MFC 액츄에이터 주변의 분산된 힘은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_{pa}^i = E_p d_{33} V_{pa}^i, \quad (14)$$

여기서  $E_p$  는 영의 계수,  $d_{33}$  는 압전상수, 그리고  $V_{pa}^i$  는 MFC 액츄에이터에 인가된 전압을 의미한다.

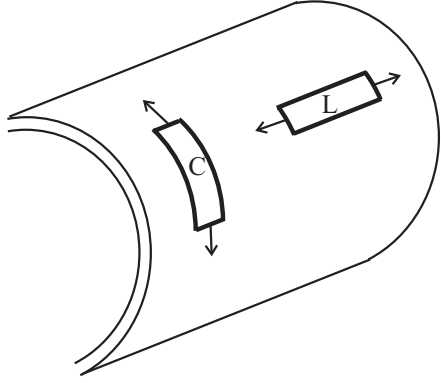


Fig. 2 Two types of MFC actuator for shell

### 3.1 길이방향으로 부착된 MFC 액츄에이터

만약 MFC 액츄에이터가 쉘의 길이방향으로 부착되어 있다면, 그에 해당하는 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{u} = u - \left( \frac{h}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \quad (15)$$

식 (14)와 (15)를 사용하여  $n(\geq 1)$  원주방향 모드에 대한 가상 일을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta W_{Ln}^i = \delta q_{nuc}^T (b_{Lanuc}^i)^T V_{pa}^i + \delta q_{nwc}^T (b_{Lanwc}^i)^T V_{pa}^i + \delta q_{nus}^T (b_{Lanus}^i)^T V_{pa}^i + \delta q_{nws}^T (b_{Lanws}^i)^T V_{pa}^i \quad (16)$$

여기서

$$b_{Lanuc}^i = \frac{E_p d_{33} R}{n} (\sin n\theta_{pae}^i - \sin n\theta_{pas}^i) [\Phi_u(x_{pae}^i) - \Phi_u(x_{pas}^i)] \quad (17a)$$

$$b_{Lanwc}^i = -\frac{E_p d_{33} Rh}{2n} (\sin n\theta_{pae}^i - \sin n\theta_{pas}^i) \left[ \frac{d\Phi_w(x_{pae}^i)}{dx} - \frac{d\Phi_w(x_{pas}^i)}{dx} \right] \quad (17b)$$

$$b_{Lanus}^i = -\frac{E_p d_{33} R}{n} (\cos n\theta_{pae}^i - \cos n\theta_{pas}^i) [\Phi_u(x_{pae}^i) - \Phi_u(x_{pas}^i)] \quad (17c)$$

$$b_{Lanws}^i = \frac{E_p d_{33} Rh}{2n} (\cos n\theta_{pae}^i - \cos n\theta_{pas}^i) \left[ \frac{d\Phi_w(x_{pae}^i)}{dx} - \frac{d\Phi_w(x_{pas}^i)}{dx} \right] \quad (17d)$$

그리고 센서 방정식은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$V_L^i = -\frac{1}{C_{ci}} [b_{Ls0u}^i q_{0u} + b_{Ls0w}^i q_{0w} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_{Lsnuc}^i q_{nuc} + b_{Lsnwc}^i q_{nwc} + b_{Lsnus}^i q_{nus} + b_{Lsnws}^i q_{nws})] \quad (18)$$

여기서  $C_{ci}$  는 전하앰프의 캐패시터 용량을 나타낸다. 그리고

$$b_{Ls0u}^i = E_p d_{33} R (\theta_{pse}^i - \theta_{pss}^i) [\Phi_u(x_{pse}^i) - \Phi_u(x_{pss}^i)]$$

$$b_{Ls0wc}^i = -\frac{E_p d_{33} Rh}{2} (\theta_{pse}^i - \theta_{pss}^i) \left[ \frac{d\Phi_w(x_{pse}^i)}{dx} - \frac{d\Phi_w(x_{pss}^i)}{dx} \right]$$

