

## 불확실성을 갖는 비선형 시스템의 적응 퍼지 웨이블릿 제어

장진수, 박기광, 양해원  
한양대학교 전자전기제어계측공학과

### Adaptive Fuzzy Wavelet Control for a class of Uncertain Nonlinear Systems

Jin Su Jang, Ki Kwang Park, Hai Won Yang  
Dept. of Elec. Elec. Con. & Inst. Eng. Hanyang Univ.

**Abstract** - In this paper, a systematic guideline is introduced to design a stable adaptive fuzzy wavelet controller with sliding mode for a class of uncertain nonlinear systems. Based on the Lyapunov synthesis approach, we construct the fuzzy wavelet controller such that it can basically control and guarantee the stability of the whole control system. On the other hand, a robust controller is design to restrain or eliminate the disturbance and assure the desired output accuracy of a control system. Some experimental results for a chaotic system are provided here to demonstrate the effectiveness of the control algorithm.

#### 1. 서 론

최근에, 적응 퍼지 시스템에 대한 가장 유용한 방법들이 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대해 제안이 되었다. [1]과 [2] 논문에서, Wang L. X.는 Lyapunov 이론에 기초한 적응 퍼지 알고리즘을 제안하였다. 슬라이딩 모드 퍼지 제어기[3, 4]는 퍼지 제어를 설계하기 위한 다른 방법이다. 퍼지 법칙들은 스윙칭 초평면으로부터의 거리를 나타내는 변수  $s$ 를 이용하여 구성되어진다. 그 다음 제어 시스템은 안정성을 보장하기 위해 초평면에 도달하고 미끄러지게 강요받게 된다. 하지만 퍼지 제어 법칙에서 이용되는  $s$ 는 직접적으로 측정이 불가능하기 때문에 지식이나 직관적으로 법칙을 설정하기 어렵다. Tong shaocheng et al, [5]은  $H^\infty$ 에 기초한 안정한 적응 퍼지 제어기를 제안하였다. 이런 방법들의 제어기는 적응 퍼지 시스템과  $H^\infty$  제어기와 슬라이딩 모드 제어기와 같은 감속제어를 포함하는 강인 보상기로 구성되어 진다. 하지만 이런 방법들의 대부분은 시스템의 상태가 관측 가능해야 하고 정확성과 복잡한 구조 사이의 절충점을 찾아야 하는 약간의 결점을 가지고 있다.

웨이블릿과 퍼지-신경망을 조합한 FWN 제어기는 다중해상도 능력뿐만 아니라 간단한 구조, 비선형 시스템에 대한 좋은 근사 능력의 이점을 가진다. 본 논문에서는 이차 비선형 시스템을 고려하여 슬라이딩 모드 기법을 이용한 적응 FWN 제어기를 제안한다. 이 방법은 고차 시스템에도 적용될 수 있다. 퍼지 제어기는 두 개의 부분으로 나눌 수 있다. 한 부분은 기본 제어기로서 전체 시스템의 안정성을 보장하는 역할을 하고 다른 하나는 외란성분을 제거하거나 억제시켜 원하는 추적 정확성을 제공하기 위한 강인제어기이다. 제어기의 성능을 증명하기 위해 카오스 시스템에 대해 모의실험을 하였다.

#### 2. 본 론

##### 2.1 시스템 모델

이차 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f(x, \dot{x}) + u \\ y &= x \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $f(x, \dot{x})$ 는 미지의 비선형 함수이다.  $u$ 는 시스템의 입력,  $y$ 는 시스템의 출력이다.  $y_r$ 는 기준 값이고 추적오차  $e = y_r - y$ 를 정의한다.

