탄성지점을 갖는 변화곡률 아치의 자유진동

Free Vibrations of Non-Circular Arches with Elastic Supports

오상진† · 김권식* · 박광규**

ang in on ik Kim and K ang Kyou Park

Key Words: Non-Circular Arch(변화곡률 아치), Elastic Support(탄성지지), Free Vibration(자유진동), Axial Deformation(축변형), Rotatory Inertia(회전관성), Shear Deformation(전단변형)

AB T ACT

The differential equations governing free, in-plane vibrations of non-circular arches with the translational (radial and tangential directions) and rotational springs at the ends, including the effects of rotatory inertia, shear deformation and axial deformation, are solved numerically using the corresponding boundary conditions. The lowest four natural frequencies for the parabolic geometry are calculated over a range of non-dimensional system parameters: the arch rise to span length ratio, the slenderness ratio, and the translational and rotational spring parameters.

1. 서 론

아치는 각종 구조물에 단위구조로 이용되고 있어 연구자들에 의해 다양한 조건을 갖는 아치의 동적 거동, 특히 자유진동에 관한 많은 연구가 이루어졌다[1-4]. 이들 연구들에서는 주로 이상적인 단부조건(고정, 회전, 자유)을 고려하고 있다. 그러나 이와 같은 이상적인 단부조건을 실제 구조물에서 실현하는 것은 매우 어렵다. 따라서 일반적인 단부조건 즉 단부가 병진스프링 및 회전스프링으로 지지된 구조부재의 거동 특성을 규명하는 것은 매우 실제적인 연구라 할 수 있다[5,6].

이 연구에서는 단부가 곡률중심 및 접선 방향 스프링과 회전스프링으로 지지된 변화곡률 아치의 자유진동을 다루고자 한다. 이를 위해 축변형, 회전관성 및 전단변형 효과를 고려한 변화곡률 아치의 자유진동에 대한 지배 미분방정식에 포물선 선형을 적용하고, 대응하는 단부조건을 이용하여 수치해석한다. 해석결과로서 아치높이 지간길이비, 세장비 및 단부의 스프링상수 변화에 따른 고유진동수를 산출한다.

2. 수학적 모형

Fig. 1은 균일한 단면을 갖는 탄성지지된 변화곡률 아치를 나타낸 것이다. 이 그림에서 l, 및 $y(x)$는 각각 지간길이, 높이 및 아치 선형식이며, ρ와 ϕ는 각각 아치축상 임의점에서의 곡률반경 및 수평축과 곡률반경 방향이 이루는 각도이다. 그리고 와 는 각각 아치축상 임의점에서의 곡률중심과 접선 방향 변위이며, ψ와 β는 각각 순수 휨에 의한 단면회전각 및 전단변형률이다. 또한 ($_a$,)와 ($_a$,)는 각각 곡률중심과 접선 방향 스프링상수이며, ($_{ra}$, $_r$)는 회전스프링 상수이다.

Fig. 1에 보인 아치가 면내에서 자유진동하는 경우 아치 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력의 동적평형방정식은 식 (1) (3)과 같다.

$$'+ \ -\rho \ _t = 0, \quad ' - \ -\rho \ _r = 0 \qquad (1, 2)$$

$$\rho^{-1} \ ' - \ + T = 0 \qquad (3)$$

여기서 , 및 은 각각 축방향력, 전단력 및 휨모멘트, $_r$, $_t$ 및 T는 각각 곡률중심과 접선 방향 관성력 및 회전관성우력이며, $(\ ) = d/d\phi$이다.

축변형 및 전단변형 효과를 고려하는 경우 아치 단면에 발생하는 단면력은 식 (4) (6)과 같이 진동변위의 항으로 표현할 수 있다.

$$= -E \ \rho^{-1}\psi', \quad = EA\rho^{-1}(\ ' + \ ) + E \ \rho^{-2}\psi' \qquad (4, 5)$$

$$= kA \ \beta = kA \ \rho^{-1}(\ ' - \ -\rho\psi) \qquad (6)$$

위의 식들에서 E와 는 각각 아치 재료의 탄성계수와 전단탄성계수, A와 는 각각 아치 단면의 단면적 및 단면2차모멘트, k는 단면형상에 따른 상수이다.