$$b_{Lsnuc}^i = \frac{E_p d_{33} R}{n} (\sin n\theta_{pse}^i - \sin n\theta_{pss}^i) [\Phi_u(x_{pse}^i) - \Phi_u(x_{pss}^i)] \quad (19a-c)$$

$$b_{Lsnwc}^i = -\frac{E_p d_{33} Rh}{2n} (\sin n\theta_{pse}^i - \sin n\theta_{pss}^i) \left[ \frac{d\Phi_w(x_{pse}^i)}{dx} - \frac{d\Phi_w(x_{pss}^i)}{dx} \right] \quad (19d)$$

$$b_{Lanus}^i = -\frac{E_p d_{33} R}{n} (\cos n\theta_{pse}^i - \cos n\theta_{pss}^i) [\Phi_u(x_{pse}^i) - \Phi_u(x_{pss}^i)] \quad (19e)$$

$$b_{Lanws}^i = \frac{E_p d_{33} Rh}{2n} (\cos n\theta_{pse}^i - \cos n\theta_{pss}^i) \left[ \frac{d\Phi_w(x_{pse}^i)}{dx} - \frac{d\Phi_w(x_{pss}^i)}{dx} \right] \quad (19f)$$

### 3.2 원주방향으로 부착된 MFC 액츄에이터

만약 MFC 액츄에이터가 쉘의 원주방향으로 부착되어 있다면, 이에 관련된 변위는 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$\bar{v} = v + w\theta - \left( \frac{h}{2R} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (20)$$

식(14)와 (20)를 사용하여  $n(\geq 1)$  원주방향 모

드 가상 일을 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta W_{C_n}^i = \delta q_{nvs}^T (b_{Canvs}^i)^T V_{pa}^i + \delta q_{nvc}^T (b_{Canvc}^i)^T V_{pa}^i + \delta q_{nvc}^T (b_{Canvc}^i)^T V_{pa}^i + \delta q_{nvs}^T (b_{Canvs}^i)^T V_{pa}^i \quad (21)$$

여기서

$$b_{Canvs}^i = E_p d_{33} (\sin n\theta_{pae}^i - \sin n\theta_{pas}^i) \int_{x_{pas}^i}^{x_{pae}^i} \Phi_v dx \quad (22a)$$

$$b_{Canvc}^i = E_p d_{33} [(\theta_{pae}^i \cos n\theta_{pae}^i - \theta_{pas}^i \cos n\theta_{pas}^i) + \frac{nh}{2R} (\sin n\theta_{pae}^i - \sin n\theta_{pas}^i)] \int_{x_{pas}^i}^{x_{pae}^i} \Phi_w dx \quad (22b)$$

$$b_{Canvc}^i = E_p d_{33} (\cos n\theta_{pae}^i - \cos n\theta_{pas}^i) \int_{x_{pas}^i}^{x_{pae}^i} \Phi_v dx \quad (22c)$$

$$b_{Canvs}^i = E_p d_{33} [(\theta_{pae}^i \sin n\theta_{pae}^i - \theta_{pas}^i \sin n\theta_{pas}^i) - \frac{nh}{2R} (\cos n\theta_{pae}^i - \cos n\theta_{pas}^i)] \int_{x_{pas}^i}^{x_{pae}^i} \Phi_w dx \quad (22d)$$

그리고 센서 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_c^i = -\frac{1}{C_{ci}} [b_{Cs0v}^i q_{0v} + b_{Cs0w}^i q_{0w} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_{Csnvs}^i q_{nvs} + b_{Csnvc}^i q_{nvc} + b_{Csnvc}^i q_{nvc} + b_{Csnvs}^i q_{nvs})] \quad (23)$$