$f(x, \dot{x})$ 와  $b$ 를 알고 있다고 가정하면 비선형 성분을 소거하기 위한 제어기  $u^*$ 를 선택할 수 있다.

$$u^* = -f(x, \dot{x}) + \ddot{y}_r + k_1 \dot{e}(t) + k_2 e(t) \quad (2)$$

여기서  $k_1, k_2$ 는 상수이다. 식(1)에 식(2)를 삽입하면 아래와 같다.

$$\ddot{e}(t) + k_1 \dot{e}(t) + k_2 e(t) = 0 \quad (3)$$

만약  $k_1, k_2$ 를 적절히 선택하면  $t \rightarrow \infty$  때  $e(t) \rightarrow 0$ 을 알 수 있다. 그래서 시스템 출력  $y$ 는 기준출력  $y_r$ 에 점근적으로 수렴한다. 하지만

$f(x, \dot{x})$ 를 알 수 없기 때문에  $u^*$ 를 찾을 수 없다. 본 논문에서는  $u_{FWN}$ 으로 표현되는 새로운 제어입력을 구성하기 위해 FWN[7, 8]을 이용한다. 시스템 안정성을 고려하여 제어기를 다음과 같이 구성한다.

$$u(t) = u_{FWN}(t) + u_s(t) \quad (4)$$

여기서  $u_s$ 는 강인제어기이다.

##### 2.2 슬라이딩 모드 기법을 이용한 적응 FWN 제어기

먼저 FWN 제어기를 설계한다. 슬라이딩 표면  $S$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$S = \dot{e}(t) + k_1 e(t) + k_2 \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (5)$$

퍼지 서브-시스템은 스케일 요소  $P_i$ 에 대해  $I_{P_i}$ 개의 퍼지 규칙을 가진다고 가정한다.  $k$ 번째 퍼지 규칙은 아래와 같이 표현한다[6].

$$R_k: \text{if } x_1 \text{ is } A_{p_{1k}}, \text{ and } \dots, \text{ and } x_n \text{ is } A_{p_{nk}}, \text{ then } y \text{ is } \theta_{ik}$$

여기서  $A_{p_{i,j,k}}$ 는 아래와 같이 특성화될 수 있는 퍼지 멤버십 함수이고  $\theta_{ik}$ 는 서브 모델의 출력이다.

$$u_{A_{p_{i,j,k}}}(x_j) = \phi_{p_{i,j,k}}(x_j), \quad j = 1, 2 \quad (6)$$

$f'_{E_i}(X)$  퍼지 서브-시스템의 수학적 표현은 아래와 같다.

$$f'_{E_i}(X) = \frac{\sum_{k=1}^{I_{P_i}} \theta_{ik} \phi_{p_{i,1,k}}(s) \phi_{p_{i,2,k}}(ds)}{\sum_{k=1}^{I_{P_i}} \phi_{p_{i,1,k}}(s) \phi_{p_{i,2,k}}(ds)} = \frac{\sum_{k=1}^{I_{P_i}} w_{ik} \Phi_{P_i, L_k}(X)}{\sum_{k=1}^{I_{P_i}} \Phi_{P_i, L_k}(X)} \quad (7)$$

여기서  $X = [S, dS]^T$ 이다. FWN 제어기의 출력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{FWN}(t) &= \sum_{i=1}^I \mu_{B_i}(P_i, X) f'_{E_i}(X) / \sum_{i=1}^I \mu_{B_i}(P_i, X) \\ &= \sum_{i=1}^I \hat{\mu}_{B_i}(P_i, X) \sum_{k=1}^{I_{P_i}} \theta_{ik} \Phi_{P_i, L_k}(X) / \sum_{k=1}^{I_{P_i}} \Phi_{P_i, L_k}(X) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $\mu_{B_i}$ 과  $\hat{\mu}_{B_i}$ 는 웨이블릿 멤버십 함수이고 다음과 같다.

$$\mu_{B_i}(P_i, X) = \prod_{j=1}^n \mu_{B_i}(p_{i,j}, x_j) \quad (9)$$

$$\hat{\mu}_{B_i}(P_i, X) = \mu_{B_i}(P_i, X) / \sum_{i=1}^I \mu_{B_i}(P_i, X) \quad (10)$$

<그림 1>은 슬라이딩 모드 기법을 이용한 FWN 제어 시스템을 보인 것이다.

두 번째로 강인제어기  $u_s(t)$ 를 설계한다. 다음과 같이 최소 오차를 정의한다.

$$\epsilon = u_{FWN}^*(S | \theta^*, P^*, L^*) - u^* \quad (11)$$

여기서  $\theta^*, P^*, L^*$ 은 최적의 파라미터들이다. 각각 퍼지 컨시퀀스, 스케일 파라미터, 트랜스레이트 파라미터이다.

