

# 구속조건을 가진 최적화기법을 이용한 골조구조물의 유한요소모델 개선기법 Finite Element Model Updating of Framed Structures Using Constrained Optimization

유은종† · 김호근\*

Yu, Eun Jong and Kim, Ho Geun

**Key Words** : Finite Model Element (유한요소모델), Model Updating(모델 개선), BVLS, Regularization(정규화), Sensitivity matrix (민감도행렬), Constrained optimization (구속최적화)

## ABSTRACT

An Improved finite element model updating method to address the numerical difficulty associated with ill-conditioning and rank-deficiency. These difficulties frequently occur in model updating problems, when the identification of a larger number of physical parameters is attempted than that warranted by the information content of the experimental data. Based on the standard Bounded Variables Least-squares (BVLS) method, which incorporates the usual upper/lower-bound constraints, the proposed method is equipped with new constraints based on the correlation coefficients between the sensitivity vectors of updating parameters. The effectiveness of the proposed method is investigated through the numerical simulation of a simple framed structure by comparing the results of the proposed method with those obtained via pure BVLS and the regularization method. The comparison indicated that the proposed method and the regularization method yield approximate solutions with similar accuracy.

## 1. 서 론

유한요소모델개선(finite element model updating)은 구조물에서 측정된 계측치로부터 그 구조물의 거동을 모사할 수 있는 해석모델을 얻어내는 기법으로서 구조물에 진동제어(vibration control)나 손상탐지(damage detection)기법을 적용하기 위해 필요하다. 모델개선기법은 크게 직접법(direct method)와 반복법(iterative method)로 나뉘어진다. 직접법은 주로 고유진동수와 모드형상 같은 모드정보를 사용하여 강성행렬, 혹은 질량행렬의 계수를 구해내는 방법으로 반복계산이 요구되지 않는다. 하지만 유한요소해석프로그램을 사용하여 해석모델을 모델링한 경우 개선된 강성행렬이나 질량행렬을 얻기 위해 어떠한 부재의 어떠한 값을 수정해야 하는지 알기 힘들다는 단점이 있

다. 이에 반해 반복법의 경우 해석모델에 사용된 부재의 속성값(예를 들어 휨강성)을 변수로 두고 계측치와 해석치의 차이를 최소화시키는 값을 최적화이론을 통해 구하는 방법이다. 이러한 변수와 구조물의 반응은 일반적으로 선형관계가 아니므로 반복계산이 필요하게 된다. 반복법에서는 계측치로부터 얻은 모드정보 혹은 주파수응답함수가 사용될 수 있다.

유한요소모델개선은 계측치로부터 구조물의 특성치를 얻어내는 역해석의 일종이다. 수치적으로 역해석의 특징은 ill-posed 문제일 경우가 많다는 점이다. 일반적으로 계측치에서 구조물식별을 통해 얻을 수 있는 모드의 수는 한정되어 있으므로 모델개선을 위해 모드정보를 사용할 경우 수치적으로 미지수의 수보다 조건식의 수가 작은 계수부족(rank deficiency)라는 어려움에 직면하게 된다. 하지만 이론적으로 주파수응답함수는 보다 많은 모드의 정보를 가지고 있으므로 이러한 현상을 완화시킬 수 있다.

역해석에서 흔히 나타나는 또 다른 수치적인 어려움은 불량조건(ill-conditioning)의 발생이다. 불량조건은 선택된 미지수(즉 개선변수)중 두 개 이상의 미지수에 해당하는 민감도 벡터가 유사하여 선형종속(linear dependence)에 가깝게 될 때 발생한다. 불량조건인

† 교신저자: 한양대학교 건축공학부 조교수, 공학박사  
E-mail : eungongyu@hanyang.ac.kr  
Tel : (02) 2220-0312

\* 한양대학교 건축공학부 석사과정

문제의 경우 입력치가 조금만 변화하여도 결과가 크게 변화하게 되는데, 모델개선의 경우 계측치에 포함된 잡음(noise)에 의해 개선변수의 값이 아주 크게 변화하여 때때로 물리적으로 불가능한 값(예를 들어 강성행렬이나 질량행렬이 음수가 되거나 아주 큰 값을 가지게 되는) 현상을 나타내게 된다. 이러한 현상이 일어나지 않게 하기 위해서는 개선변수의 수를 제한하여 서로 비슷한 영향을 주는 변수를 여러 개 선택하지 않도록 해야 하지만 이 경우 적절한 개선변수의 선택과 선택되지 않은 변수에 어떠한 값을 줄 것인지 결정하기 위해 여러 번의 시행착오가 필요하다는 단점이 있다.