아치가 조화진동을 한다고 가정하면, 아치 미소요소에 발생하는 단위길이당 관성력 및 회전관성우력은 식 (7) (9)와 같다.

$$_r = -\gamma A \omega^2 \ , \quad _t = -\gamma A \omega^2 \ , \quad T = -\gamma \ \omega^2 \psi \qquad (7\text{-}9)$$

여기서 γ는 아치 재료의 밀도, ω는 고유각진동수이다.

† 남도대학 토목환경과
E-mail : sjoh@namdo.ac.kr
Tel : (061) 380-8502, Fax : (061) 380-8679
* 원광대학교 대학원
** 대전대학교 토목공학과

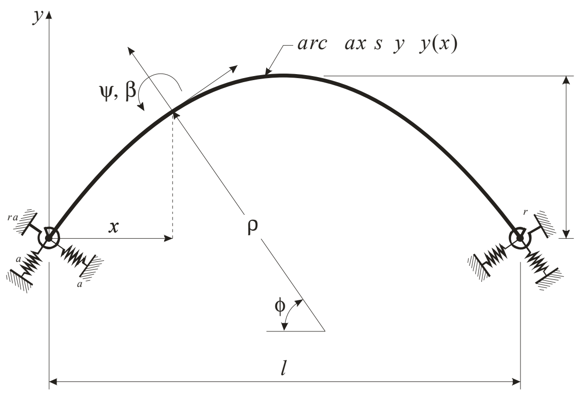

Fig. 1 Non-circular arch with elastically constrained ends.

지배방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 사용한다.

$$f = \ /l,\ s = l/\sqrt{\ /A},\ \mu = k\ \ /E \tag{10-12}$$

$$\xi = x/l,\ \eta = y/l,\ \zeta = \rho/l \tag{13-15}$$

$$\delta = \ /l,\ \lambda = \ /l \tag{16, 17}$$

$$\ = \omega l^2\sqrt{\gamma A/(E\ )},\ \ = 1,2,3,4,\cdots \tag{18}$$

위의 식에서 f, s, μ는 각각 아치높이 지간길이비(rise to span length ratio), 세장비(slenderness ratio)와 전단계수(shear parameter), 는 무차원 고유진동수(frequency parameter), 는 모드번호이다.

식 (1) (3)에 식 (4) (9)를 대입하고, 식 (10) (18)의 무차원 변수들을 이용하면 다음의 지배 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta'' = \zeta^{-1}\zeta'\delta' + \mu^{-1}(1-\zeta^2 s^{-2}\ \ ^2)\delta + (1+\mu^{-1})\lambda' - \zeta^{-1}\zeta'\lambda + (\zeta + \mu^{-1}\zeta^{-1}s^{-2})\psi' \tag{19}$$

$$\lambda'' = \zeta^{-1}\zeta'\lambda' + (\mu - \zeta^2 s^{-2}\ \ ^2)\lambda - (1+\mu)\delta' + \zeta^{-1}\zeta'\delta - \zeta^{-1}s^{-2}\psi'' + 2\zeta^{-2}\zeta' s^{-2}\psi' + \mu\zeta\psi \tag{20}$$

$$\psi'' = \zeta^{-1}\zeta'\psi' + (\mu s^2 - s^{-2}\ \ ^2)\zeta^2\psi - \zeta\mu s^2\delta' + \zeta\mu s^2\lambda \tag{21}$$

Fig. 1에 보인 선형이 높이 , 지간길이 l인 포물선이라면, 이의 무차원 선형식은 식 (22)와 같이 쓸 수 있다.

$$\eta = -4f\xi(\xi - 1),\ 0 \le \xi \le 1 \tag{22}$$

식 (22)를 이용하면 포물선 선형에 대한 ϕ 및 변화곡률계수 ζ, ζ'을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi = \pi/2 - \tan^{-1}[-4f(2\xi - 1)] \tag{23}$$

$$\zeta = (1/8f)\left[1 + 16f^2(2\xi-1)^2\right]^{3/2} \tag{24}$$

$$\zeta' = [3(2\xi-1)/2]\left[1 + 16f^2(2\xi-1)^2\right]^{3/2} \tag{25}$$

Fig. 1에 보인 바와 같이 탄성지지된 아치 좌단에서의 휨모멘트, 축방향력, 전단력은 각각 다음 식과 같이 쓸 수 있다.

