

# 크랙을 가진 유체유동 회전 외팔 파이프의 안정성 해석

## Stability of Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid with Crack

김동진\* · 윤한익\*\* · 손인수\*\*

Dong-Jin Kim, Han-Ik Yoon and In-Soo Son

**Key Words** : Open Crack (개구형 크랙), Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid (유체이송 회전 외팔파이프), Stability (안정성), Flexible Matrix (유연행렬).

### ABSTRACT

In this paper, the stability of a rotating cantilever pipe conveying fluid with a crack is investigated by the numerical method. That is, the influences of the rotating angular velocity, mass ratio and crack severity on the critical flow velocity for flutter instability of system are studied. The equations of motion of rotating pipe are derived using the Euler beam theory and the Lagrange's equation. The crack section of pipe is represented by a local flexibility matrix connecting two undamaged pipe segments. The crack is assumed to be in the first mode of fracture and to be always opened during the vibrations. Generally, the critical flow velocity for flutter is proportional to the angular velocity and the depth of crack. Also, the critical flow velocity and stability maps of the rotating pipe system as a function of mass ratio for the changing each parameter are obtained.

### 1. 서 론

유체유동을 갖는 파이프 구조물은 일반적으로 산업현장의 배관계 및 기계장치 등에서 흔히 접할 수 있다. Benjamin 은<sup>(1)</sup> 비보존계 시스템에서 발생하는 플러터 불안정의 개념을 제시하였고, Paidoussis 는<sup>(2)</sup> 유체유동 파이프의 진동특성과 안정성에 관한 많은 연구자들의 연구결과를 집대성하였다. 최근에는 송수관 안정성 문제에 있어서 고유치 분기와 플러터 불안정 모드의 정립을 위하여 수평 외팔 송수관 모델에 대한 고유치 분기의 차수와 이에 상응하는 플러터 모드 형상을 확고히 정의하기도 하였다<sup>(3)</sup>. 일반적으로 크랙과 같은 결함을 갖는 구조물은 그 위치에서 강성저하가 발생하며, 일반적으로 회전하는 구조물의 동특성은 회전하지 않는 그것의 동특성과는 매우 다른 현상을 보이며 이러한 회전운동은 회전 구조물의 강성 및 고유진동의 특성변화를 가져온다. 회전요소를 포함하는 파이프 구조물의

안정성을 판단하는 것은 로봇 팔이나 로봇 매니퓰레이터 등의 끝점제어 등 여러 분야에서 필요하며, 그 응용이 가능하다. 회전하는 외팔보의 진동해석에 관한 연구는 많은 연구자들에 의해 수행되어져 왔으며<sup>(4,5)</sup>, 특히 Yoo 등은<sup>(4)</sup> 복합변형변수를 이용한 다양한 회전 구조물의 진동특성에 관한 연구를 수행하여 복합변형변수를 이용한 회전 구조물의 동적 모델링의 타당성을 규명하였다. Panussis 등은<sup>(6)</sup> 회전하는 유체튜브의 면외 및 면내방향의 진동특성에 미치는 회전각속도와 유체의 영향에 대한 연구를 수행하여 계의 안정성 판단에 대한 근거를 제시하였다. Liu 등은<sup>(7)</sup> 파이프 형태의 중공축에 크랙이 존재하는 경우 크랙의 크기에 따른 보의 동적특성을 연구하였다. 최근, 회전하는 유체유동 파이프의 플러터 불안정을 유발하는 임계유속에 관한 연구 등 회전 구조물에 대한 많은 연구결과들이 발표되어지고 있다<sup>(8)</sup>.

하지만 이상의 많은 연구들에서는 크랙, 이송유체, 그리고 회전 요소에 의한 파이프 구조물의 안정성에 관한 연구는 찾아보기 힘들다. 따라서 이 연구에서는 회전하는 유체유동 외팔 파이프에 크랙형태의 결함이 존재하는 경우에 크랙과 유속, 그리고 회전운동의 연성관계가 파이프 시스템의 안정성에 미치는 영향을 수치해석 하였다. 특히, 계의 플러터 불안정을 유발하는 플러터 임계유속과 회전속도의 상관관계 및 크랙의 영향을 비교, 고찰하였다.