여기서

$$b_{Cs0v}^i = E_p d_{33} (\theta_{pse}^i - \theta_{pss}^i) \int_{x_{pas}^i}^{x_{pae}^i} \Phi_v dx \quad (24a)$$

$$b_{Cs0w}^i = E_p d_{33} (\theta_{pse}^i - \theta_{pss}^i) \int_{x_{pas}^i}^{x_{pae}^i} \Phi_w dx \quad (24b)$$

$$b_{Csnvs}^i = E_p d_{33} (\sin n\theta_{pse}^i - \sin n\theta_{pss}^i) \int_{x_{pas}^i}^{x_{pae}^i} \Phi_v dx \quad (24c)$$

$$b_{Csnvc}^i = E_p d_{33} [(\theta_{pse}^i \cos n\theta_{pse}^i - \theta_{pss}^i \cos n\theta_{pss}^i) + \frac{nh}{2R} (\sin n\theta_{pse}^i - \sin n\theta_{pss}^i)] \int_{x_{pas}^i}^{x_{pae}^i} \Phi_w dx \quad (24d)$$

$$b_{Csnvc}^i = E_p d_{33} (\cos n\theta_{pse}^i - \cos n\theta_{pss}^i) \int_{x_{pas}^i}^{x_{pae}^i} \Phi_v dx \quad (24e)$$

$$b_{Csnvs}^i = E_p d_{33} [(\theta_{pse}^i \sin n\theta_{pse}^i - \theta_{pss}^i \sin n\theta_{pss}^i) - \frac{nh}{2R} (\cos n\theta_{pse}^i - \cos n\theta_{pss}^i)] \int_{x_{pas}^i}^{x_{pae}^i} \Phi_w dx \quad (24f)$$

#### 4. 운동방정식과 센서방정식

식 (9), (10), (11), (16) 또는 (21)을 라그랑지 방정식에 대입하면  $n$  번째 원주방향 모드에 대한 운동방정식이 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$M^* \ddot{q}_n + K_n^* q_n = B_n^* V_{pa} \quad (25)$$

여기서  $q_n(t) = [q_{n1}^T \ q_{n2}^T]^T$  는  $\cos n\theta$  와  $\sin n\theta$  에 관련된 일반 벡터들을 합해놓은 일반 벡터인데  $q_{n1}(t) = [q_{nuc}^T \ q_{nvs}^T \ q_{nvc}^T]^T$ ,  $q_{n2}(t) = [q_{nvs}^T \ q_{nvc}^T \ q_{nvs}^T]^T$  이다. 그리고

$$M^* = \rho R h L \pi \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad K_n^* = \frac{ERh\pi}{(1-\nu^2)L} \begin{bmatrix} K_n & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix} \quad (26)$$

는 질량행렬과 강성행렬을 나타내는데 동일한 행렬이 sine 과 cosine 모드로 인해 두 번 들어가 있음을 볼 수 있다.

$$M = \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & M_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & M_{ww} \end{bmatrix}, \quad K_n = \begin{bmatrix} K_{nuu} & K_{nuv} & K_{nuw} \\ K_{nvu}^T & K_{nvv} & K_{nvw} \\ K_{nvw}^T & K_{nvw}^T & K_{nww} \end{bmatrix} \quad (27a,b)$$

또한  $B_n^*$  는 작동 전압에 의해 각 모드에 미치는 영향을 나타내는 영향행렬이다. 만일 첫 번째 액츄에이터가 길이방향으로 부착되어 있고 두 번째 액츄에이터가 원주 방향으로 부착되어 있다면 행렬이 다음과 같이 표현된다.

$$B_n^* = \begin{bmatrix} (b_{Lanuc}^1)^T & 0 & \dots \\ 0 & (b_{Canvs}^2)^T & \dots \\ (b_{Lanvc}^1)^T & (b_{Canvc}^2)^T & \dots \\ (b_{Lanus}^1)^T & 0 & \dots \\ 0 & (b_{Canvc}^2)^T & \dots \\ (b_{Lanvs}^1)^T & (b_{Canvs}^2)^T & \dots \end{bmatrix} \quad (28)$$

길이 방향의 센서방정식(18)과 원주 방향의 센서 방정식 (23)를 이용하면 센서방정식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V_{ps} = C_n^* q_n \quad (29)$$