$$-E\ \rho^{-1}\psi' = \ \ _{ra}\psi \tag{26}$$

$$EA\rho^{-1}(\ '+\ \ ) + E\ \rho^{-2}\psi' = -\ \ _a \tag{27}$$

$$kA\ \ \rho^{-1}(\ '-\ \ -\rho\psi) = -\ \ _a \tag{28}$$

무차원 변수들을 이용하여 위의 식을 다시 쓰면 좌단에서의 경계조건식은 식 (29)와 같이 표현할 수 있다.

$$\psi' + \zeta k_{ra}\psi = 0 \tag{29a}$$

$$\zeta^{-1}s^2\lambda' + k\ _a\lambda + \zeta^{-1}s^2\delta + \zeta^{-2}\psi' = 0 \tag{29b}$$

$$\zeta^{-1}\mu s^2\delta' + k\ _a\delta - \zeta^{-1}\mu s^2\lambda - \mu s^2\psi = 0 \tag{29c}$$

마찬가지 방법으로 우단에서의 경계조건식을 구하면 식 (30)과 같다.

$$\psi' - \zeta k_r\ \psi = 0 \tag{30a}$$

$$\zeta^{-1}s^2\lambda' - k\ \ \lambda + \zeta^{-1}s^2\delta + \zeta^{-2}\psi' = 0 \tag{30b}$$

$$\zeta^{-1}\mu s^2\delta' - k\ \ \delta - \zeta^{-1}\mu s^2\lambda - \mu s^2\psi = 0 \tag{30c}$$

식 (29), (30)에서 k_{ra}, k_r, $k\ _a$, $k\ $, $k\ _a$, $k\ $ 는 무차원 스프링상수(spring parameter)로서 그 내용은 식 (31) (36)과 같다.

$$k_{ra} = \ \ _{ra}l/(E\ ),\ k_r = \ \ _r\ l/(E\ ) \tag{31, 32}$$

$$k\ _a = \ \ _a l^3/(E\ ),\ k\ \ = \ \ l^3/(E\ ) \tag{33, 34}$$

$$k\ _a = \ \ _a l^3/(E\ ),\ k\ \ = \ \ l^3/(E\ ) \tag{35, 36}$$

3. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서는 식 (19) (21)의 지배 미분방정식을 6개의 1계 연립 미분방정식으로 변환하여 초기치 문제로 형성한 후 좌단의 경계조건식을 이용하여 Runge-Kutta법으로 수치적분하였으며, 식 (30)에 보인 우단의 경계조건식을 만족하는 고유치를 계산하였다. 대상 구조에 대한 무차원 고유진동수를 결정하기 위하여 시행착오적 행렬값 탐사법을 적용하는 과정에서 Regula-Falsi법을 이용하였다. 이 논문에서는 아치 선형으로 식 (22)로 표현되는 포물선을 택하였으며, 제변수 변화에 따른 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 구하여 그 결과를 Fig. 2 10에 수록하였다.

Fig. 2 4는 세장비 $s = 60$, 전단계수 $\mu = 0.3$인 경우 아치높이 지간길이비에 따른 무차원 고유진동수의 변화, Fig. 5 7은 아치높이 지간길이비 $f = 0.2$, 전단계수 $\mu = 0.3$인 경우 세장비에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다.

Fig. 2와 Fig. 5는 $k\ _a = k\ _a = k\ \ = k\ \ = 10^7$일 때, $k_{ra} = k_r = 0$, 10, 100, 10^7에 대한 결과이다. 여기서 $k_{ra} = k_r$가 각각 0과 10^7인 경우 회전-회전 과 고정-고정 의 고전적인 단부조건과 대응된다.

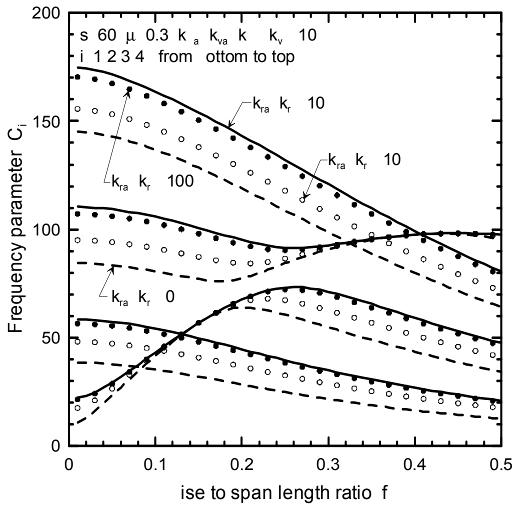

Fig. 2 Effect of f on frequency. $s = 60$; $\mu = 0.3$; $k_{a} = k_{a} = k = k = 10^7$; $k_{ra} = k_r = 0$, 10, 100 and 10^7.