\* 동의대학교 대학원 기계공학과

정회원, 동의대학교 기계공학과

\*\* E-mail : isson92@deu.ac.kr

Tel : (051) 890-2239, Fax : (051) 890-1932

## 2. 이론

Fig. 1은 이 연구에서 해석 예제로 사용한 반경  $r$ 의 축에 고정되어 회전운동을 하는 크랙을 가진 유체유동 회전외팔 파이프를 나타낸 것이다. 중력의 영향은 고려하지 않았으며, 파이프의 해석은 오일러-베르누이 보 이론을 적용하였다. Fig. 1에서  $x$ 는 외팔보의 고정점  $O$ 로부터 변형 전 임의의 질점  $P_0$ 까지의 거리를 나타내며,  $s$ 는 변형 전 임의의 질점  $P_0$ 에서 변형 후의 질점  $P$ 까지 변형할 때 외팔보가 인장된 길이를 나타낸다. 또  $x_c$ 는 크랙의 위치를 의미한다. Fig. 2는 크랙이 존재하는 부분의 파이프 단면을 표현한 것이다. 여기서  $a_c$ ,  $2b$ 는 각각 크랙의 깊이와 길이이다. 또  $\theta_c$ 는 전체 크랙의 반각이다.

### 2.1 크랙 모델링

같은 하중이 작용하는 구조물에서도 크랙이 존재하는 경우에 구조물의 자체 탄성 변형에너지 외에 크랙에 의한 변형에너지가 존재하고 이 부가되는 에너지만큼 추가적인 변형이 더 발생하게 된다. Castigliano의 정리를 이용하여 크랙위치에서 크랙으로 인하여 부가되는 변위가 포함된 유연행렬은 다음과 같이 구할 수 있다<sup>(7)</sup>.

$$C_{\bar{i}\bar{j}} = \frac{\partial^2}{\partial P_{\bar{i}} \partial P_{\bar{j}}} \left[ \int_{-b}^b \int_0^{a_c} J \, dx \, dz \right] \quad (1)$$

여기서  $\bar{i}, \bar{j}$ 는 각 힘의 방향을 의미하며 변형률 에너지 밀도함수  $J$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

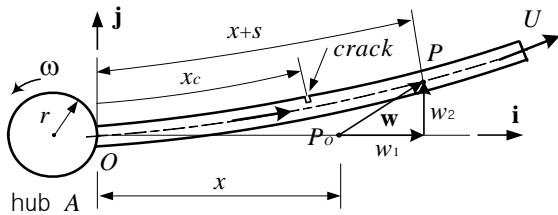


Fig. 1 Original configuration of rotating cantilever pipe conveying fluid with crack

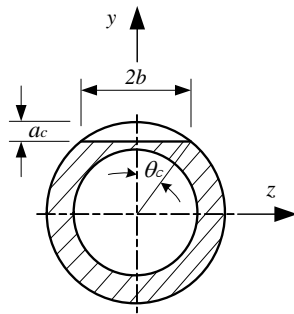


Fig. 2 Cross section of cracked pipe

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} (K_{IP} + K_{IM})^2 \quad (2)$$

여기서  $K_{IP}$ 와  $K_{IM}$ 은 각각 제 I 파괴모드에서의 축방향 힘  $P_a$ 와 굽힘 모멘트  $M_b$ 에 의한 응력집중계수를 의미한다. 또  $\nu$ 는 Poisson의 비를 나타내며, 식 (2)의 응력집중계수는 각각 다음과 같다<sup>(7)</sup>.

$$K_{IP} = \frac{P_a}{2\pi R t_p} \sqrt{\pi R \theta_c} F_t(\theta_c), \quad (3)$$

$$K_{IM} = \frac{M_b}{\pi R^2 t_p} \sqrt{\pi R \theta_c} F_b(\theta_c)$$

여기서  $t_p$ 는 파이프의 두께를 의미하며,  $R = (R_o + R_i)/2$ 이다. 또  $F_t$ 와  $F_b$ 는 참고문헌 (8)에 잘 나타나 있다.

이 연구에서는 축방향과 굽힘방향의 힘과 모멘트의 영향만을 고려하였다. 회전 및 병진스프링 상수  $K_R$ 과  $K_T$ 는 각각 다음 식으로 계산된다.

$$K_T = \frac{C_{55}}{C_{11}C_{55} - C_{15}C_{51}}, \quad K_R = \frac{C_{11}}{C_{11}C_{55} - C_{15}C_{51}} \quad (4)$$

여기서  $C_{15}$ 와  $C_{51}$ 의 축방향과 굽힘방향의 연성효과는 전체 시스템의 동특성에 극히 미소한 영향을 미치기 때문에 이 연구에서는 각 방향에서의 연성효과를 무시한  $K_T = C_{11}^{-1}$ ,  $K_R = C_{55}^{-1}$ 를 수치해석에 사용하였다.