본 연구에서는 이러한 수치적인 어려움을 해결할 수 있는 새로운 모델개선기법을 제안하였다. 즉 수정 후 개선변수가 비현실적인 값을 가지는 것을 막기 위해 각 변수마다 상한치와 하한치를 주어 변화할 수 있는 최대범위를 제한하였으며, 또한 불량조건인 경우 흔히 발생하는 현상, 즉 구조물의 반응에 비슷한 영향을 주는 개선변수들 중 일부의 값만이 급격히 변화하는 것을 막기 위해 각 개선변수에 해당하는 민감도벡터들 사이의 상관계수를 조사하여 비슷한 효과를 가지는 변수들 사이의 상대적인 변화량을 제한하였다. 제안한 모델개선기법은 민감도에 근거한 반복법으로서 구조물의 각 부재의 속성을 직접적으로 규명할 수 있다. 본 논문에서는 주파수응답함수를 사용할 때 이러한 구속조건을 가진 모델개선기법을 유도하고 수치예제를 통해 제안된 모델개선기법의 정확도를 검증하였으며 그 결과를 정규화기법과 같은 다른 기법을 사용한 경우와 비교하였다.

## 2. 모델개선기법의 유도

### 2.1 주파수응답함수를 사용하는 모델개선기법

주파수 영역에서  $n$ 개의 자유도를 가지는 시스템의 운동방정식은 식(1)과 같이 표시할 수 있다.

$$\mathbf{B}(\omega)\mathbf{x}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{B}(\omega) = -\omega^2\mathbf{M} + \omega\mathbf{C} + \mathbf{K}$  는 질량행렬  $\mathbf{M}$ , 감쇠행렬  $\mathbf{C}$ , 강성행렬  $\mathbf{K}$ 로부터 계산되는 동적강성행렬이고,  $\mathbf{x}(\omega)$ 는 변위벡터,  $\mathbf{f}(\omega) = \mathbf{L} \cdot f(\omega)$ 는 외력벡터로서 하중함수  $f(\omega)$ 와 외력에 의해 가진되는 자유도를 나타내는 하중영향벡터  $\mathbf{L}$ 로부터 구해진다. 만일

이 시스템의 입력치인  $\mathbf{f}(\omega)$ 와 출력치인  $\mathbf{x}(\omega)$  대신에 그 비인 전달함수  $\mathbf{H}(\omega)$ 가 사용된다면 식(1)은 식(2)로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{B}(\omega)\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{L} \quad (2)$$

식(2)에서 동적강성행렬을 구하려고 하는 개선변수벡터  $\mathbf{p}$ 의 함수  $\mathbf{B}(\mathbf{p}, \omega)$ 로 나타내고 실험에서 구한 전달함수  $\tilde{\mathbf{H}}(\omega)$ 를 사용할 경우 오차벡터  $\boldsymbol{\epsilon}$ 는 다음의 식(3)과 같이 나타낼 수 있으며 모델개선은 식(4)와 같이 목적함수인 오차벡터  $\boldsymbol{\epsilon}$ 의 L2 노름을 최소로 만드는 개선변수  $\mathbf{p}$ 를 구하는 최적화문제로 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{p}, \omega) = \mathbf{L} - \mathbf{B}(\mathbf{p}, \omega)\tilde{\mathbf{H}}(\omega) \quad (3)$$

$$\text{Minimize } \|\boldsymbol{\epsilon}\|^2 = \|\mathbf{L} - \mathbf{B}(\mathbf{p}, \omega)\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\|^2 \quad (4)$$