식(5)의 슬라이딩 평면을 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \ddot{e}(t) + k_1 \dot{e}(t) + k_2 e(t) \\ &= \ddot{y}_r - \ddot{y} + k_1 \dot{e} + k_2 e \\ &= b[u^* - u] = b[u^* - u_{FWN} - u_s] \end{aligned} \quad (12)$$

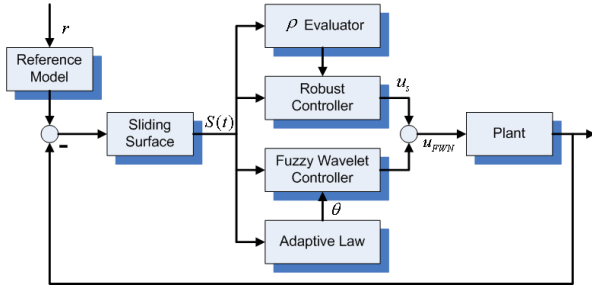
아래와 같이  $\tilde{u}_{FWN}$ 을 정의한다.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{FWN} &= u^* - u_{FWN} = u_{FWN}^* - u_{FWN} - \epsilon \\ &= \theta^{*T} \Gamma^* - \theta^T \Gamma - \epsilon \end{aligned} \quad (13)$$

$\tilde{\theta} = \theta^* - \theta, \tilde{\Gamma} = \Gamma^* - \Gamma$ 로 정의하고 식(13)은 다음과 같다.

$$\tilde{u}_{FWN} = \tilde{\theta}^T \tilde{\Gamma} + \tilde{\theta}^T \Gamma - \epsilon \quad (14)$$

페-루프 시스템의 추적성능을 보장하기 위해 scale 파라미터  $P$ 와 translate 파라미터  $L$ 은 온라인으로 조정될 수 있다.  $\tilde{\Gamma}$ 는 Taylor series



〈그림 1〉 적응 FWN 제어 시스템

를 이용해 선형적으로 확장되어 진다.

$$\tilde{T} = [\tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 \dots \tilde{\mu}_c]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial P} & \frac{\partial \mu_2}{\partial P} & \dots & \frac{\partial \mu_c}{\partial P} \end{bmatrix}^T \tilde{P} \quad (15)$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial L} & \frac{\partial \mu_2}{\partial L} & \dots & \frac{\partial \mu_c}{\partial L} \end{bmatrix}^T \tilde{L} + H \\ = A\tilde{P} + B\tilde{L} + H$$

여기서  $\tilde{P} = P^* - P$ ,  $\tilde{L} = L^* - L$  이고  $H$ 는 교차 부분이다.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial P} & \frac{\partial \mu_2}{\partial P} & \dots & \frac{\partial \mu_c}{\partial P} \end{bmatrix}^T \in R^{c \times n} \quad (16)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial L} & \frac{\partial \mu_2}{\partial L} & \dots & \frac{\partial \mu_c}{\partial L} \end{bmatrix}^T \in R^{c \times n} \quad (17)$$

식(13)에 식(15)를 삽입하면,  $\tilde{u}_{FWN}$ 을 얻을 수 있다.

$$\tilde{u}_{FWN} = (\theta + \tilde{\theta})^T \tilde{T} + \tilde{\theta}^T \tilde{T} - \epsilon \quad (18) \\ = \theta^T (A\tilde{P} + B\tilde{L} + H) + \tilde{\theta}^T \tilde{T} + \tilde{\theta}^T \tilde{T} - \epsilon \\ = \tilde{\theta}^T \tilde{T} + \theta^T A\tilde{P} + \theta^T B\tilde{L} + \psi$$

여기서  $\psi = \theta^T H + \tilde{\theta}^T \tilde{T} - \epsilon$ 은 불확실 성분이다.  $|\psi| < \rho$ 과 같이 가정한다. Theorem 1: 식(1)에 주어진 비선형 시스템에 대해 각각 식(7)과 식(19)으로 정의된 FWN 제어기와 강인제어기를 이용한다면 적응 법칙은 다음과 같다.

$$\dot{\theta} = \eta_1 S \tilde{T}, \quad \dot{P} = \eta_2 S A \theta, \quad \dot{L} = \eta_3 S B \theta, \quad \mu_s(t) = \rho \operatorname{sgn}(S) \quad (19)$$

여기서 적응 이득값은  $\eta_1 > 0$ ,  $\eta_2 > 0$  그리고  $\eta_3 > 0$  이다. 그래서 페루프 시스템은 점근적 안정이다.