### 2.2 파이프와 유체의 에너지식

Fig. 1에서 변형에 따른 파이프의 임의의 질점  $P$ 의 속도는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{P/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} + \mathbf{w}) \quad (5)$$

여기서  $\mathbf{v}_O$ 와  $\mathbf{v}_{P/A}$ 는 각각  $O$ 점의 속도와  $P$ 점의  $A$ 점에 대한 상대속도를 나타내며,  $\boldsymbol{\omega}$ 는 고정축의 회전 각속도 벡터를 나타내고 있다. 따라서 외팔 파이프 및 유체의 운동에너지와 포텐셜 에너지를 구하면 각각 다음과 같다.

$$T_{pipe} = \frac{1}{2} m \left[ \int_0^{x_c} \mathbf{v}_{P1} \cdot \mathbf{v}_{P1} \, dx + \int_{x_c}^L \mathbf{v}_{P2} \cdot \mathbf{v}_{P2} \, dx \right] \quad (6)$$

$$V_{pipe} = \frac{1}{2} EA_p \left[ \int_0^{x_c} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x} \right)^2 dx + \int_{x_c}^L \left( \frac{\partial s_2}{\partial x} \right)^2 dx \right] \quad (7)$$

$$+ \frac{1}{2} EI \left[ \int_0^{x_c} \left( \frac{\partial^2 w_{21}}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_{x_c}^L \left( \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]$$

$$+ K_R \left[ \frac{\partial w_{22}(x_c)}{\partial x} - \frac{\partial w_{21}(x_c)}{\partial x} \right]^2$$

$$+ K_T [w_{12}(x_c) - w_{11}(x_c)]^2$$

$$T_{fluid} = \frac{1}{2} M \left[ \int_0^{x_c} v_{f1} v_{f1} dx + \int_{x_c}^L v_{f2} v_{f2} dx \right] \quad (8)$$

여기서  $M$ 은 유체의 단위 길이당 질량이다. 또 유체의 분사력에 의한 보존력과 비보존력에 의한 일은 다음과 같이 각각 구할 수 있다.

$$W_c = \frac{1}{2} M U^2 \left\{ \int_0^{x_c} \left( \frac{\partial w_{21}}{\partial x} \right)^2 dx + \int_{x_c}^L \left( \frac{\partial w_{22}}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \quad (9)$$

$$\delta W_{nc} = - M U^2 \frac{\partial w_{22}}{\partial x} \Big|_{x=L} \delta w_{22} \Big|_{x=L} \quad (10)$$

위 식들에 사용된  $w_1$  대신 인장방향 변위  $s$ 를 사용하기 위하여  $w_1$ 과  $s$  사이의 기하학적 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다<sup>(4)</sup>.

$$s \approx w_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (11)$$

즉,  $s_k, w_{2k}$  ( $k=1,2$ )는 파이프의 인장방향 변위 및 횡변위를 나타내며 각각 다음과 같다.

$$s_k = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{ki}(x) q_{1i}(t), \quad w_{2k} = \sum_{i=1}^{\infty} Y_{ki}(x) q_{2i}(t) \quad (12a,b)$$

여기서  $\phi_i(x), Y_i(x)$ 는 각각 인장방향과 횡방향 모드함수,  $q_{1i}(t), q_{2i}(t)$ 는 일반화 좌표를 나타낸다.

### 2.3 운동방정식

계의 운동방정식은 앞에서 구한 크랙을 가진 유체유동 회전 파이프의 에너지식들을 Lagrange 방정식에 대입하여 유도할 수 있으며 구해진 계의 운동방정식을 무차원화하기 위하여 사용한 무차원 매개변수와 좌표들을 다음과 같이 정의한다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad d_{1,2} = \frac{q_{1,2}}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m+M}}, \quad (13)$$

$$\beta = \frac{M}{m+M}, \quad u = UL \sqrt{\frac{M}{EI}}, \quad k_R = \frac{K_R L}{EI},$$

$$k_T = \frac{K_T L^3}{EI}, \quad \Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{m+M}{EI}}.$$

여기서  $d_{1,2}$ 는 각각 외팔 파이프의 인장방향 및 횡방향의 무차원 변위를 나타낸 것이다. 식 (13)의 무차원 매개변수들을 사용한 인장방향 및 횡방향의 무차원 운동방정식은 다음과 같다.

$$[M] \ddot{\mathbf{d}} + [C] \dot{\mathbf{d}} + [K] \mathbf{d} = [P] \quad (14)$$