목적함수를 최소화하는 개선변수  $\mathbf{p}$ 는 목적함수의 gradient 함수의 근이다.  $\mathbf{B}(\mathbf{p}, \omega)$ 는 일반적으로 비선형함수이므로 식(5)과 같은 1차항까지 포함하는 테일러급수를 사용하여 선형화하고 gradient를 0으로 놓고 정리하면 식(7)과 같은 최소자승식이 구해진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{p}) &= \mathbf{B}(\mathbf{p}_0) + \sum_{i=1}^k \Delta p_i \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{p}_0) + \mathbf{B}_1(\mathbf{p}_0)\Delta p_1 + \mathbf{B}_2(\mathbf{p}_0)\Delta p_2 + \dots + \mathbf{B}_k(\mathbf{p}_0)\Delta p_k \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{p}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{p})}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{B}_i(\mathbf{p}_0, \omega)\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Delta p_i = \mathbf{L} - \mathbf{B}(\mathbf{p}_0, \omega)\tilde{\mathbf{H}}(\omega) \quad (7)$$

### 2.2 구속조건

식(7)은 비선형함수의 근을 구하기 위해 Newton법을 사용할 경우 각 반복단계의 증분치  $\Delta\mathbf{p}$ 를 구하는 식이다. 아무런 구속조건이 사용되지 않을 경우 각 단계의 증분치는 최소자승법과 같이 가상역행렬(pseudo inverse)을 통해 구한다. 하지만 이 경우 계수부족이나 불량조건과 같은 수치적인 문제 때문에 비현실적인 값이 얻어지는 경우가 많다. 계수부족이나 불량조건에

영향을 받을 경우 일부 부재의 강성이나 질량이 음수가 얻어지는 등 물리적으로 불가능한 값이 나타나거나 서로 비슷한 영향을 주는 부재중 일부 부재의 값만이 커지거나 작아지는 현상이 나타난다.

이러한 문제를 해결하기 위해 본 연구에서는 각 반복 단계에서 다음의 식(8)과 식(9)같은 두 종류의 구속조건을 사용하였다.

$$\mathbf{p}_i \leq \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_u \quad (8)$$

$$|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j| \leq 1 - \mathbf{C}_{ij} \quad \text{if } \mathbf{C} > c_{lim} \quad (9)$$

여기서  $\mathbf{C}_{ij} = \text{COR}(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j)$

식(8)은 개선변수가 비현실적인 값이 되는 것을 막기 위해 각 변수마다 상한치와 하한치를 주고 그 사이의 값만이 얻어지도록 최대범위를 제한한 식이며, 식(9)는 구조물의 반응에 비슷한 영향을 주는 개선변수들 중 일부의 값만이 급격히 변화하는 것을 막기 위해 각 개선변수에 해당하는 민감도벡터들 사이의 상관계수(coefficient of correlation)를 조사하여, 만약 어떠한 두 변수  $\mathbf{p}_i$ 와  $\mathbf{p}_j$ 에 해당하는 민감도벡터  $\mathbf{S}_i$ 와  $\mathbf{S}_j$  사이의 상관계수  $\mathbf{C}_{ij}$ 가 미리 정해진 값  $c_{lim}$ 보다 클 경우 두 변수의 값의 차이를  $1 - \mathbf{C}_{ij}$ 로 제한한다.

식(8)과 식(9)와 같은 구속조건을 만족시키는 식(7)의 해는 구속최소자승법의 일종인 BVLS (boundary variables least-squares)기법을 통해 구할 수 있다. 이를 통해 각 반복단계에서 증분치를 구할 수 있으며 수렴조건을 만족시킬 때까지 식 (10)과 같이 반복계산을 통해 최종해를 구한다.

$$\mathbf{p}^{(v+1)} = \mathbf{p}^{(v)} - \Delta \mathbf{p} \quad (10)$$

### 3. 수치모델을 사용한 검증

#### 3.1 수치모델

수치모델을 통해 제안된 모델개선기법의 유효성을 검사하였다. 그림 1과 같이 L형의 평면을 가지는 2층 골조건물을 유한요소해석프로그램인 SAP2000을 사용하여 모델링하고 2층의 B1지점에 백색잡음하중을 가진할 때 각 층의 B2지점에서

$u$ ,  $v$ ,  $\theta$  방향의 가속도반응을 얻었다. 이때 해석모델에 사용된 기둥과 보의 유효휨강성계수에 임의의 값을 주고, 해석프로그램으로부터 얻어진 6채널의 가속도반응으로부터 본 연구에서 제안한 모델개선기법을 적용하여 기둥과 보부재의 유효휨강성계수를 예측하였다. 본 연구에서 제안된 방법을 통해 얻어진 결과의 정확도(즉 참값과의 오차)를 구속조건으로 식 (8)만을 적용(BVLS)하여 얻어진 결과, 그리고 모델개선문제에서 해결책으로 많이 사용되고 있는 정규화(regularization) 기법을 적용하였을 때 얻어진 결과와 비교하였다.