만일 첫 번째 센서가 길이방향으로 부착되어 있고 두 번째 센서가 원주 방향으로 부착되어 있다면 행렬이 다음과 같이 표현된다.

$$C_n^* = - \begin{bmatrix} b_{Lsnuc}^1 / C_{c1} & 0 & b_{Lsnvc}^1 / C_{c1} \\ 0 & b_{Csnvs}^2 / C_{c2} & b_{Csnvc}^2 / C_{c2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{Lsnus}^1 / C_{c1} & 0 & b_{Lsnvs}^1 / C_{c1} \\ 0 & b_{Csnvc}^2 / C_{c2} & b_{Csnvs}^2 / C_{c2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (30)$$

## 5. 고유진동 해석 및 실험

식 (25)로부터 다음과 같은 고유치 문제가 유도된다.

$$\left| K_n - \Omega^2 M \right| = 0 \quad (31)$$

여기서

$$\Omega^2 = \rho(1-\nu^2)L^2\omega^2 / E \quad (32)$$

는 무차원화된 고유진동수를 나타낸다.

본 연구를 위해 그림 3 과 같은 실린더형 알루미늄 쉘을 제작하였다. 알루미늄 쉘의 두께는 2mm, 내경은 250mm, 길이는 500mm 이다. 끝단 플랜지는 가스킷 처리를 했다. 본 연구에 사용한 알루미늄의 물성치는  $\rho = 2770 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $E = 70 \text{ GPa}$  이다. 그림에서 알 수 있듯이 실험에 사용한 실린더 쉘은 양단에 지지원판이 부착되어 있다. 이와 같은 경계조건은 Shear diaphragm 조건과 유사하다고 판단되어 경계조건을 다음과 같은 Shear Diaphragm의 경계 조건으로 가정하였다.

$$u = w = M_x = N_x = 0 \quad (33)$$

이와 같은 경계조건을 만족하는 허용함수는 다음과 같이 표현할 수 있다[2].

$$\Phi_u(\xi) = \sqrt{2} \cos i\pi\xi, \Phi_v(\xi) = \Phi_w(\xi) = \sqrt{2} \sin i\pi\xi \quad (34)$$

식 (34)를 식 (13)에 대입하고 이를 식 (12)에 대입하면 식 (27)의 질량행렬과 강성행렬을 구할 수 있다.

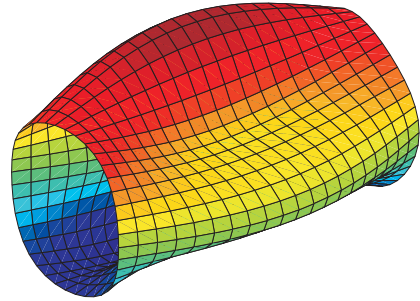


**Fig. 3** Aluminum cylindrical shell

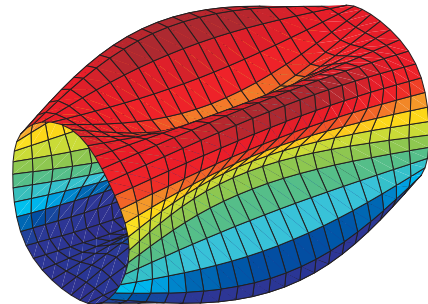
수치해석을 수행한 결과는 고유진동수가 479 Hz (3,1), 549 Hz (4,1), 767 Hz (2,1), 792 Hz (5,1), 1005 Hz (5,2), 1342 Hz (3,2), 1124 Hz (6,1)로 나타났다. 여기서 괄호 안의 숫자는 원주방향  $n$  값과 그 원주방향모드에서의 차수를 나타낸다. 처음 세 개의 고유진동 모드를 보여주는 것이 그림 6 이다.