여기서  $(\cdot)$ 는 무차원화된 시간  $\tau$ 에 대한 미분을 나타내며,

행렬  $[M], [C],$  그리고  $[K]$ 는 각각 크랙을 가진 회전 외팔 파이프의 질량, 감쇠, 그리고 강성행렬을 나타내고 있다. 또  $\mathbf{d} = [d_{1i}(\tau) \ d_{2i}(\tau)]^T$ 이며, 이것을 다시  $\mathbf{d}(\tau) = \mathbf{D}e^{\gamma\tau}$ 로 표현할 수 있다. 여기서 고유치  $\gamma$ 는 복소수 형태로써 회전 외팔 파이프의 동적 안정성은 고유치  $\gamma$ 의 실수부의 부호에 의해 결정된다.

### 3. 수치해석 결과 및 고찰

식 (14)의 무차원 운동방정식을 이용하여 크랙을 가진 유체유동 회전 외팔 파이프의 안정성을 평가한다. 수치해석을 통하여 크랙의 크기와 위치 그리고, 파이프의 회전 각속도가 계의 플러터 불안정을 유발하는 임계유속에 미치는 영향에 대하여 결과를 도출하였다.

Fig. 3은 크랙의 위치가 파이프의 0.3인 위치에 존재하는 경우 크랙의 크기에 따른 플러터 임계유속의 변화를 도시하였다. 질량비  $\beta$ 의 전영역에 걸쳐 크랙의 크기가 0.2인 경우는 2차 모드에 의해 회전 파이프 시스템은 플러터 불안정이 일어난다. 또 크랙의 크기가 0.1인 경우는  $0 < \beta \leq 0.318$  영역에서는 2차 모드에 의해서, 그 이후 질량비 영역에서는 3차 모드에서 플러터 불안정이 유발됨을 알 수 있다. 일반적으로 크랙의 크기가 클수록 구조물은 더 큰 진폭으로 진동을 하지만 이 연구의 수치해석 예제에서는 오히려 크랙의 크기가 0.2인 경우에 0.1일 때에 비하여 더 큰 유속에서도 계는 안정한 상태를 유지할 수 있음을 보인다. 이 현상에 대해서는 Fig. 5에서 좀 더 자세히 설명되어 질 것이다. Fig. 4는 크랙의 크기가 0.1이고, 그 위치가 파이프의 고정단으로부터 0.3인 위치에 존재하는 경우 회전 각속도의 영향에 의한 임계유속의 변화를 표현한 것이다. 전반적으로 회전 각속도와 임계유속은 서로 비례적인 경향을 가진다. 회전 각속도가 1인 경우는 질량비가 0.307 이후에, 그리고  $\Omega = 3$ 일 때는  $0.318 \leq \beta$ 의 질량비 영역에서 계는 3차 모드에 의해 플러터 불안정이 발생한다.

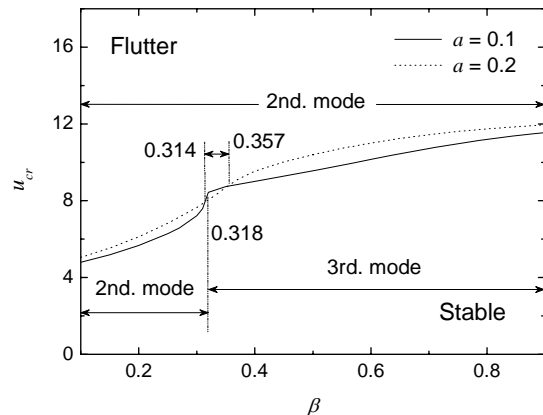


Fig. 3 Critical flow velocity for flutter

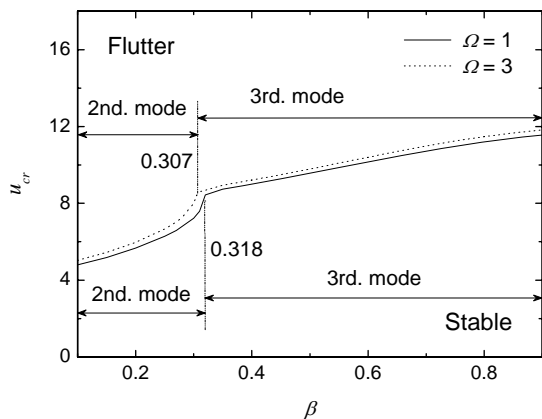


Fig. 4 Critical flow velocity for flutter as  $\beta$  for angular velocity ( $a = 0.1$ ,  $\xi_c = 0.3$ )

