

원호형 압전 변환기의 공진 특성

Resonance Characteristics of a Piezoelectric Shell Transducer

김 대 승*·김 진 오†

Dae Seung Kim and Jin Oh Kim

Key Words : Piezoelectric transducer(압전 변환기), Resonance Frequency(공진 주파수), Characteristic Equation(특성 방정식)

ABSTRACT

This paper presents a theoretical approach to describe the vibration characteristics of a piezoelectric shell transducer. Governing equations for the motion of the piezoelectric shell are classified and simplified according to the boundary conditions. Applied mechanical and electrical boundary conditions have yielded each characteristic equation for circumferential, longitudinal, and radial motions of the piezoelectric shell transducer. Theoretical calculations of the resonance frequencies have been compared with the results obtained by the experiment and have shown a good agreement.

1. 서 론

초음파 기술들은 초음파가 전파하는 신호를 계측에 이용하는 센서 기술과 초음파가 전달하는 에너지를 이용하는 액추에이터 기술로 분류될 수 있다.⁽¹⁾ 초음파 전파를 계측에 이용하는 초음파 센서 기술은 산업용 계측기, 수중 탐지, 의료 영상 등 다양한 분야에 활용되고 있다. 초음파 에너지를 이용하는 액추에이터 기술은 절삭, 용접, 세정 등의 분야에 활용되어 왔다. 이러한 용도로 역학적 에너지를 전기 에너지로 변환하거나 반대로 전기 에너지를 역학적 에너지로 변환하기 위해 압전 세라믹을 사용한 압전 변환기가 주로 사용된다.⁽¹⁾

압전 변환기들은 대개 원판형 또는 사각판형으로서 압전 소자의 두께 방향 종진동을 이용하며, 간혹 사각판형의 길이방향 진단운동을 이용하기도 한다.⁽¹⁾ 또한 반경방향 진동을 발생시키기 위해 두께 방향인 반경방향으로 진동하는 원통형 변환기가 있다.⁽²⁾

원통형 압전 변환기는 물이 채워진 관의 내부 면에 긴 이물질을 제거하기 위해 관 안에서 방사 음향 파동을 발생시키는 데 사용되거나⁽³⁾, 관 벽에서 송수신 되는 탄성파를

전파시키고, 계측하기 위해 관의 외부 둘레에 부착되어 사용된 예가 있다.⁽⁴⁾ 그러나 상당히 긴 관에서는 원통형의 변환기를 관의 외부 둘레에 부착하기가 용이하지 않으므로, 길이 방향으로 반으로 쪼갠 원호 형상의 압전 변환기를 관 둘레에 붙여 사용한다.⁽⁴⁾

본 논문에서는 관에서의 탄성파 송수신 용 변환기 설계를 목적으로 Fig. 1에 보인 원호형 압전 변환기의 진동 특성을 해석한다. 해석에 적용될 경계 조건에 따라 운동 방정식을 분류하고, 이들을 단순화해 원호형 압전 변환기의 해를 구한다. 그 결과를 실험 결과와 비교해 이론해의 타당성을 검증한다.

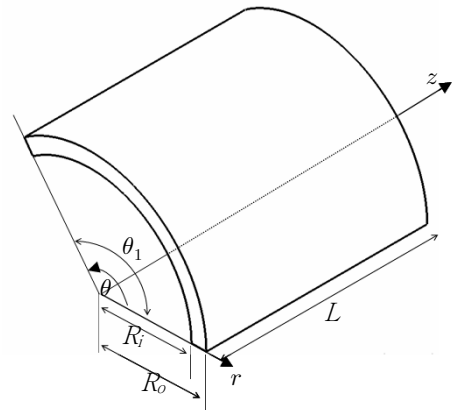


Fig. 1 A piezoelectric shell transducer in cylindrical coordinates

* 숭실대학교 대학원 기계공학과

† 책임저자, 정희원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과
E-mail : jokim@ssu.ac.kr
Tel : (02) 812-0662, Fax : (02) 820-0668

