불연속 변화폭 단면을 갖는 곡선보의 휨-비틀림 자유진동

Flexural-Torsional Free Vibrations of Curved Beams with Stepped Breadth

이병구* • 이태은** • 김권식*** • 윤희민***

Lee, Byoung Koo • Lee, Tae Eun • Kim, Gwon Sik • Yoon, Hee Min

1. 서 론

곡선보는 보, 기둥, 평판 등과 더불어 가장 중요한 구조 단위 중에 하나이며, 불연속 변화폭 단면은 시공상, 경제적 또는 미적 감각 등의 이유로 구조공학에서 많이 이용되고 있는 변단면 형식이다. 이러한 관점에서 이 연구는 불연속 변화폭 직사각형 단면을 갖는 원호형 곡선보의 휨-비틀림 자유진동을 연구하는데 그 목적이 있다.

2. 불연속 변화폭 직사각형 단면의 정의

그림 1은 이 연구에서 택한 불연속 변화폭 직사각형 단면을 갖는 원호형 곡선보의 부재를 나타낸다. 이 그림에서 $j(j=1,2,3,\cdots,n)$는 곡선보의 축을 따라서 분할된 구간번호이다. 곡선보의 반경은 ρ 이고 단면은 직사각형이며 단면깊이 D는 일정하다. 구간 j의 단면폭은 B_j이다. 곡선보의 중심각은 α 이고 구간 j의 중심각은 β_j이다. 따라서 $\alpha=\sum_{j=1}^{n}\beta_j$ 이고, 구간 j는 $\sum_{l=1}^{j-1}\beta_l \le \theta < \sum_{l=1}^{j}\beta_l$ 내에 존재한다. 여기서 θ는 곡선보 축의 임의점을 정의하는 각좌표이다.

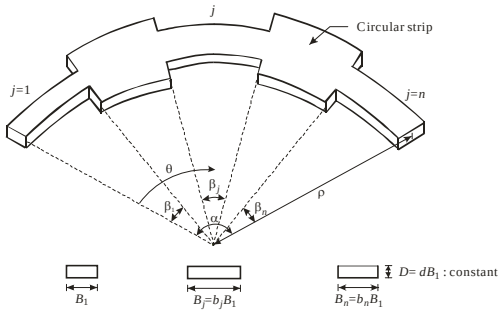

그림 1. 불연속 직사각형 단면을 갖는 원호형 곡선보의 부재

* 정회원, 원광대학교 토목환경공학과 교수 E-mail: bkleest@wku.ac.k

** 정회원, 원광대학교 토목환경공학과 겸임교수 E-mail: telee@wku.ac.kr

*** 학생회원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과 E-mail: thms4@wku.ac.kr – 발표자(윤희민)

단면의 정의를 위하여 깊이비 d 와 폭비 b_j 를 다음과 같이 도입한다.

$$d = D/B_1,\ b_j = B_j/B_1 \tag{1,2}$$

위의 식 (1), (2)를 이용하면 구간 j 에서 단면의 단면적 A_j, 단면2차모멘트 I_j, 단면극관성모멘트 $I_{p(j)}$ 및 비틀림상수 J_j 를 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$A_j = B_j D = b_j A_1,\ I_j = B_j D^3/12 = b_j I_1,\ I_{p(j)} = b_j(1+b_j^2/d^2)I_1 \tag{3-5}$$

$$J_j = C_t B_j D^3 = 4b_j(1-0.63d/b_j)I_1 \tag{6}$$

위의 식들에서 $A_1 = dB_1^2$, $I_1 = d^3B_1^4/12$ 이며, 제1구간 $(j=1)$ 에서 단면적 및 단면2차모멘트이다. 또한 식 (6)에서 $C_t = (1/3)(1-0.63D/B_j) = (1/3)(1-0.63d/b_j)$, $D/B_j = d/b_j \le 1$ 이다.

3. 수학적 모형

3.1. 합응력 및 관성력

그림 2에서 점선은 곡선보의 정적 상태를 나타내며 실선은 동적 상태 즉 자유진동 상태를 나타낸다. 양단부는 회전 또는 고정으로 지지되어 있다. 좌단으로부터 측정된 각좌표 θ 는 곡선보 축상의 임의점을 정의해주고, 변위 v, ψ 및 ϕ 는 각각 연직변위, 휨에 의한 회전각 및 비틀림각을 나타낸다.

구간 j 에서 발생하는 전단력 Q, 휨 모멘트 M, 비틀림 모멘트 T 의 합응력들은 다음과 같이 변위항 v, ψ, ϕ 와 단면형상계수 f, 탄성계수 E, 전단탄성계수 G 로 나타낼 수 있다[1].

$$Q = fGA_j(\rho^{-1}v' - \psi),\ M = \rho^{-1}EI_j(\phi - \psi'),\ T = \rho^{-1}GJ_j(\psi + \phi') \tag{7-9}$$

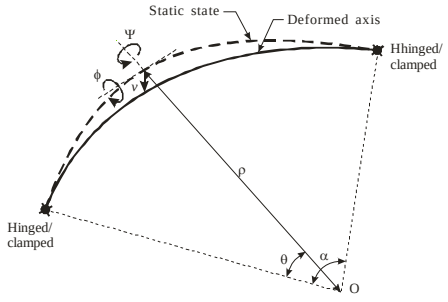

그림 2. 원호형 곡선보 및 제변수

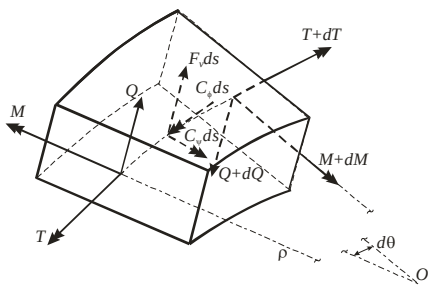

그림 3. 미소요소에 작용하는 합응력 및 관성력

자유진동 상태에서 질량을 갖는 미소요소에 작용하여 휨 자유진동을 유발시키는 연직관성력 F_v 및 회전관성력 C_ψ는 다음과 같이 질량밀도 γ, 고유각진동수 $\omega_i\ (i=1,2,3,4,\cdots)$로 나타낼 수 있다[2].