증명 : 다음과 같이 Lyapunov 함수를 정의한다.

$$V = \frac{1}{2} S^2 + \frac{b}{2\eta_1} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} + \frac{b}{2\eta_2} \tilde{P}^T \tilde{P} + \frac{b}{2\eta_3} \tilde{L}^T \tilde{L} \quad (20)$$

$$\dot{V} = -bS[\psi - u_s] \leq b|S||\psi| - bu_s = bS[|\psi| - u_s] \\ = bS[|\psi| - \rho] = -bS|\gamma| < 0 \quad (21)$$

여기서  $\gamma = \rho - |\psi| > 0$ .  $\dot{V} < 0$  때문에 시스템은 안정하다.

제어 시에 큰 제어 이득값이 요구된다. 하지만  $\rho$ 가 너무 크면 큰 채터링과 편향이 발생시킬 것이다. 그래서 불확실 성분의 상한값을 유도하기 위한 적응 기법이 필요하다. 다음과 같은 적응 알고리즘과 강인제어기를 설계하였다.

$$\dot{\rho} = \lambda |S|, \quad u_s = \hat{\rho} \operatorname{sgn}(S) \quad (22)$$

Theorem 2: 식(1)로 주어진 비선형 시스템에 대해 식(22)과 같이 강인제어기가 설계된다면 페루프 제어 시스템은 점근적 안정이다.

증명 : 다음과 같이 Lyapunov 함수를 정의한다.

$$V = \frac{1}{2} S^2 + \frac{b}{2\lambda} \tilde{\rho}^2 + \frac{b}{2\eta_1} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} + \frac{b}{2\eta_2} \tilde{P}^T \tilde{P} + \frac{b}{2\eta_3} \tilde{L}^T \tilde{L} \quad (23)$$

$$\dot{V} = bS\psi - \rho b|S| \leq b|S||\psi| - \rho b|S| = bS[|\psi| - \rho] = -\gamma b|S| < 0 \quad (24) \\ \dot{V} < 0 \text{ 때문에 시스템은 안정하다.}$$

### 2.3 모의 실험

식(25)의 카오스 시스템을 제어하기 위해 2.2절에서 제안된 FWN 제어기를 적용하였다.

$$x_1 = x_2 \quad (25)$$

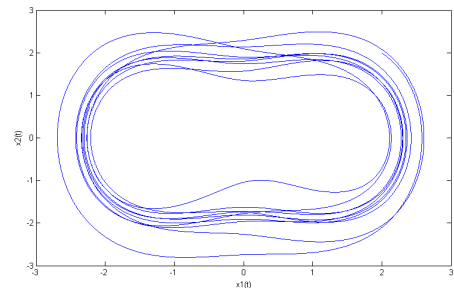
$$x_2 = f(x_1, x_2) + u(t) = -0.1x_2 - x_1|x_1| + 2\cos t + u(t)$$

$u(t) = 0$ 이라면 카오스 시스템이다. 제어 목적은 식(24)의 상태변수  $(x_1, x_2)$ 가 원점 근처로 이동하게 하는 것이다. 퍼지 제어기의 디자인 과정은 다음과 같다.

Step 1: 위상평면 파라미터를 선택한다:  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 0.1$ .

Step 2: 적응 이득값  $\lambda = 8$ ,  $\eta_1 = 2$ ,  $\eta_2 = 2$ ,  $\eta_3 = 2$ 을 선택한다.

Step 3:  $|x_1| \leq 3$ 과  $|x_2| \leq 3$ 으로 설계한다. 이 영역에서  $f(x_1, x_2)$ 는  $\delta = 0.1|x_2| + |x_1|^2 + 2 = 11.3$ 에 의해 uniformly bounded된다.