실린더 쉘 구조물에 가속도계를 부착하고 충격

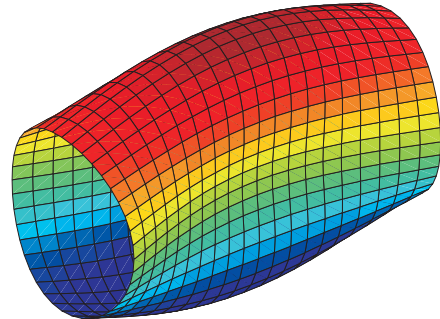
해머를 이용해 진동 시험을 수행하였다. 진동시험에 의해 얻어진 주파수 응답 곡선은 그림 7 과 같다.



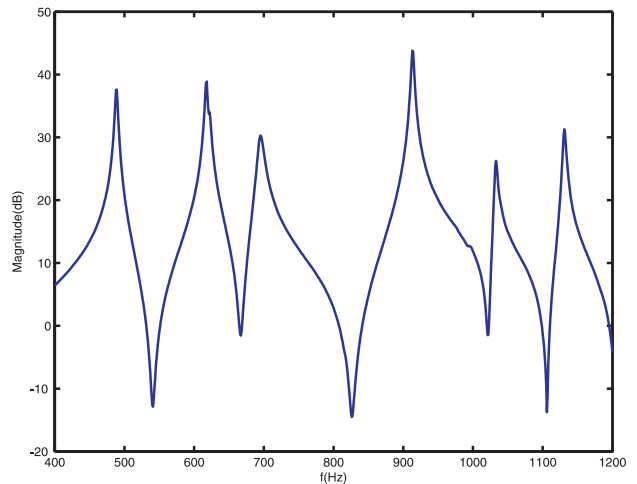
**Fig. 4** First mode shape: (3,1) 479Hz



**Fig. 5** Second mode shape: (4,1) 549 Hz



**Fig. 6** Third mode shape: (2,1) 767 Hz



**Fig. 7** Experimental frequency response curve

그림 7로부터 구한 고유진동수 값은 486 Hz, 616 Hz, 690 Hz, 912, 1028, 1128, 1254, 1310Hz 이다. 앞의 이론값과 비교하였을 때 조금 차이가 남을 알 수 있는데, 양단의 플랜지와 원판이 완벽한 Shear Diaphragm 경계조건을 형성하지 못하는 것에서 비롯되는 것으로 판단된다.

## 6. 제어기 설계 및 실험

고유 진동 모드를 제어하기 위해 그림 8 과 같이 두 개의 MFC 액츄에이터를 원주 방향으로 부착하였다. 원주 방향으로 부착한 이유는 반경대 길이비가 낮아 그림 4 부터 6 에서 나타나듯이 원주 방향 모드가 현저하게 나타나기 때문이다. 본 연구에서 사용한 MFC 작동기는 Smart Material 사[9]의 MFC 작동기 M8557S1 으로 작동기와 감지기가 동시에 장착되어 있는 작동기로서, PZT 형태는 Navy Type II 이다. 전체 크기는 110mm × 75mm 이며, 작동기 부분은 85mm × 50mm, 감지기 부분은 85mm × 3.5mm 이다. 그 외의 물성치값은  $E_1 = 30.34 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 15.86 \text{ GPa}$  (Electrode 방향),  $\nu_{12} = 0.31$ ,  $\nu_{21} = 0.16$ ,  $G_{12} = 5.52 \text{ GPa}$  으로 주어졌다. MFC 작동기와 같이 압전작동기의 가장 중요한 파라미터는 압전상수인데, MFC 작동기는  $d_{33}$  를 이용한다. 따라서 기존의  $d_{31}$  을 이용하는 압전작동기에 비해 작동력이 배가되는 효과를 줄 수 있다. 사양서에서  $d_{33} = 4.6 \times 10^2 \text{ pm/V}$  로 주어져 있다.