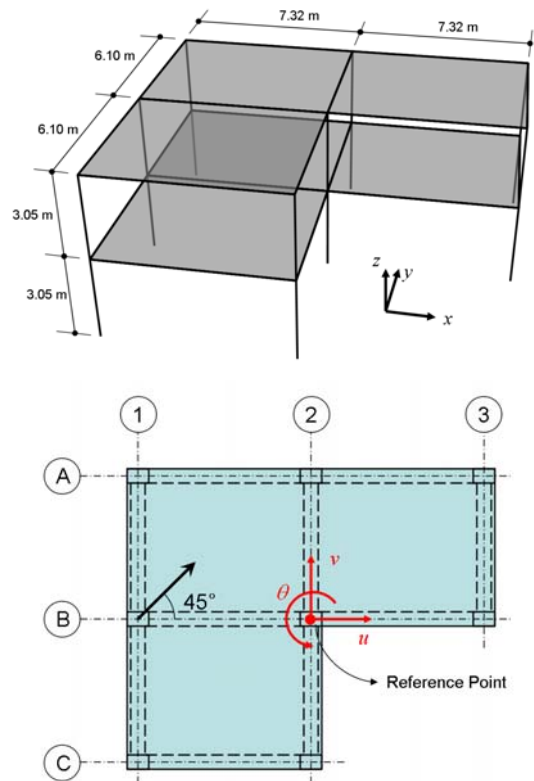


그림 1. 수치모델

모델건물의 모든 부재는 탄성계수가 24821MPa인 콘크리트부재로서 기둥의 치수는 46cm×30cm, 보는 25cm×40cm 로 가정하였다. 일반적인 골조건물을 모델링할 때와 같이 각층의 보부재의 횡방향변위가 모두 같다는 강막(rigid diaphragm)가정을 사용하였다. 슬래브부재의 강성은 해석모델에 포함되지 않았으나 질량은 산정하여 각층 바닥에 집중되어 있다고 가정하였다. 감쇠비는 모든 모드에서 5%로 가정하였다.

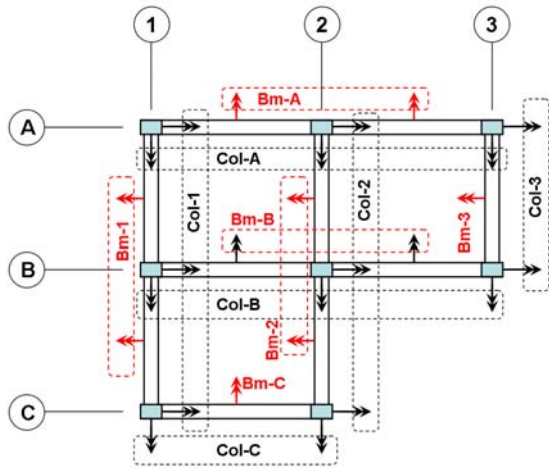


그림 2. 부재강성의 그룹핑

모델건물에는 모두 16개의 기둥과 20개의 보가 사용되었으나 이를 그림 2와 같이 라인별로 적절히 그룹핑하여 각각 12개의 그룹(평면프레임 3개 × 2방향 × 2층)으로 나누고 각 그룹의 요소는 모두 같은 강성을 가지는 것으로 가정하였다.

이렇게 정한 총 24개 그룹의 부재의 유효휨강성계수으로는 0.3에서 1.15의 범위에서 발생시킨 난수를 사용하였다. 모델건물 각 부재의 강성은 전단면 강성  $EI_g$ 에 표 1과 같은 유효휨강성계수를 곱한 값이며 표 2는 이렇게 모델링된 해석모델에서 구한 비감쇠 고유진동수이다.