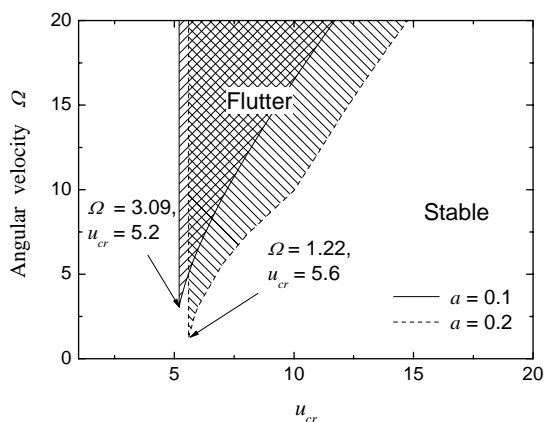


Fig. 5 Stability map of cracked rotating pipe as flow velocity for crack effect( $\beta = 0.2$ )

Fig. 5는 크랙의 위치가 파이프의 0.1인 위치에 있을 때 크랙의 크기에 따른 임계유속 변화이다. 크랙의 크기가 0.2일 때는 무차원 회전 각속도가 1.22에서 플러터 불안정 영역이 나타나며, 크랙의 크기  $a = 0.1$ 인 경우는  $\Omega = 3.09$ 에서부터 불안정 영역이 시작된다. 이처럼 크랙의 크기가 클수록 플러터 불안정을 유발하는 임계유속의 범위가 넓어지며, 회전 각속도가 증가할수록 임계유속도 증가함을 알 수 있다. 파이프의 회전 각속도가 15로 비교적 빠른 경우 크랙의 크기가 0.1인 경우에 비하여  $a = 0.2$ 인 경우 임계유속은 약 32.1% 정도 더 큰 값을 가지지만 오히려 더 넓은 플러터 발생 영역을 갖는다는 것을 확인 할 수 있다. 이것은 앞의 Fig. 3에서 설명한 ‘크랙의 크기가 클수록 더 큰 임계유속을 갖는다’는 것은 회전 각속도의 영향과 관련 지어 생각해 볼 때, 절대적으로 계의 안정화 영역이 더 넓다는 의미가 아님을 판단할 수 있다.

#### 4. 결론

이 연구에서는 크랙을 가지는 유체유동 회전 외팔 파이

프의 안정성을 평가하고 고찰하였다. 이 연구의 수치해석 예제에 대하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 크랙의 영향이 비교적 큰 경우, 회전 파이프 시스템은 회전 각속도의 영향에 관계없이 오직 2차 모드에 의해서만 플러터 불안정을 유발한다.

(2) 전반적으로 크랙의 크기가 클수록, 회전 각속도가 증가할수록 플러터 불안정을 유발하는 임계유속은 큰 값을 가진다.

(3) 결론 (2)에서와 같이 크랙의 크기가 클수록 플러터 임계유속의 값은 커지지만 회전 각속도의 영향을 함께 고려해보면 크랙의 크기가 큰 경우에 계의 플러터 불안정을 유발하는 영역이 더 크다는 것을 판단할 수 있다.

#### 참고 문헌

- (1) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(I. Theory)," Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol. 261, pp. 457~486.
- (2) Païdoussis, M. P., 1998, Fluid-Structure Interactions (Volume 1), Academic Press.
- (3) Ryu, S. W., Sugiyama, Y. and Ryu, B. J., 2002, "Eigenvalue Branches and Modes for Flutter of Cantilevered Pipes Conveying Fluid," Computers and Structures, Vol. 80, pp. 1231~1241.
- (4) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.
- (5) Cai, G. P., Hong, J. Z. and Yang, S. X., 2004, "Model Study and Active Control of a Rotating Flexible Cantilever Beam," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 46, pp. 871~889.
- (6) Panussis, D. A. and Dimarogonas, A. D., 2000, "Linear In-Plane And Out-of-Plane Lateral Vibrations of a Horizontally Rotating Fluid-Tube Cantilever," Journal of Fluids and Structures, Vol. 14, pp. 1~24.
- (7) Liu, D., Gurgenci, H. and Veidt, M., 2003, "Crack Detection in Hollow Section Structures through Coupled Response Measurements," Journal of Sound and Vibration, Vol. 261, pp. 17~29.
- (8) Son, I. S., Yoon, H. I. and Kim, D. J., 2007, "Stability Analysis of a Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid", Transactions of KSNVE, Vol. 17, No. 8, pp. 701~707.