2007년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2007. 7. 18 - 20

SVM을 이용한 강인한 H∞ 제어기 구성

윤성식, 오창훈, 김민찬, 안호균, 박승규, 곽군평, 윤태성
창원대학교 전기공학과

Robust H∞ Control Using SVM

Seong Sik Yoon, Chang Hoon Oh, Min Chan Kim, Ho Kyun Ahn, Seung Kyu Park, Gun Pyong Kwak, Tae Sung Yoon
Department of Eletrical Engineering Changwon National University

Abstract - In this paper, a sliding mode controller with SVM sliding surface is proposed. In the conventional sliding mode control, the dynamic of sliding surface is not as same as nominal dynamic of original system. Therefore the aim of this paper is to design sliding surface without defining any additional dynamic state by using support vector machines. As a result, the proposed controller can have the same dynamic of nominal system controlled by H∞ controller.

1. 서 론

SMC(Sliding Mode Control)는 파라미터 불확실성에 대하여 강인한 제어 기법으로 알려져 있다.[1][2][3] 일반적인 SMC에서 시스템의 동특성은 슬라이딩 평면에 의해서 결정되므로 공칭 시스템의 동특성을 가질 수가 없다. 그러므로 이를 해결하기 위한 연구가 진행되었다.[4][5] 하지만 이 결과들은 제어기의 차수를 증가시키기 때문에 개선이 필요하다. SVM(Support Vector Machines)은 구조적 위험 최고화를 근간으로 하는 통계적 학습 이론에 기반 하여 뛰어난 함수 추정을 가능하게 하는 장점이 있다.[6][7]

본 논문에서는 SVM을 이용하여 슬라이딩 평면을 설계함으로써 불확실성에 의해서 제어기 성능에 영향을 받을 수 있는 H∞제어기의 강인성을 향상시킬 수 있는 제어기법을 제안한다. 이 제어기법은 SVM을 통하여 공칭 시스템의 상태들의 관계를 추정하여 슬라이딩 평면을 설계하면 이 슬라이딩 평면은 제어기의 차수의 증가 없이 공칭 시스템의 동특성을 가질 수 있다. 그러므로 외란과 불확실성이 존재하더라고 H∞제어기의 강인성을 향상시킬 수 있는 제어기 설계가 가능해진다.

2. 문제 설정

다음과 같이 불확실성을 갖는 n차 시스템을 고려하면,

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) + Dh(t) \tag{1}$$

여기서 $X \in R^n$ 는 시스템의 상태, $u \in R$는 제어 입력, $h \in R$는 알려지지 않은 외란이며 $|h(t)| < h_{\max}$와 $rank[BC] = rank[B]$의 정행조건을 만족한다.

식 (1)로부터 공칭시스템의 가제어 표준형은 다음과 같다.

$$\dot{X}_0(t) = A_0 X_0(t) + B_0 u_0(t) \tag{2}$$

여기서 $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_n \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ 이고, $u_0(t)$는 공칭제어 입력이다.

일반적인 SMC의 슬라이딩 평면은 다음과 같이 설계된다.

$$S = C_n X_n + C_{n-1} X_{n-1} + \cdots + C_2 X_2 + C_1 X_1 + C_0 = 0 \tag{3}$$

여기서 $C_0, C_1, \cdots, C_n$은 슬라이딩 모드의 동특성이 안정하도록 주어진다.

슬라이딩 모드가 일어나게 하는 조건은 다음과 같다.

$$S(x)\dot{S}(x) < 0 \tag{4}$$

슬라이딩 모드 제어의 불연속 입력은 다음 식에서 얻어진다.

$$u(.) = \begin{cases} u^+(.) \text{ for } S(x) > 0 \\ u^-(.) \text{ for } \dot{S}(x) < 0 \end{cases} \tag{5}$$

하지만 식 (3)과 같은 슬라이딩 평면은 공칭시스템의 동특성을 가질 수가 없다. 그러므로 본 논문에서는 SVM을 이용하여 H∞ 제어기를 가진 공칭시스템의 동특성을 가질 수 있는 슬라이딩 평면 설계 기법을 제안한다.