표 1. 모델건물에 사용된 유효휨강성계수

	Line A	Line B	Line C	Line 1	Line 2	Line 3
2층 보	0.457	0.954	0.966	0.955	0.426	0.922
2층 기둥	0.805	0.973	0.905	0.597	1.017	0.385
1층 보	0.872	0.844	0.572	0.888	1.046	0.653
1층 기둥	0.427	0.646	0.819	0.621	0.888	0.348

표 2. 모델건물의 비감쇠고유진동수

모드	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
주 변형방향	y-trans.	rotation	x-trans.	y-trans.	rotation	x-trans.
고유진동수 (Hz)	1.66	1.99	2.25	4.81	5.84	6.61

전달함수는 그림 1과 같이 지붕층 기둥 B1기둥에 45방향으로 가진 백색잡음하중과 각층의 B2기둥에서 측정된  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ 방향의 가속도반응으로부터 식 (12)를 통해 산정하였다. 이때 입력치인 백색잡음신호와 출력치인 가속도반응 모두에 각 최대치의 5%에 해당하는 백색잡음을 측정노이즈로 가

정하여 원 신호에 더한 후 전달함수를 산정하였다.

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{S_{xf}}{S_{ff}} = \frac{x(\omega)\bar{f}(\omega)}{f(\omega)\bar{f}(\omega)} \quad (12)$$

실제계산에는 Matlab의 함수인 'tfestimate'를 사용하여 1 Hz부터 9 Hz까지의 164개 주파수에 대하여 평가된 값을 사용하였다. 또한 식 (7)의  $B_i$ 는 모델건물의 강성행렬을 구해주는 Matlab 코드를 만든 후 유한차분법을 사용하여 구하였다.

### 3.2 모델개선결과의 비교

그림 3에 본 연구에서 제안된 모델개선기법 (BVLSrc로 표시함)의 비교대상인 BVLS와 정규화기법 (Regularization)을 포함한 3종류의 모델개선법 적용시 나머지벡터(residual vector)인  $\mathbf{d}$ (즉, 식 7의 우변항)와 각 반복계산단계에서의 증분치  $\Delta \mathbf{p}$ , 그리고 참값  $\mathbf{p}^*$ 와의 오차의 노름(norm)의 변화를 각 반복계산단계별로 나타내었다. 모든 경우 개선변수는 12개의 기둥강성비와 12개의 보강성비이며 각 개선변수들의 초기값은 1.0으로 가정하였다. BVLSrc와 BVLS에서 각 개선변수의 하한치 및 상한치는 각각 0.15와 1.5를 사용하였으며, BVLSrc에서 식 (9)의  $c_{lim}$ 으로는 0.5를 사용하였다. 정규화기법으로는 Tikhonov Regularization을 사용하였는데 이때 최적정규화계수는 L형 곡선의 꼭지점을 곡률의 변화를 통해 구하는 Hansen과 O'Leary의 방법을 사용하여 구하였다.

그림 3의 첫 번째 그래프에 나타난 바와 같이 나머지벡터의 노름은 3가지방법 모두 비슷하게 줄어들지만 예측된 개선변수값의 정확도는 세 번째 그래프에서 볼 수 있듯이 BVLS의 경우가 가장 낮고 본 연구에서 제안한 방법과 정규화기법이 거의 비슷하게 나타나고 있다.

그림 4는 본 연구에서 제안한 방법을 사용하였을 경우 모델수정전 초기모델의 전달함수와 개선후 모델의 전달함수를 나타낸 그래프이다. 다른 두가지의 방법을 사용한 경우도 이와 거의 비슷한 그래프를 얻을 수 있었다. 실제로 표 3에서 나타난 것과 같이 개선후 모델로부터 얻은 각 모드의 고유진동수는 실제 모델에서 얻은 표 2의 값과 거의 정확하게 일치한다.

