

시간 변동 시간 지연을 가지는 불확실한 뉴트럴 시스템의 관측기 설계

송민국*, 주영훈**, 박진배*,
*연세대학교 전기전자공학과, **군산대학교 전자공학부

Delay-Dependent Observer-Based Control for a Class of Uncertain Neutral Systems with Time-Varying Delays

Song Min Kook*, Joo Young Hoon**, Park Jin Bae*
*Electrical and Electronic Engineering, Yonsei University
**School of Electronic and Information Engineering, Kunsan National University

Abstract - 본 논문은 시간 변동 시간 지연을 가지는 불확실한 선형 뉴트럴 시스템에 관한 관측기 설계에 대해서 논의한다. Lyapunov-Krasovskii의 이론을 이용하여 불확실한 시간 지연을 가지는 시스템의 안정도를 판별한다. 뉴트럴 시스템의 안정도 조건을 시간 변동 시간 지연에 종속적인 충분조건으로 제시한다. 선형 행렬 부등식을 이용하여 안정도 조건을 제시하고, 선형 행렬 부등식의 해를 이용하여 관측기의 이득값을 설계한다. 설계된 관측기의 이득값을 포함한 오차 상태 방정식의 안정도를 판별한다. 예제를 통하여 논문의 결과를 입증하였다.

1. 서 론

시간 지연 현상은 생물학, 경제 시스템, 그리고 다양한 공학 분야에서 다양하게 나타난다. 시간지연은 흔히 시스템의 안정성을 저해하며, 성능을 떨어뜨리는 역할을 한다. 이러한 이유로 시간 지연을 포함한 시스템의 안정도 해석 및 성능에 관한 연구가 주요 연구가 되어 왔으며, 많은 관심을 받아왔다 [1-5].

흔히 시스템에서의 상태 변수는 항상 측정 가능하지가 않다. 상태변수의 정확한 값을 모르는 상황에서는 관측기 기반의 제어기 설계가 필요하다. 이러한 관측기 기반의 제어기 설계에 앞서서 본 논문에서는 시간 변동 시간 지연을 가지는 뉴트럴 선형 시스템에 관한 관측기 설계를 목표로 한다.

시간지연을 가지는 시스템의 관측기 설계는 오랜 기간 동안 다양한 접근방법에 대해서 논의 되어왔다. [1]에서는 스펙트럼 부여 방법에 의해서 관측기를 설계하는 방법을 제시하였다. 이어서 관측기 설계를 위해서 일반적인 좌표 변환 방법과 선형 행렬식에 의한 접근법이 제시되었다 [2]. [3]에서는 시간 변동 시간 지연을 가지는 선형 리타디드 시스템에 관한 연구가 진행되었다. 일반적으로 시간 지연 시스템의 안정도 분석을 위해서는 Lyapunov 안정성 이론과 선형 행렬 부등식이 이용되어 왔다 [4]. [5]에서는 알려진 시간 지연을 가지는 선형 뉴트럴 시스템에 대해서 연구되었다.

지금까지 연구 되어온 시간 지연을 포함하는 시스템에 관한 다양한 결과를 바탕으로 본 논문에서는 시간 변동 시간 지연을 가지는 불확실한 선형 뉴트럴 시스템에 관해 연구한다. 본 논문에서는 불확실성을 포함한 선형 뉴트럴 시스템의 관측기 설계에 관해서 연구하며, 이때 구해지는 안정도 조건 및 관측기 이득값은 시간지연 항이 포함되는 충분조건이다

시간 변동 시간 지연을 가지는 불확실한 선형 뉴트럴 시스템의 관측기를 설계하고자 한다. 먼저 시스템의 불확실성을 일반적인 행렬의 형태로 나타낸다. 다음으로 불확실성을 포함하는 선형 시스템을 앞서 제안된 모델 변환을 이용하여 시스템을 변형한다 [6]. 안정한 관측기 설계를 위해 시간 변동 시간 지연에 관한 몇 가지 가정을 덧붙인다. 정의한 오차 상태 방정식을 안정화 시키는 관측기를 설계한다. LMI를 이용하여 안정한 관측기 존재성의 충분조건을 살펴본다. 또한 이때의 LMI의 해를 이용하여 관측기의 이득값을 구한다. 임의의 불확실한 선형 뉴트럴 시스템에 대하여 본 논문이 제안한 이론이 타당함을 확인한다.