Fig. 8 MFC Actuators

식 (25)와 (29)로 표현되는 운동방정식과 센서방정식은 수 많은 고유 모드를 포함하고 있어 제어기 설계에 적합하지 못하다. 이론 결과와 실험 결과에서 알 수 있듯이 고유진동수 값이 높아 디지털 제어기를 이용해 많은 모드를 제어하는 것은 불가능하다. 따라서 보다 효율적인 능동진동제어기 설

계를 위해 축소된 동적 모델이 필요하다. 본 연구에서는 먼저 각  $n$  에 대한 고유치 문제를 해석하고 최저차 모드에 대한 정보를 획득한 후 이를 이용해 각  $n$  번째 원주 모드 운동방정식을 모달 방정식으로 변환하였다. 이들 모달 방정식을 최저차 고유 모드부터 재배치하면 다음과 같은 모달 운동 방정식이 유도된다.

$$\ddot{p} + 2Z^* \Omega^* \dot{p} + \Lambda^* p = B_a^* v_a \quad (34)$$

$$v_s = C_p^* p$$

여기서  $p = [p_{11} \ p_{12} \ p_{21} \ p_{22} \ \dots \ p_{n1} \ p_{n2}]^T$  이며 진동 모드에 대한 일반 좌표계를 나타낸다.  $Z^*$  는 각 모드에 대한 감쇠계수로 이루어진 행렬,  $\Omega^*$  는 고유진동수로 이루어진 대각 행렬, 그리고  $\Lambda^*$  는 고유진동수의 제곱으로 이루어진 대각 행렬이다.  $B_a^*$  와  $C_p^*$  는 고유벡터를 이용해 재계산되고 재배치된 영향행렬과 센서행렬이다. 동일한 고유진동수에 대해 sine 과 cosine 모드 두 개의 원주 모드가 존재하기 때문에 식 (34)의  $Z^*, \Omega^*, \Lambda^*$  는 다음과 같은 형태를 가지게 된다.

$$Z^* = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_n \end{bmatrix} \quad (35a)$$

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_n \end{bmatrix} \quad (35b)$$

$$\Lambda^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (35c)$$

식 (34)를 바탕으로 두 개의 고유 진동 모드를 제어하는 능동진동제어기를 설계해보자. 본 연구에서 채택한 능동진동제어기는 블록 역행렬 기법

을 이용하는 다중입출력 양변위되먹임제어기[12]이다. Kwak and Heo[12]의 연구 결과를 이용하면 두 개의 고유진동 모드를 제어할 수 있는 다중 입출력 양변위 되먹임 제어기는 다음과 같이 표현된다[12].

$$V_a^*(s) = B_a^* G^{1/2} \Lambda^* H_{ppf}(s) G^{1/2} C_s^* V_s(s) \quad (36)$$

여기서  $G$ 는 이득행렬을 나타내며

$$H_{ppf}(s) = \begin{bmatrix} H_1(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_2(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2(s) \end{bmatrix} \quad (37a)$$

이다. 여기서

$$H_i(s) = \frac{\omega_{fi}^2}{s^2 + 2\zeta_f \omega_{fi} s + \omega_{fi}^2}, \quad i = 1, 2 \quad (37b)$$

는 처음 두 개의 고유 진동 모드에 대한 PPF 제어기를 나타낸다. 본 연구에서는 각 PPF 제어기의 필터 주파수를 실험에서 구한 고유진동수에 맞추었다. 알루미늄 쉘의 제원, MFC 제어기, 전하앰프와 파워앰프의 제원을 대입하고 이득행렬을 설정한 후 다음과 같은 행렬값을 구했다.

$$C_s^* = 10^{-5} \begin{bmatrix} -0.2158 & 0 \\ 0.3942 & -0.1020 \\ -0.1314 & 0 \\ -0.0372 & -0.0254 \end{bmatrix} \quad (38a)$$

$$B_a^* G \Lambda = 10^5 \begin{bmatrix} -1.9873 & 3.6295 & -1.3862 & -0.3931 \\ 0 & -0.9391 & 0 & -0.2684 \end{bmatrix} \quad (38b)$$

능동 제어기의 적용을 위해서는 dSpace 사의 DS1102 를 사용하였다. 식 (36)으로 주어지는 능동진동제어기를 Simulink 블록 선도로 표현한 것이 그림 9이다.