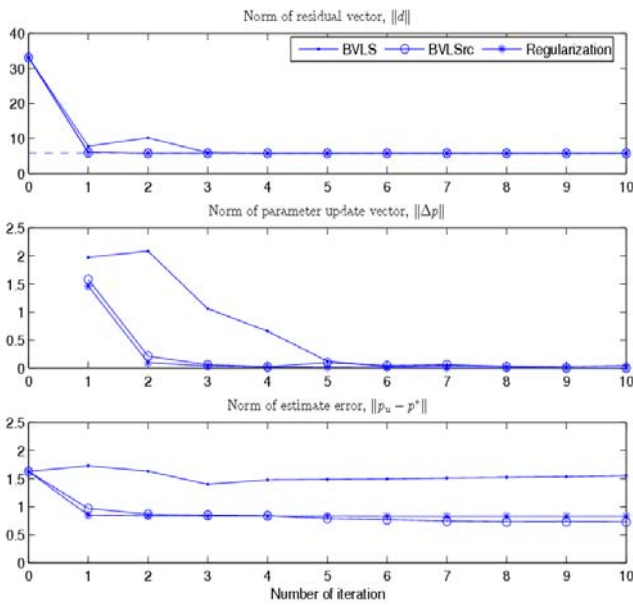
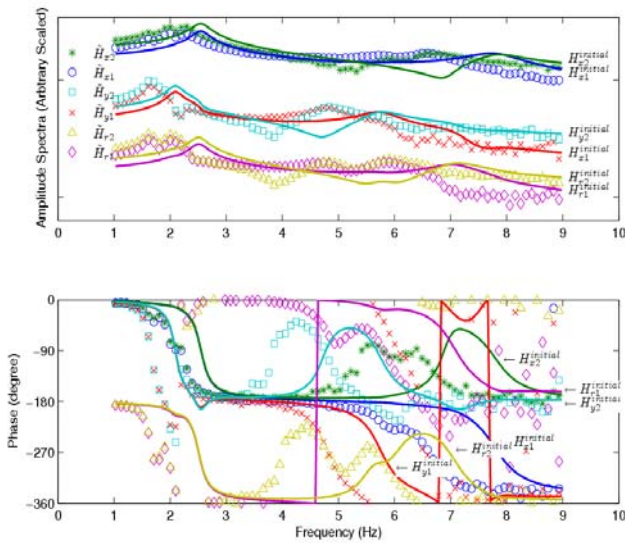


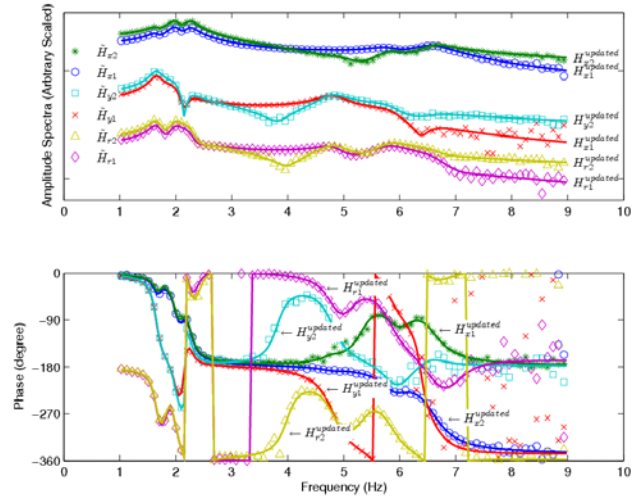
그림 3. 반복단계에 따른 노옴의 변화: (상)나머지 벡터의 노옴, (중)개선변수 증분치의 노옴, (하) 추정오차의 노옴

표 3. 개선된 모델의 고유진동수와 정해(표2)와의 비

Mode	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
BVLS/True	1.000	1.004	1.001	1.000	1.000	0.998
BVL Src/True	1.000	1.001	1.002	1.000	0.999	0.999
Regularization/ True	1.000	1.002	1.002	1.000	1.000	0.999



(a) 개선전 모델의 전달함수



(b) 개선후 모델의 전달함수

그림 4. 개선전후 모델의 전달함수의 비교

그림 5는 이들 세 가지 방법을 사용하여 구한 개선변수의 값을 참값과 비교한 그래프이다. 모든 경우 개선된 모델에 의한 전달함수에 큰 차이가 없음에도 불구하고 개선방법에 따라 변수값은 상당한 차이가 있음을 보여주고 있다. 이는 계측치로부터 얻을 수 있는 정보가 불충분하거나 부정확한 경우 즉, 계수부족이나 불량조건인 문제에서 목적 함수를 최소화시키는 해는 유일하지 않으며 따라서 각 변수의 정확한 값을 얻어 내는 것은 불가능하다는 사실을 반증한다. 정확한 변수의 값을 알기 위해서는 충분한 정보가 필요하다. 하지만 이것이 불가능할 경우 최선의 방법은 가능한 한 정확한 초기가정과 효과적인 수치적인 방법을 사용함으로써 이러한 불완전성을 보충하여 최대한 실제와 가까울 것으로 생각되는 해를 얻는 것이다.