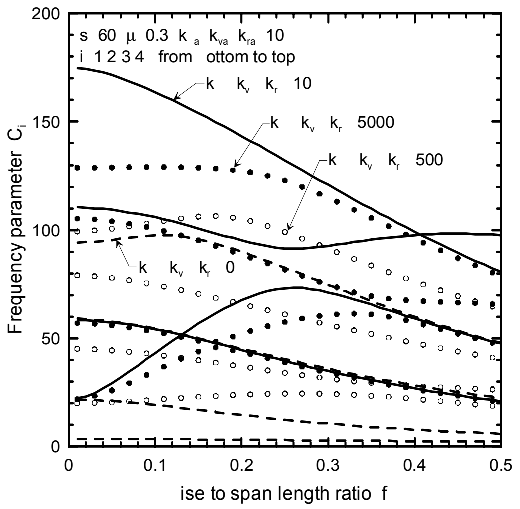

Fig. 3 Effect of f on frequency. $s = 60$; $\mu = 0.3$; $k_{a} = k_{a} = k_{ra} = 10^7$; $k = k = k_r = 0$, 500, 5000 and 10^7.

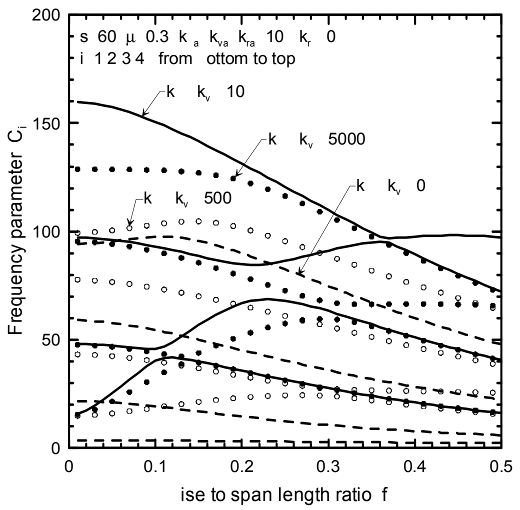

Fig. 4 Effect of f on frequency. $s = 60$; $\mu = 0.3$; $k_{a} = k_{a} = k_{ra} = 10^7$; $k_r = 0$; $k = k = 0$, 500, 5000 and 10^7.

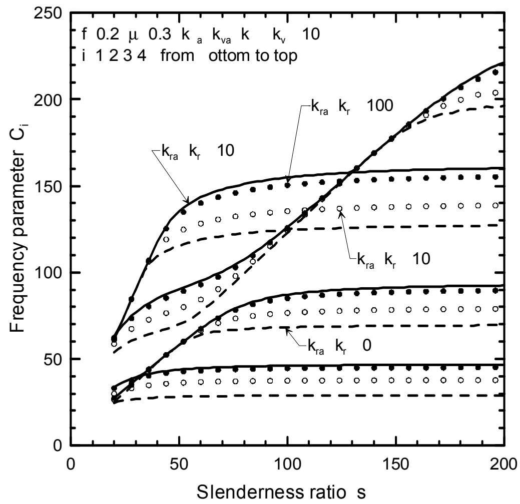

Fig. 5 Effect of s on frequency. $f = 0.2$; $\mu = 0.3$; $k_{a} = k_{a} = k = k = 10^7$; $k_{ra} = k_r = 0$, 10, 100 and 10^7.