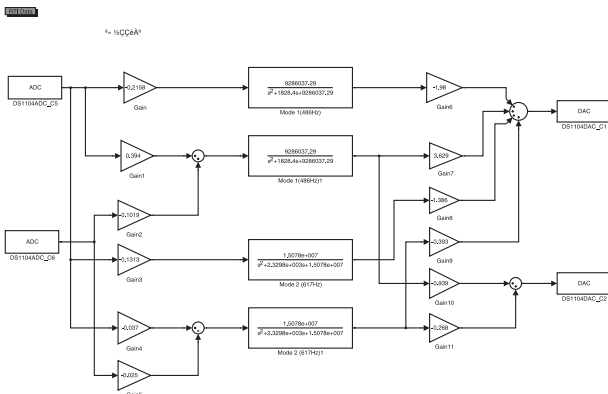


Fig. 9 Simulink Block Diagrams for MIMO PPF Control

이와 같은 제어기를 적용한 후 충격 해머를 이용해 얻은 주파수 응답 곡선이 그림 10 과 같다. 그림에서 알 수 있듯이 공진모드인 479Hz, 549Hz, 에서 공진 진폭 값이 약 20dB 감소함을 확인할 수 있다. 따라서 식 (36)으로 주어지는 PPF 제어기가 타당함을 알 수 있다. 그림 11 은 쉘 구조물에 충격을 가한 후 약 0.2 초후에 제어기를 구동시킬 경우의 시간 응답을 보여준다. 그림에서 알 수 있듯이 제어기 구동 후 진동 응답이 급격하게 감소함을 알 수 있다.

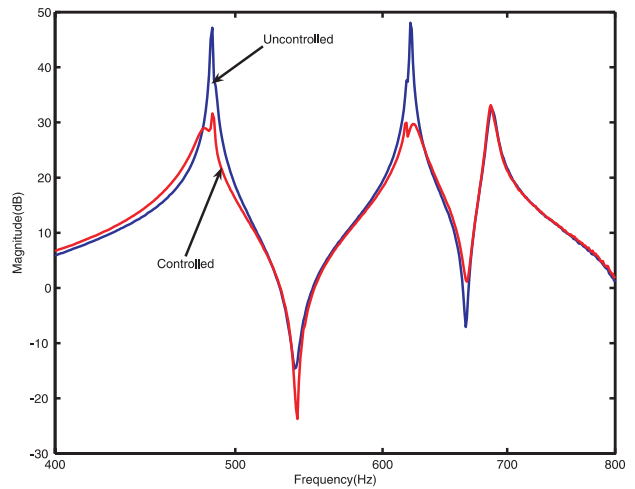


Fig. 10 Frequency Response Curves

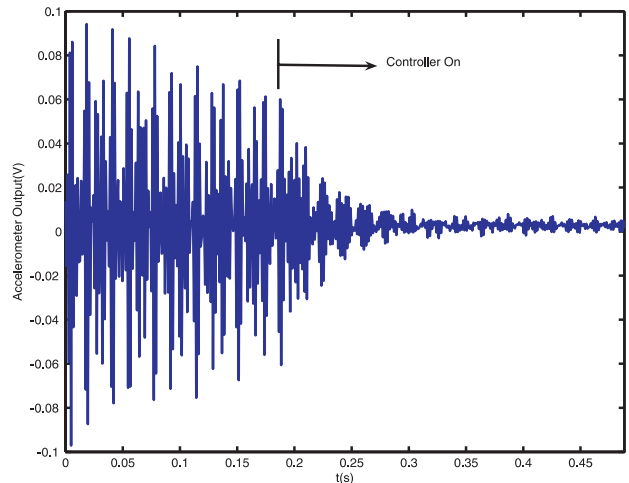


Fig. 11 Time History of Controlled Response

## 7. 토의 및 결론

본 연구에서는 MFC 작동기가 부착된 실린더형 쉘 구조물의 동적 모델링 방법과 능동진동제어기 설계 방법을 토의하였다. 동적 모델링을 위해서 Rayleigh-Ritz 방법을 이용하였으며, 액추에이터와