2. 변환기의 특성 해석

2.1 운동 방정식과 경계조건

A. 원주방향 운동

원호형 압전 변환기는 단면 두께가 얇은 셸(shell)구조이므로, 변환기의 반경 방향으로 평면 응력 조건($\sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{zr} = 0$)을 가정하고, w 와 $\partial/\partial z$ 를 포함하는 항들을 무시한다. 또한, 단면 두께가 얇고 전극이 원호면에 위치하므로, 반경방향 이외의 전기적 성분들을 무시하되 반경 방향의 전기장은 두께 t 에 반비례($\partial\phi/\partial r \approx V_0/t$)한다고 가정한다.⁽⁵⁾ 원주방향 운동과 관련된 압전 지배식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\sigma_\theta = c_{11}^p \left(\frac{u}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + e_{13}^p \frac{V_0}{t} \quad (1a)$$

$$D_r = e_{13}^p \left(\frac{u}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \epsilon_{33}^p \frac{V_0}{t} \quad (1b)$$

여기서

$$c_{11}^p = c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{\epsilon_{33}^E}, \quad c_{12}^p = c_{12}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{\epsilon_{33}^E} \quad (1c,d)$$

$$e_{31}^p = e_{31}^E - \frac{e_{33}^E c_{13}^E}{\epsilon_{33}^E} \quad (1e)$$

이다.

원주방향과 반경방향으로 진동을 하는 원호형 압전 변환기를 셸 구조라 가정하므로, 이에 대한 힘 평형 식으로부터 원주방향과 반경방향 진동에 대한 운동 방정식을 다음과 같이 얻는다.

$$c_{11}^p \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2a)$$

$$-c_{11}^p \left(\frac{u}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{e_{13}^p V_0}{Rt} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2b)$$

$u(\theta, t) = U(\theta) \exp(j\omega t)$ 와 $v(\theta, t) = V(\theta) \exp(j\omega t)$ 를 식 (2b)에 대입하여 변수 분리한 후 그 결과를 정리하면, $U(\theta)$ 는 다음과 같다.

$$U(\theta) = \frac{c_{11}^p}{-c_{11}^p + \rho\omega^2 R^2} \frac{dV(\theta)}{d\theta} + \frac{R}{-c_{11}^p + \rho\omega^2 R^2} \frac{e_{13}^p V_0}{t} \quad (3)$$

마찬가지로 식 (2a)를 변수 분리한 후 식 (3)을 대입하면, 원주방향 변위 $V(\theta)$ 를 변수로 하는 운동 방정식을 다음과 같이 얻는다.

$$c_{11}^p \frac{d^2 V}{d\theta^2} + \rho\omega^2 R^2 V = 0 \quad (4)$$

원호형 압전 변환기의 원호의 양 끝이 자유로운 경우 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$\theta = 0 \text{ 에서 } \sigma_\theta = 0, \quad \theta = \theta_1 \text{ 에서 } \sigma_\theta = 0 \quad (5a,b)$$

B. 폭방향 운동

원주방향 진동 해석 방법과 마찬가지로 반경방향으로 평면 응력 조건을 적용하고 반경방향 이외의 전기적 성분들은 모두 무시한다. 그러나 폭방향 공진에 대한 해석을 하므로 w 와 $\partial/\partial z$ 를 고려하되 v 와 $\partial/\partial \theta$ 성분들을 무시한다. 그러면 폭방향 운동과 관련된 압전 지배식은 다음과 같이 된다.

$$\sigma_\theta = c_{11}^p \frac{u}{R} + c_{12}^p \frac{\partial w}{\partial z} + e_{31}^p \frac{V_0}{t} \quad (6a)$$

$$\sigma_z = c_{12}^p \frac{u}{R} + c_{11}^p \frac{\partial w}{\partial z} + e_{31}^p \frac{V_0}{t} \quad (6b)$$

$$D_r = e_{31}^p \frac{u}{R} + e_{31}^p \frac{\partial w}{\partial z} - \epsilon_{33}^p \frac{V_0}{t} \quad (6c)$$

폭방향과 반경방향에 대해 힘 평형식을 쓰면 다음과 같다.⁽⁶⁾

$$c_{12}^p \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial z} + c_{11}^p \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (7a)$$

$$-c_{11}^p \frac{u}{R^2} - c_{12}^p \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial z} - e_{13}^p \frac{V_0}{Rt} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7b)$$

$u(z, t) = U(z) \exp(j\omega t)$ 와 $w(z, t) = W(z) \exp(j\omega t)$ 를 식 (7b)에 대입하여 변수 분리한 후 그 결과를 정리하면, $U(z)$ 는 다음과 같다.