$$F_v=-\gamma A_j\omega_i^2 v,\ C_\psi=-\gamma I_j\omega_i^2\psi,\ C_\phi=-\gamma I_{p(j)}\omega_i^2\phi \tag{10-12}$$

3.2. 동적 평형방정식

그림 3은 곡선보의 미소요소에 작용하는 합응력 및 관성력의 평형상태를 나타낸다. 이 그림으로부터 곡선보 미소요소의 동적 평형방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$Q'-\rho F_v=0,\ M'-\rho Q+T+\rho C_\psi=0,\ M-T'+\rho C_\phi=0 \tag{13-15}$$

3.3. 상미분방정식

상미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\eta=v/\rho,\ a=B_1/\rho,\ g=G/E,\ C_i=\omega_i\rho^2\sqrt{\gamma A_1/(EI_1)} \tag{16-19}$$

여기서 η는 무차원 연직변위, a는 형상비, g는 탄성계수비, C_i는 무차원 고유진동수이다.

위의 모든 식들을 이용하면 변화폭 직사각형 단면을 갖는 원호형 곡선보의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\eta''=e_1C_i^2\eta+\psi',\quad \psi''=e_1^{-1}\eta'+(-e_1^{-1}+e_2+e_3C_i^2)\psi+(1+e_2)\phi' \tag{20,21}$$

$$\phi''=-(1+e_2^{-1})\psi'+(e_2^{-1}+e_4C_i^2)\phi \tag{22}$$

위의 식들에서 무차원 계수 e_1-e_4는 다음과 같다.

$$e_1=-a^2d^2/(12fg),\ \ e_2=4g(1-0.63d/b_j),\ \ e_3=-a^2d^2/12 \tag{23a-c}$$

$$e_4=-a^2d^2/(48g)(1+b_j^2/d^2)/(1-0.63d/b_j) \tag{23d}$$

회전지점$(\theta=0$ 또는 $\theta=\alpha)$의 경계조건은 다음과 같다.

$$\eta=0,\ \psi'=0,\ \phi=0 \tag{24-26}$$

고정지점$(\theta=0$ 또는 $\theta=\alpha)$의 경계조건은 다음과 같다.

$$\eta=0,\ \psi=0,\ \phi=0 \tag{27-29}$$

4. 수치해석 예제

위에서 유도한 상미분방정식을 수치해석하여 주어진 곡선보의 입력변수인 지점조건, $\alpha, n, d, b_j, \beta_j, a, g, f(=0.833$: 직사각형 단면)에 대한 무차원 고유진동수 C_i 를 산정하였다.

그림 5는 고정-고정 지점조건의 $C_i - d$ 곡선이다. 입력변수는 이 그림 상단에 표시되어 있다. 깊이비 d 가 증가하면 무차원 고유진동수 C_i 는 감소한다. 그 영향은 고차모드에서 더 크다. 제1, 2모드 ($i=1,2$)인 경우에는 그 영향이 매우 작다.

그림 6은 회전-회전 지점조건의 $C_i - a$ 곡선이다. 입력변수는 이 그림 상단에 표시되어 있다. 형상비 a 가 증가하면 무차원 고유진동수 C_i 는 감소한다.

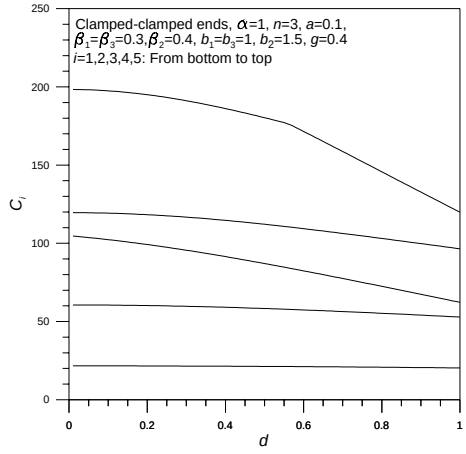

그림 5. $C_i - d$ 곡선

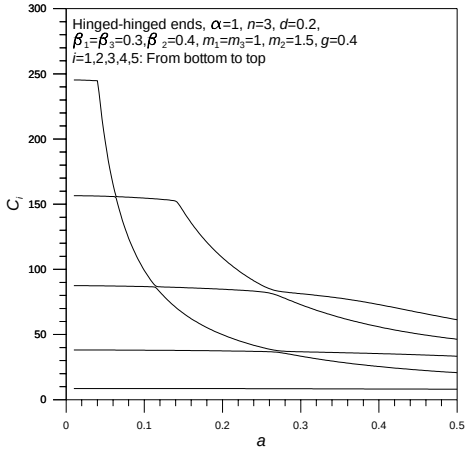

그림 6. $C_i - a$ 곡선

5. 결 론

변화폭 직사각형 단면을 갖는 원호형 곡선보의 휨-비틀림 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식과 경계조건을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수를 산출하였다. 수치해석의 결과로 고유진동수 곡선을 그림에 나타내었다.

참고문헌

1. Volterra, E. and Gaines, J.H. (1971) *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall, NY, USA.
2. Timoshenko, S.P., Young, D.H. and Weaver, W. Jr. (1974) *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, Inc., NY, USA.