센서 방정식 유도를 위해 MFC 액추에이터를 pin-force 액추에이터로 가정하였다. 유도된 동적 모델을 근거로 고유진동 해석을 수행하고 그 결과를 실험 결과와 비교하였다. 비교 결과 첫 번째 고유진동수는 거의 일치하며 두 번째 고유진동수는 실험 결과가 좀 높게 나타남을 알 수 있었다. 제작된 셸 구조물의 경계조건이 플랜지와 뚜껑으로 인해 본 연구에서 가정한 Shear Diaphragm 보다는 더 구속이 더 있어 그런 결과가 나온 것으로 보인다.

각 원주방향의 모드에 대해 유도된 운동방정식과 센서방정식은 제어기 설계에 적합하지 않아 고유모드 벡터를 이용해 축소된 모달 방정식을 유도하였다. 그리고 능동진동제어를 위해 두 개의 MFC 액추에이터를 부착하고 두 개의 고유진동 모드에 대한 축소된 모달 방정식을 이용해 다중 입출력 양변위 되먹임 제어기를 설계하였다. 이 제어기를 실제 적용한 결과 이론으로 예측한 것과 같은 능동진동저감 효과가 확인되었다. 따라서 본 연구에서 유도한 운동방정식과 능동진동제어기가 실린더형 셸 구조물의 능동진동에 효과적임이 입증되었다.

## 후 기

본 연구는 국방과학연구소가 지원하는 수중운 동특화 연구센터의 수중/구조진동 연구실의 지원으로 이루어졌다. 관계자 여러분께 감사드린다.

## 참고문헌

- (1) Arnold, R.N. and Waburton, G.B., 1949, "Flexural Vibrations of the Walls of Thin Cylindrical Shells having Freely Supported Ends," Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 197, pp. 238-256.
- (2) Leissa, A., 1993, Vibration of Shells, Acoustical Society of America, Originally issued by NASA, 1973.
- (3) Yuan, J. and Dickinson, S.M., "The Free Vibration of Circularly Cylindrical Shell and Plate Systems," Journal of Sound and Vibration, Vol. 175, No. 2, pp. 241-263.
- (4) Markus, S., 1988, The Mechanics of Vibrations of Cylindrical Shells, Studies in Applied Mechanics 17, Elsevier.
- (5) Tzou, H.S. Zhong, J.P. and Hollkamp, J.J., 1994, "Spatially Distributed Orthogonal Piezoelectric Shell Actuator: Theory and Applications," Journal of Sound and Vibration, Vol. 188, pp. 363-378.
- (6) Lester, H.C. and Lefebvre, S., 1991, "Piezoelectric Actuator Models for Active Sound and Vibration Control of Cylinders," Proceedings of the Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and

- Vibration, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, pp. 3-26.
- (7) Sonti, V.R. and Jones, J.D., 1991, "Active Vibration Control of Thin Cylindrical Shells Using Piezoelectric Actuators," Proceedings of the Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, pp. 27-38.
- (8) Clark, R.L. and Fuller, C.R., 1991, "Active Control of Structurally Radiated Sound from an Enclosed Finite Cylinder," Proceedings of the Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, pp. 380-402.
- (9) <http://www.smart-material.com>
- (10) Sohn, J.W., Kim, H.S. and Choi, S.B., 2006, "Dynamic Modeling and Vibration Control of Smart Hull Structure," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 16, No. 8, pp. 840-847.
- (11) M. K. Kwak, 1995, "Active Vibration Suppression of Smart Structures Using Piezoelectric Materials," Journal of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 5, No. 3, pp. 292-302.
- (12) M. K. Kwak and S. Heo, 2007, "Active vibration control of smart grid structure by multiinput and multioutput positive position feedback controller", Journal of Sound and Vibration, Vol. 304, pp. 230-245.