$$U(z) = \frac{c_{12}^p}{(\rho\omega^2 - c_{11}^p/R^2)} \frac{1}{R} \frac{dW(z)}{dz} + \frac{e_{13}^p}{(\rho\omega^2 - c_{11}^p/R^2)} \frac{V_0}{Rt} \quad (8)$$

마찬가지로 식 (7a)를 변수 분리를 한 후 (8)을 대입하여 정리하면, 다음과 같이 하나의 운동 변위 $W(z)$ 로 표현되는 운동 방정식을 얻는다.

$$c_{11}^p \frac{d^2 W}{dz^2} + \rho\omega^2 W = 0 \quad (9)$$

Fig. 1의 압전 변환기는 폭방향으로 양 끝 $z=0$ 과 $z=L$ 에서 자유로우므로 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$z=0 \text{ 에서 } \sigma_z = 0, \quad z=L \text{ 에서 } \sigma_z = 0 \quad (10a,b)$$

C. 반경방향 운동

셸 구조를 갖는 원호형 압전 변환기의 단면 두께는 폭과 원주 길이 $R\theta_1$ 보다 상당히 짧으므로, 원주방향 변위 v 와 길이방향 변위 w 를 무시한다. 변환기는 원호 형상이므로 순수 반경방향 변위에 의해 발생하는 원주방향 변형률인 u/r 을 고려하지 않는다. 전기장의 방향은 반경방향 좌표 r 과 나란하므로, 원주방향과 폭방향 전기적 성분들을 무시하면($\partial\phi/\partial\theta = \partial\phi/\partial z = 0$) 반경방향 운동에 관련된 압전 지배식이 다음과 같이 된다.

$$\sigma_r = c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} + e_{33}^E \frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad \sigma_\theta = c_{13}^E \frac{\partial u}{\partial r} + e_{13}^E \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (11a,b)$$

$$D_r = e_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} - \epsilon_{33}^E \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (11c)$$

식 (11)로부터 다음과 같은 운동방정식을 얻는다.

$$c_{33}^D \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (c_{33}^D - c_{13}^D) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{a_1 e_{13}}{\epsilon_{33}} \frac{1}{r^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (12a)$$

여기서 c_{33}^D 와 c_{13}^D 는 다음과 같다.

$$c_{33}^D = c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}}, \quad c_{13}^D = c_{13}^E + \frac{e_{13} e_{33}}{\epsilon_{33}} \quad (12c,d)$$

식 (12a)는 $a_1 e_{13} / \epsilon_{33}$ 으로 인해 일반해와 특수해를 갖는다. 특수해를 구하는 과정은 상당히 복잡한데 식 (12)의 $a_1 e_{13} / \epsilon_{33}$ 항을 무시할 만큼 작다고 가정하고 $u(r) = U(r) \exp(j\omega t)$ 를 대입하여 변수 분리하면, 다음과 같은 운동 방정식을 얻는다.

$$r^2 \frac{d^2 U}{dr^2} + r \left(1 - \frac{c_{13}^D}{c_{33}^D}\right) \frac{dU}{dr} + k^2 r^2 U = 0 \quad (13)$$

변환기 내면과 외면 사이에 작용하는 전압 $V_0 e^{j\omega t}$ 에 의해 구동되고 있다. 이에 대한 경계조건을 다음과 같이 설정한다.

$$r = R_i \text{ 에서 } \sigma_r = 0, \quad \phi = 0 \quad (14a)$$

$$r = R_o \text{ 에서 } \sigma_r = 0, \quad \phi = V_0 \quad (14b)$$

2.2 해

A. 운동 변위

적용할 경계조건에 따라 유도된 운동 방정식 (4)와 (9) 및 (13)의 해를 구하면 운동 변위를 다음과 같이 얻는다.

$$V(\theta) = A \sin p\theta + B \cos p\theta \quad (15a)$$

$$W(z) = C \sin qz + D \cos qz \quad (15b)$$

$$U(r) = E r^\nu J_\nu(kr) + F r^\nu J_{-\nu}(kr) \quad (15c)$$

그리고 전기 퍼텐셜 $\phi(r)$ 은 다음과 같다.