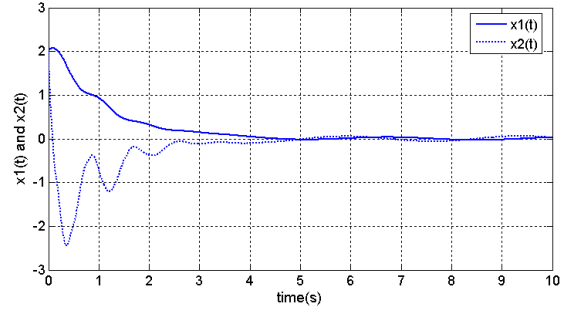
〈그림 2〉  $u(t) = 0$ 와  $x_1(0) = x_2(0) = 2$ 의 조건에서의 위상평면 상의 카오스 시스템의 궤적

Step 4: 식(7)에 따라 FWN 제어기를 설계한다.  $x_1$ 과  $x_2$  각각의 변수에 대해 각각  $[-3, 3]$ 을 커버하는 7개의 퍼지 집합을 정의한다. 다음과 같이 퍼지 규칙 베이스를 구성한다.

$$R_k : \text{if } S \text{ is } B_{p,j}, \text{ and } dS \text{ is } B_{p,j}, \text{ then } u = \theta_j$$

Step 5: 〈그림 1〉과 같이 슬라이딩 모드 기법을 이용한 FWN 제어기를 갖는 페루프 제어 시스템을 구성한다. 식(19)의  $\mu_s(t)$ 에 의해 강인 제어기를 설계한다. 퍼지 컨시퀀스, 스케일 파라미터, 트랜스레이트 파라미터는 식(18), 식(19)과 식(22)에 의해 결정된다.

〈그림 3〉은 초기 조건  $x_1(0) = x_2(0) = 2$ 에서의 시스템 상태변수의 궤적을 보인 것이다. FWN 제어기가 빠르게 원점 근처로 시스템의 궤적을 이동시키는 것을 볼 수 있다.



〈그림 3〉 초기조건  $x_1(0) = x_2(0) = 2$ 에서의 시스템 상태변수의 궤적

### 3. 결 론

본 논문에서는 웨이블릿과 퍼지-신경망을 조합한 FWN 제어기는 다중해상도 능력뿐만 아니라 간단한 구조, 비선형 시스템에 대한 좋은 근사 능력의 이점을 가진다. Lyapunov 안정도 기법에 따라 FWN을 구성함으로써 시스템 전체의 안정성을 보장 받았다. 그럼과 동시에 외란을 제거하거나 억제시키기 위해 강인제어기를 설계되었다. 카오스 시스템의 모의실험을 통해 제안된 제어기의 효과가 입증되었다.

### 〈참 고 문 헌〉

- [1] Wang L.-X, "Stable Adaptive Fuzzy Control of Nonlinear Systems", IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1, 146-155, 1993.
- [2] Wang L.-X, "A Course in Fuzzy Systems & Control", Tsinghua University Press, 2003.
- [3] G.C. Hwang and S.C. Lin, "A stability approach to fuzzy control design for nonlinear systems", Fuzzy sets and systems, 48, 279-287, 1992.
- [4] S.W. Kim and J.J. Lee, "Design of a fuzzy controller with fuzzy sliding surface", Fuzzy sets and systems, 71, 359-367, 1995.
- [5] Jia Fengting, Tong Shaocheng and Gong Changzhong, "Fuzzy Adaptive Sliding Mode Output Feedback Control for a Class of Nonlinear Systems", Control and Decision, 3, 150-154, 2003.
- [6] C S Chen, W L Chen, "Analysis and Design of a Stable Fuzzy Control System", Fuzzy Sets and Systems, 96, 21-25, 1998.
- [7] Wang Jun and Xiao Jian, "Fuzzy Wavelet Network Modeling With B-Spline Wavelet", The fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 08, 4144-4148, 2005.
- [8] Lin C. K. and Wang S. D., "Fuzzy Modeling Using Wavelet Transform", Electronics Letters, 32, 2255-2256, 1996.