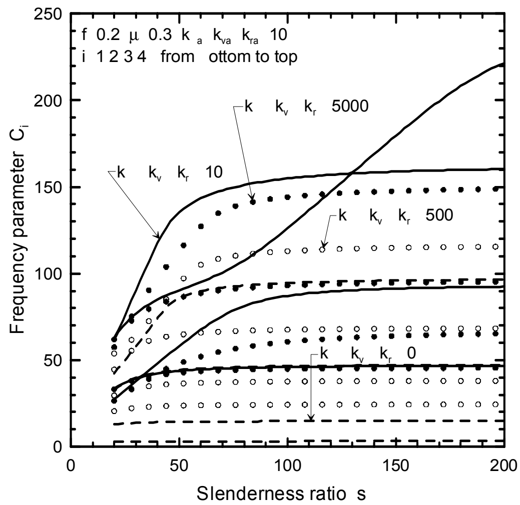

Fig. 6 Effect of s on frequency. $f = 0.2$; $\mu = 0.3$; $k_{a} = k_{a} = k_{ra} = 10^7$; $k = k = k_r = 0$, 500, 5000 and 10^7.

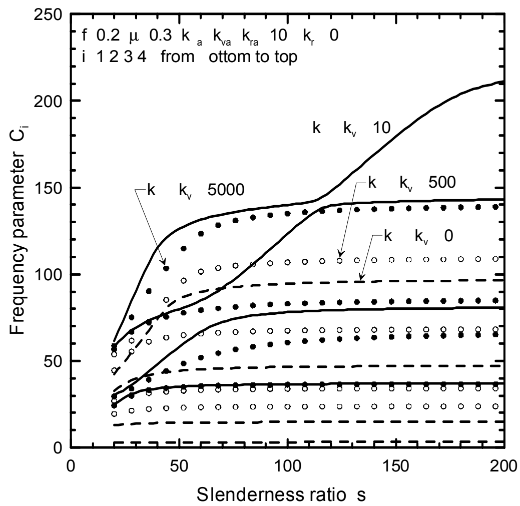

Fig. 7 Effect of s on frequency. $f = 0.2$; $\mu = 0.3$; $k_{a} = k_{a} = k_{ra} = 10^7$; $k_r = 0$; $k = k = 0$, 500, 5000 and 10^7.

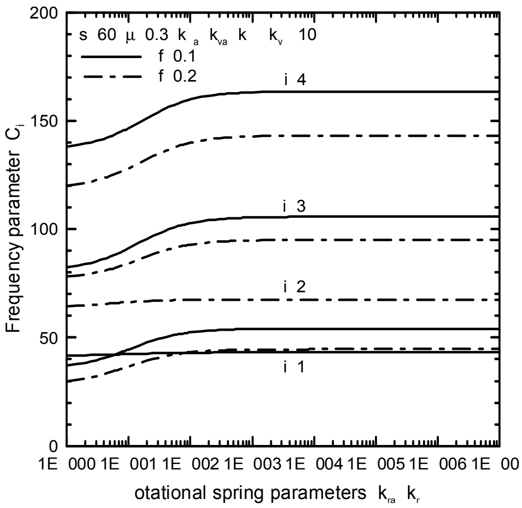

Fig. 8 Effect of $k_{ra}=k_r$ on frequency. $s=60$; $\mu=0.3$; $k\ _a=k\ _a=k\ \ =k\ \ =10^7$; $f=0.1$ and 0.2.

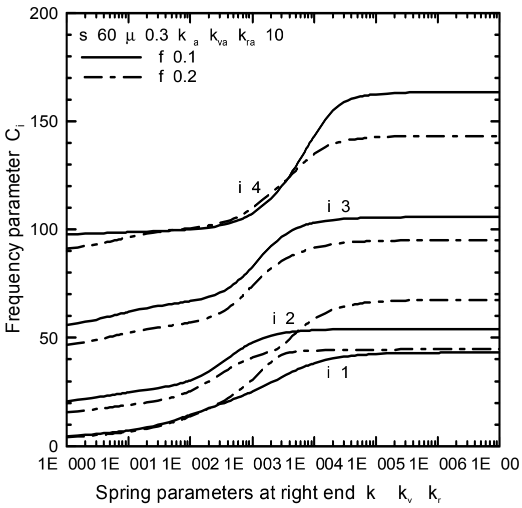

Fig. 9 Effect of $k\ \ =k\ \ =k_r$ on frequency. $s=60$; $\mu=0.3$; $k\ _a=k\ _a=k_{ra}=10^7$; $f=0.1$ and 0.2.