$$\phi(r) = \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}} \left[E r^\nu J_\nu(kr) + F r^\nu J_{-\nu}(kr) \right] - \frac{a_1}{\epsilon_{33}} \ln r + a_2 \quad (16)$$

B. 특성방정식

식 (15a)를 식 (3)에 대입한 결과를 식 (15a)와 함께 식 (1a)에 대입하여 응력식 $\sigma_\theta(\theta)$ 을 구한다. 그리고 식 (15b)를 식 (8)에 대입한 결과를 식 (15b)와 함께 식 (6b)에 대입하여 $\sigma_z(z)$ 를 얻는다. 마찬가지로 식 (15c)와 (16)를 식 (11a)에 대입하여 $\sigma_r(r)$ 을 얻는다. 이 결과들을 정리하면 다음과 같다.

$$\sigma_\theta(\theta) = c_{11}^t p \frac{1}{R} (A \cos p\theta - B \sin p\theta) + e_{31}^t \frac{V_0}{t} \quad (17a)$$

$$\sigma_z(z) = c_{11}^t q [C \cos qz - D \sin qz] + e_{31}^t \frac{V_0}{t} \quad (17b)$$

$$\sigma_r(r) = E k c_{33}^D r^\nu J_{\nu-1}(kr) - F k c_{33}^D r^\nu J_{-\nu+1}(kr) - \frac{a_1 e_{33}}{\epsilon_{33}} \frac{1}{r} \quad (17c)$$

$$\phi(r) = A_1 \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}} r^\nu J_\nu(kr) + A_2 \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}} r^\nu J_{-\nu}(kr) - \frac{a_1}{\epsilon_{33}} \ln r + a_2 \quad (17d)$$

원주방향 경계조건 (5a,b)를 식 (15a)에 대입하여 상수 A, B 를 결정하고, 폭방향 경계조건인 식 (10a,b)를 식 (17b)에 대입하여 상수 C, D 를 결정하면, 변위 $V(\theta)$ 와 $W(z)$ 는 다음과 같이 된다.

$$V(\theta) = -\frac{R e_{31}^t}{c_{11}^t p} \frac{V_0}{t} \left(\sin p\theta + \frac{\cos p\theta_1 - 1}{\sin p\theta_1} \cos p\theta \right) \quad (18a)$$

$$W(z) = \frac{e_{31}^t}{c_{11}^t q} \frac{V_0}{t} \left(-\sin qz + \frac{1 - \cos qL}{\sin qL} \cos qz \right) \quad (18b)$$

이로부터 유도되는 공진 특성방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\Delta_\theta(\omega) = \frac{\sin p\theta_1}{\cos p\theta_1 - 1} = 0 \quad (19a)$$

$$\Delta_z(\omega) = \frac{\sin pL}{\cos pL - 1} = 0 \quad (19b)$$

반경방향 응력식 (17c)와 전기 퍼텐셜 (17d)에 경계조건 (14a,b)를 대입한 후 이들 결과를 행렬 형태로 정리하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_0 \end{pmatrix} \quad (20a)$$

$$D_{11} = R_o^{\nu+1} J_{\nu-1}(kR_o) - R_i^{\nu+1} J_{\nu-1}(kR_i) \quad (20b)$$

$$D_{12} = -R_o^{\nu+1} J_{-\nu+1}(kR_o) + R_i^{\nu+1} J_{-\nu+1}(kR_i) \quad (20c)$$

$$D_{21} = \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}} \left[R_o^\nu J_\nu(kR_o) - R_i^\nu J_\nu(kR_i) \right] - \frac{k c_{33}^D}{\epsilon_{33}} R_o^{\nu+1} \ln \frac{R_o}{R_i} J_{\nu-1}(kR_o) \quad (20d)$$

Table 1 Properties of EC 64 piezoelectric ceramic

Constant		Value
Elastic stiffness constant ($\times 10^9$ Pa)	c_{11}^E	132.2
	c_{12}^E	73.4
	c_{13}^E	72.6
	c_{33}^E	117.9
Piezoelectric stress constant (C/m^2)	e_{31}	-4.7
	e_{33}	16.3
	e_{51}	13.0
Dielectric constant ($\times 10^{-9}$ C ² /Nm ²)	ϵ_{33}^S	5.71
Density (kg/m ³)	ρ	7500