3. SVM을 이용한 슬라이딩 평면 설계

두 클래스 군집을 선형 분리하는 결정평면과 가장 가까운 샘플을 Support Vector(SV)라고 하고, SV와 결정평면과의 거리를 마진이라고 한다. SVM은 분리 마진을 최대화하는 결정평면을 구한다. 선형 분리 가능한 샘플에 대한 결정평면은 많이 존재 할 수 있으나, 분리마진을 최대화하는 것을 구함으로써 높은 일반화 성능을 기대할 수 있다.

학습집합 $\{(x_1, y_1), \cdots, (x_l, y_l)\}$이 주어졌을 때, 결정평면은 $wx + b = 0$ 이다. 여기서, $x \in R^n$는 입력벡터이고, w는 가중치 벡터, $y \in \{-1, +1\}$는 타겟값, b는 바이어스 를 나타낸다. 이때, 입력 벡터 x에서 결정평면까지의 마진은 $2/\|w\|$ 이며, 이를 최대화 하기 위해, 식 (6)과 같이 비용함수를 정의한다.

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\|w\|^2 \tag{6}$$

식 (6)은 라그랑지안 최적화 기법을 이용해 식 (7)과 같이 최적의 w_o와 b_o을 구할 수 있다.

$$w_o = \sum_{i=1}^{l} \alpha_{oi} y_i x_i, \; b_o = -\frac{1}{2} w_o \cdot [x_r + x_s] \tag{7}$$

여기서 α는 라그랑쥐 계수 이고, SV인 x에 대해서만 라그랑쥐 계수가 0이 아닌 값을 가짐으로써, SV만이 w를 계산하는데 의미를 가지게 된다. 선형적으로 분리 가능하지 않는 경우는 오류에 대한 패널티($\xi \geq 0$)를 적용하여 수식 (8)과 같은 비용함수를 통해 최적화가 가능하다.

$$\Phi(w, \xi) = \frac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{i=0}^{l} \xi_i \tag{8}$$

여기서 C는 마진의 최대화와 분류 에러에 대한 조절 인자이다. 분리면이 비선형 인 경우에는 커널 함수를 도입하여 특징 공간에서 선형분리를 시도한다.

$$\sum_{i=1}^{Ns} \alpha_i y_i K(s_i, x) + b = 0 \tag{9}$$

여기서, Ns는 SV의 수이고, S_i는 SV를, 그리고 K는 커널 함수를 나타낸다.

본 논문에서는 3차 계통 시스템에 Polynomial 커널 함수를 사용하여 상태들의 관계를 추정 통해 구성한 슬라이딩 평면은 식 (10)과 같다.

$$S(x) = x_1 - \hat{x_1} = x_1 - \sum \alpha_i K([x_2, x_3], x_1) - b \tag{10}$$

여기서 $\hat{x_1}$는 3차 계통에서 SVM에서 x_2, x_3을 통하여 추정한 x_1이다.

4. 공칭 시스템의 H∞ 제어기 구성

H∞ 제어기는 다음의 H∞ 놈을 최소화 시키는 제어기 이다.

$$\|T_{zw}\|_\infty = sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = sup\sigma_{\max}[T_{zw}(jw)] \tag{14}$$

여기서, $T_{zw}(s) = C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1} B_{cl} + D_{cl}$이다.

H∞ 제어기의 형태는 다음과 같다.

$$u = K_{11} y + K_{12} v, \; \dot{v} = K_{21} y + K_{22} v \tag{15}$$

제어기가 포함된 전체계통의 동특성방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x_{cl}} = A_{cl} x_{cl} + B_{cl} w, \; z = C_{cl} x_{cl} + D_{cl} w \tag{16}$$

여기서, $x_{cl} = [x^T, v^T]^T \in R^{n+k}$

$C_{cl} = C_r + D_r K C_0$, $D_{cl} = D_{zw} + D_r K D_0$, $D_0 = \begin{bmatrix} D_{yw} \\ 0 \end{bmatrix}$, $B_r = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix}$, $A_{cl} = A_0 + B_0 K C_0$, $B_{cl} = B_0 K D_0 + B_r$, $C_r = [C_z \; 0]$, $D_r = [D_{zu} \; 0]$