그림 5에 나타난 것과 같이 대체로 본 연구에서 제안한 방법은 BVLS보다는 정확하며 정규화법과는 거의 비슷한 정도의 정확성을 가지고 있다. 두 번째 그래프에 표시한 숫자는 두 그룹에 해당하는 민감도 벡터 사이의 상관계수의 값이다. 여기서 볼 수 있듯이 상관계수값이 높아 두 그룹 부재가 전체 거동에 미치는 영향이 비슷한 경우 (예를 들어 2층 B라인 기둥과 B라인 보) BVLS에서는 두 값 한 값이 증가하여 상한치에 도달한 반면 다른 값은 실제 값보다 작게 평가되고 있다. 본 연구에서 제안한 방법의 경우 식 (9)에 의해 두 개선변수 값 사이의 상대적인 차이를 제한하여 서로 비슷한 값이 나타나게 하고 있다. 식 (9)의 효과는



비슷한 개선변수들을 비슷한 값을 가지게 하여 실제적인 개선변수의 수를 줄여 불량조건에 의한 영향을 줄이는데 있다.

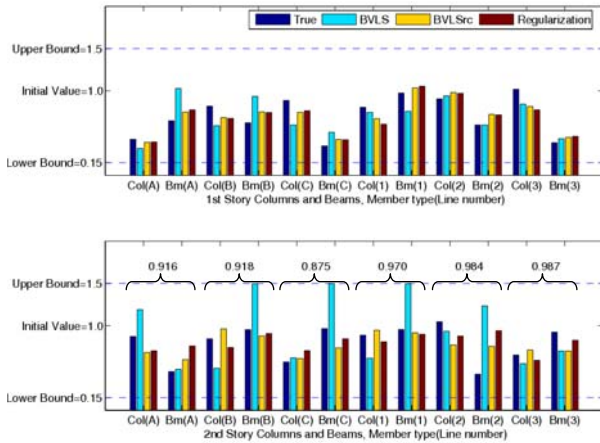


그림 5. 실제변수치와 개선변수치의 비교

#### 4. 결 론

본 연구에서는 유한요소모델개선시 흔히 발생하는 수치적인 어려움인 불량조건(ill-condition)을 완화시킬 수 있는 새로운 모델개선기법을 제안하였다. 제안된 기법은 각 개선변수에 해당하는 민감도행렬을 비교하여 전체구조물에 미치는 영향이 비슷한 개선변수들 사이의 상대적인 차이를 제한함으로써 실제 개선변수의 수를 줄여 불량조건에 의한 영향을 감소시킨다.

제안된 모델개선기법의 유효성을 검증하기 위해 유한요소해석프로그램을 사용하여 부정형의 평면을 가진 2층 골조건물의 강제진동실험을 시뮬레이션하고 여기서 얻은 전달함수로부터 모델건물의 기동과 보 요소의 유효휨강성계수를 본 연구에서 제안한 방법 및 기존에 사용되던 두가지 모델개선 방법을 사용하여 예측하고 그 결과를 비교하였다.

비교 결과 제안된 방법은 각 개선변수의 상한치와 하한치만을 준 BVLS보다 정확하게 각 변수의 값을 예측할수 있었으며 정규화법(regularization)에 의한 결과와 비슷한 정도의 정확도를 가지는 것으로 나타났다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Yu E, Wallace JW, Taciroglo E. "Parameter identification of framed structures using an improved finite element model - updating method — Part I: Formulation and verification.", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2007, 35, pp.619-639
- (2) Baruch M, Bar-Itzhack IY., "Optimally weighted orthogonalization of measured modes.", *AIAA Journal* 1978, 16(4), pp. 346-351.
- (3) Friswell MI, Mottershead JE., *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- (4) Zhang QW, Chang CC, Chang TY., "Finite element model updating for structures with parametric constraints.", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 2000, 29, pp.927-944.
- (5) Stark PB, Parker RL. "Bounded variable least squares: An algorithm and application.", *Journal of Computational Statistics*, 1995, 10, pp.129-141.
- (6) Friswell MI, Mottershead JE, Ahmadian H., "Finite-element model updating using experimental test data: parameterization and regularization.", *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A2001*, 359, pp.169-186.
- (7) D' Ambrogio W, Fregolent A "On the use of consistent and significant information to reduce ill-conditioning in dynamic model updating", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1998, 12(1), pp. 203-222.
- (8) Hansen PC, O'Leary DP, "The use of L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems", *SIAM journal of scientific computing*, 1993, 14(6), pp.1487-1503