Table 2 Shapes of four piezoelectric transducer shells

Transducer	Size			
	Outer radius, R_o (mm)	Inner radius, R_i (mm)	Width, L (mm)	Angle, θ_1 (°)
A	19.2	23.2	19	180
B	12	14.3	20	180
C	7.85	10.05	15	180
D	5.5	7.1	12	180

$$D_{22} = \frac{e_{33}}{e_{33}^D} [R_o^\nu J_{-\nu}(kR_o) - R_i^\nu J_{-\nu}(kR_i)] + \frac{kc_{33}^D}{e_{33}} R_o^{\nu+1} \ln \frac{R_o}{R_i} J_{-\nu+1}(kR_o) \quad (20e)$$

식 (20a)로부터 공진을 나타내는 특성방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\Delta_r(\omega) = D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21} = 0 \quad (21)$$

3. 해석 결과 및 고찰

원호형 압전 변환기의 재질은 EDO사의 EC64세라믹으로서, 물성치⁽⁷⁾를 환산하여 Table 1에 정리하였으며, 이 물성치들이 수치 계산에 적용된다. 네 가지 크기의 변환기 A, B, C, D를 사용하였고, 이들의 치수인 외부 반지름 R_o , 내부 반지름 R_i 와 폭 L 과 원호각 θ_1 이 Table 2에 기재되어 있다.

Table 1의 물성치와 Table 2에 제시된 형상 조건을 식 (19a,b)와 (21)에 대입해 얻은 공진주파수를 Table 3에 기재하여 실험 결과와 비교하였다. A, B, C, D 네 개의 변환기에서 원주방향 경계조건을 적용해 얻은 공진주파수는 대략 8 % 정도의 오차 범위에서 잘 맞는다. 이런 오차 발생 원인은 해를 유도하는 과정에서 폭방향으로 평면 변형률 조건을 적용했기 때문이다. 폭방향과 반경방향 경계조건에 의해 얻은 특성방정식으로부터 구한 공진주파수는 3% 오차 범위에서 비교적 잘 맞는다.

4. 결론

원호형 압전 변환기에 대해서 세 가지 방향 즉 원주방향, 폭방향과 반경방향 운동의 경계조건에 따라 운동 방정식을 유도하였다. 이로부터 해를 구하고 특성방정식을 유도하여 공진주파수를 구하였다. 이론 해로부터 구한 공진주파수가 실험 결과가 서로 잘 맞는 것을 확인함으로써 이론해의 타당성을 검증하였다. 관에서의 탄성과 송수신 용 변환기 설계를 위한 이론적 토대를 마련하였다.

Table 3 Comparison of resonance frequencies

Motion direction	Resonance frequency, f_r (kHz)		
	Transducer	Theory	Experiment
Circumferential	A	36.3	33.7
	B	58.4	52.5
	C	85.9	77.5
	D	122	106
Longitudinal	A	90.1	87.5
	B	86.7	83.8
	C	116	115
	D	146	147
Raidal	A	510	538
	B	888	900
	C	928	940
	D	1277	1270

참 고 문 헌

- (1) Bush-Vishniac, I. J., 1999, Electromechanical Sensors and Actuators, Springer-Verlag, New York, Chapter 5.
- (2) 황교광, 김진오, 2003, "원호형 압전 변환기의 반경방향 고유진동 특성 연구", 한국소음진동공학회지, 제13권, 제3호, pp. 155-163.
- (3) 이정구, 김진오, 2005, "관 내 세정을 위한 초음파 음장 연구", 한국소음진동공학회지, 제15권, 제5호, pp. 564-570.
- (4) Kim, J. O., Hwang, K. K., and Bau, H. H., 2003, "A study for the measurement of a fluid density in a pipe using elastic waves", Journal of the Korean Society for Nondestructive Testing, Vol. 23, No. 6, pp. 583-593.
- (5) Meitzler, A. H., O'Bryan, Jr. H. M., Tiersten, H. F., 1973, "Definition and measurement of radial mode coupling factors in piezoelectric ceramic materials with large variations in Poisson's ratio", IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-20, pp. 233-239.
- (6) Graff, K. F. Graff, 1991, Wave Motion in Elastic Solids, Dover, New York, Chapter 4.
- (7) EDO Corporation, 2003, Piezoelectric Ceramic Material and Shapes, <http://www.edocermic.com/Downloads/htm>.