위의 제어기는 다음의 LMI조건에서 구해진다.

$$X > 0 \; , \; \begin{bmatrix} A_{cl}X + XA_{cl}^T & * & * \\ B_{cl}^T & -\gamma I & * \\ C_{cl}X & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{17}$$

을 K,Y에 관한 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A_0X+* & * & * \\ S_r^T & -\gamma I & * \\ C_rX & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \\ D_r \end{bmatrix} K\begin{bmatrix} C_0X, & D_0, & 0 \end{bmatrix} + * < 0 \qquad (18)$$

결국 $\| T_{zw} \|_\infty < \gamma$를 보장할 필요충분조건은 다음 LMI와 $rank(I-XY)=0$를 만족하는 해가 존재하는 것이다. 여기서 $*$는 대칭에 의해 결정 할 수 있는 행렬 블록이다.

$$\Phi_\infty^T \begin{bmatrix} A_0X+* & * & * \\ B_r^T & -\gamma I & * \\ C_rX & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \Phi_\infty < 0 \Theta_\infty^T \begin{bmatrix} YA_0+* & * & * \\ B_r^T & -\gamma I & * \\ C_rX & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \Theta_\infty < 0,$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (19)$$

여기서 Φ_∞, Θ_∞는 $\left[B_0^T, 0, D_r^T\right]^T, \left[C_0, D_0, 0\right]^T$ 의 orthogonal complement (주어진 $A \in R^{n \times m}$에 대하여 column을 A^T의 null space의 basis vector로 갖는 행렬)를 의미한다.

5. 수치예제와 컴퓨터 시뮬레이션

본 논문에서 제안된 제어기 성능의 우수성을 검증하기 위하여 다음과 같은 3차 계통을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} -0.990 & 17.410 & 96.150 \\ 0.265 & -0.851 & -11.390 \\ 0 & 0 & -30.000 \end{bmatrix},\ B_u = \begin{bmatrix} -97.780 \\ 0 \\ 30.000 \end{bmatrix},\ B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\ C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ D_{yw} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C_z = [1\ 1\ 0],\ D_{zu} = 0,$$

$D_{zw} = 0$

제어기 차수가 0이고, γ=0일 때 출력 궤환 H_∞제어기는 다음과 같다.

$$u_H = [0.1249\ \ 0.3236]$$

H_∞ 제어기의 초기값 $x_1(0)=1$, $x_2(0)=2$, $x_3(0)=3$ 일때, SVM을 이용하여 x_1을 추정한 값 $\hat{x_1}$는 다음과 같다.

$\hat{x_1}$=-1.2242*x2^3 -1.2057*x2^2 -1.8189*x2 +1.4756*x2^2*x3
+2.8286*x2*x3 -4.3273*x2*x3^2 +6.7833*x3 -2.1549x3^2
+2.2794*x3^3 -0.0080

제안된 슬라이딩 평면은 다음과 같다.

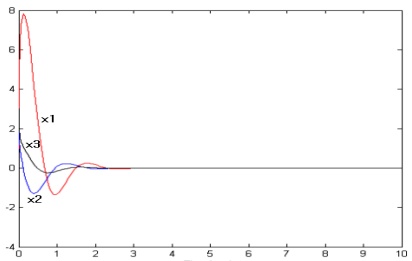
$s = x_1 - \hat{x_1} = x_1$ +1.2242*x2^3 +1.2057*x2^2 +1.8189*x2
-1.4756*x2^2*x3 -2.8286*x2*x3 +4.3273*x2*x3^2
-6.7833*x3 +2.1549x3^2 -2.2794*x3^3 +0.0080

식(4)의 조건을 보장하는 슬라이딩 모드 제어 입력은 다음과 같다.

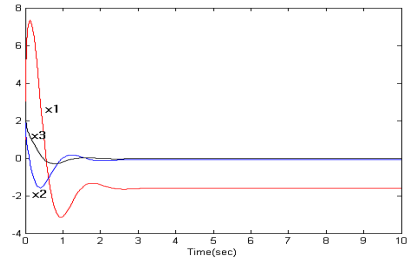
u_u = 1/97.780 (-0.990*x1 +2.1971*x2^2 +16.9928*x2
+5.7034*x2*x3 +97.6312*x3 -2.5109*x3^2 -4.9645
$-\Delta_{\max} sign(S)$)

이 때, 시뮬레이션에 사용된 $\Delta_{\max}$의 값은 1 이고, h=0.5 이다.