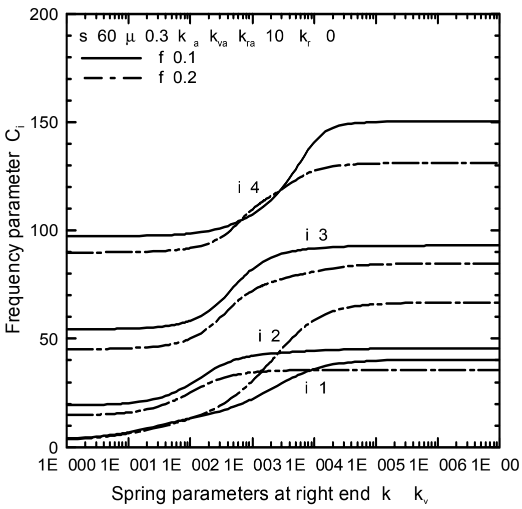

Fig. 10 Effect of $k\ \ =k$ on frequency. $s=60$; $\mu=0.3$; $k\ _a=k\ _a=k_{ra}=10^7$; $k_r\ =0$; $f=0.1$ and 0.2.

Fig. 3과 Fig. 6은 $k\ _a=k\ _a=k_{ra}=10^7$일 때, $k\ \ =k\ \ =k_r\ =0$, 500, 5000, 10^7에 대한 결과이며, Fig. 4와 Fig. 7은 $k\ _a=k\ _a=k_{ra}=10^7$, $k_r\ =0$일 때, $k\ \ =k\ \ =0$, 500, 5000, 10^7에 대한 결과이다. Fig. 3과 Fig. 6에서 $k\ \ =k\ \ =k_r$가 각각 0과 10^7 인 경우 고정-자유 와 고정-고정 의 고전적인 단부조건, Fig. 4와 Fig. 7에서 $k\ \ =k$ 가 각각 0과 10^7 인 경우 고정-자유 와 고정-회전 의 고전적인 단부조건과 대응된다. Fig. 2 7에서 고전적인 단부조건과 대응하는 조건에 대한 해석결과는 문헌의 결과와 거의 일치함을 알 수 있었다.

Fig. 8 10은 세장비 $s=60$, 전단계수 $\mu=0.3$인 경우 $k_{ra}=k_r$ ($k\ _a=k\ _a=k\ \ =k\ \ =10^7$), $k\ \ =k\ \ =k_r$ ($k\ _a=k\ _a=k_{ra}=10^7$), $k\ \ =k$ ($k\ _a=k\ _a=k_{ra}=10^7$, $k_r\ =0$) 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 실선은 $f=0.1$, 일점쇄선은 $f=0.2$에 대한 결과이다.

4. 요 약

이 논문에서는 단부가 곡률중심 및 접선 방향 스프링과 회전스프링으로 지지된 포물선 아치의 자유진동에 대한 지배 미분방정식을 수치해석하여 최저차 4개의 고유진동수를 산출하였다. 축변형, 회전관성 및 전단변형 효과를 고려한 지배방정식을 채택하였으며, 해석 예에서는 아치높이 지간길이비, 세장비 및 단부의 스프링상수 변화에 따른 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

참고문헌

(1) Lee, B. K. and Wilson, J. F., 1989, Free Vibrations of Arches with Variable Curvature, Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, pp.75-89.

(2) Tseng, Y. P., Huang, C. S. and Lin, C. J., 1997, Dynamic Stiffness Analysis for In-Plane Vibrations of Arches with Variable Curvature, Journal of Sound and Vibration, Vol. 207, pp.15-31.

(3) Oh, S. J., Lee, B. K. and Lee, I. W., 1999, Natural Frequencies of Non-Circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 219, pp.23-33.

(4) Huang, C. S., Nieh, K. Y. and Yang, M. C., 2003, In-Plane Free Vibration and Stability of Loaded and Shear-Deformable Circular Arches, International Journal of Solids and Structures, Vol. 40, pp.5865-5886.

(5) Li, W. L., 2000, Free Vibrations of Beams with General Boundary Conditions, Journal of Sound and Vibration, Vol. 237, pp.709-725.

(6) Kim, H. K. and Kim, M. S., 2001, Vibration of Beams with Generally Restrained Boundary Conditions using Fourier Series, Journal of Sound and Vibration, Vol. 245, pp.771-784.