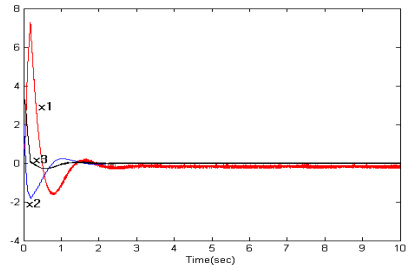
아래의 그림은 위의 수치 예에 대한 시뮬레이션 결과 이다.



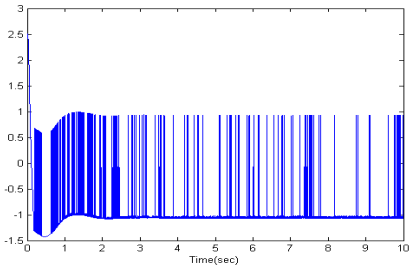
<그림 1> 외란과 불확실성이 없을 때 H_∞제어기의 상태궤적



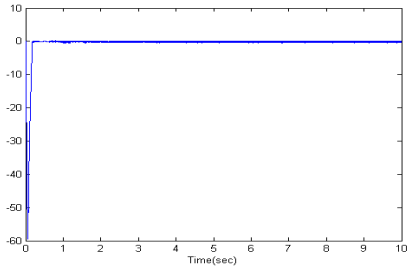
<그림 2> 외란과 불확실성이 존재할 때 H_∞제어기의 상태궤적



<그림 3> 외란과 불확실성이 존재할 때 제안된 SMC의 상태궤적



<그림 4> 제안된 SMC의 제어 입력



<그림 5> 제안된 SMC의 슬라이딩 평면

5. 결 론

H_∞제어기는 시스템 모델링이 정확할수록 좋은 결과를 내지만 불확실성이 존재하면 그 성능이 나빠진다. 그러므로 본 논문에서는 SVM을 이용하여 슬라이딩 평면을 설계함으로써 슬라이딩 모드제어와 H_∞제어기를 결합할 수 있는 제어기법을 제안하였으며 제안된 슬라이딩 평면이 공칭 시스템의 동특성을 가짐으로써 H_∞제어기의 강인성이 향상됨을 시뮬레이션을 통하여 그 성능을 확인하였다.

[참 고 문 헌]

[1] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung,"Variable structure control : A survey", *IEEE Trans*, IE-40, (1), pp. 2-22, 1993.

[2] V. I.Utkin, "sliding mode control design principles and applications to electric drives", *IEEE transactions on industrial electronics : a publication of the IEEE Industrial Electronics Society*, vol.40no.1, pp22-36, 1993

[3] U. Sawut, T. Hanamoto, and T. Tsuji, "Application of Eventual Sliding-Mode Technique in Flexible Arm", *ControlTransactions of the Society of Instrument and Control Engineers*,vol.36 no.8,pp.723-725, 2000.

[4] Utkin V., Shi J. "Integral sliding mode in systems operation under uncertainty conditions" *Proceedings of the 35th CDC*, pp. 4591-4596, Dec 1996.

[5] S.K. Park and H. K. Ahn, "Robust controller design with novel sliding surface", *IEE Proc.-Control Theory Appl.* vol.146. no.3, May 1999.

[6] Mingyue Tan "Support Vector Machine & Its Applications" TheUniversity of British Columbia, Nov 26, 2004.

[7] J. X. Dong, C.Y. Suen and A. Krzvzak, "A fast SVM traing algorithm", *International Journal of Pattern recognition and Artificial Intelligence*, vol. 17, no. 3, pp.367-384,2003.

[8] 김수진, 김민찬, 박승규, 안호균, 곽군평, 윤태성, "슬라이딩 모드와 LMI를 이용한 강인 H_∞ 제어", 한국해양정보통신학회논문지, 제11권 제2호, 316-321, 2007.