2. 뉴트럴 시스템

시간 변동 시간 지연 $\tau(t)$ 와 $g(t)$ 을 가지는 선형 불확실한 뉴트럴 시스템을 고려하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) - (D + \Delta D)\dot{x}(t - g(t)) = (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - \tau(t)) + Bu(t),$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0] \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 는 상태변수, $u(t) \in R^m$ 는 제어 입력이며, $\phi(t)$ 는 연속적인 벡터 초기 함수이다. h 는 시간 변동 시간 지연 $\tau(t)$ 와 $g(t)$ 의 상위 경계이며, A, A_d, B, C 와 그리고 D 는 알려진 차원의 행렬이다. $\Delta A, \Delta A_d, \Delta B$ 는 시스템의 불확실성을 나타낸다. 본 논문에서는 고려하는 관측기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) - (D + \Delta D)\dot{\hat{x}}(t - g(t)) &= (A + \Delta A)\hat{x}(t) + (A_d + \Delta A_d)\hat{x}(t - \tau(t)) \\ &\quad + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t). \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 L 은 본 논문에서 설계하고자 하는 관측기의 이득값이다. 시스템의 안정도 조건을 구하기 위해 다음의 가정 1을 가정한다.

가정 1. 행렬 D 는 다음을 만족한다.
 $D \neq 0, \|D\| < 1.$

시간 변동 시간 지연 $\tau(t)$ 에 본 논문에서는 다음의 가정2와 같이 가정한다.

가정 2. $\tau(t)$ 는 미분 가능한 함수이며, 모든 시간 $t \geq 0$ 에서 다음을 만족한다.
 $0 \leq \tau(t) \leq h, \dot{\tau}(t) \leq d < 1.$

가정 3. 불확실성을 표현하는 행렬은 다음과 같이 표현가능하다.

$$[\Delta A \ \Delta B \ \Delta A_d] = GF(t)[E_a \ E_b \ E_d]$$

다음과 같이 오차 상태 변수 $e(t)$ 를 정의한다.

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - \hat{x}(t) \\ \dot{e}(t) - (D + \Delta D)\dot{e}(t - g(t)) &= (A_o + \Delta A_o)e(t) - (A_d + \Delta A_d)e(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $A_o = A - LC$ 이다.

식 (3)을 [6]에서 연구된 모델 변환을 이용하여 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) - (D + \Delta D)\dot{e}(t - g(t)) &= (A_o + \Delta A_o)e(t) - (A_d + \Delta A_d)e(t - \tau(t)) \\ \dot{e}(t) - (D + \Delta D)\dot{e}(t - g(t)) &= (A_o + \Delta A_o + A_d + \Delta A_d)e(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}(s)ds \end{aligned}$$

관측기를 포함하는 오차 상태 방정식 (3)이 안정하게 하는 것이 본 논문의 목적이다. 이를 위해서 오차 상태 방정식 (3)이 안정하게 하는 관측기 이득값 L 을 설계하고자 한다. 오차상태 방정식 (3)의 안정도는 $g(t)$ 에는 독립적이며, $\tau(t)$ 에는 종속적인 조건을 구하고, 이를 확인한다.

3. 뉴트럴 시스템의 관측기 설계

3.1 안정도 해석

본 장에서는 불확실한 항을 가지는 오차 상태 방정식 (3)의 안정도 조건에 대해서 논의한다. 오차 상태 방정식 (3)의 안정도 조건을 다음의 정리 1과 같은 충분조건으로 제시한다.

정리 1. 다음의 양한정 행렬 $R, Q, S, Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3$ 그리고 P_1 과 임의의 행렬 P_2, P_3 이 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하면 불확실한 오차 상태 시스템 (3)은 안정하다.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Psi P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} - Y^T & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} \\ * & -(1-\tau(t))S & 0 \\ * & 0 & -(1-g(t))Q \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$

여기서

$$\Psi = P^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0 - I & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A_o \\ I & -I \end{bmatrix} P + hZ + \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & hR + Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = [Y_1 \ Y_2], Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ * & Z_3 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

증명) 공간의 제약으로 생략한다 ■

3.2 관측기 이득값 설계

본 장에서는 시간 변동 시간 지연이 있는 불확실한 뉴트럴 선형 시스템의 상태 변수를 관측하기 위한 관측기 이득값 설계를 논의한다.

관측기 이득값 L 을 구하기 위해서 정리 1의 결과를 이용한다. 정리 1에서 주어진 LMI 조건을 바로 이용할 경우 $P_2 LC$ 와 $P_3 LC$ 의 항들에 의해서 비선형 행렬 부등식으로 바뀌게 되고 구하고자 하는 이득값 L 을 구할 수가 없다. 따라서 다음의 주어진 정리 2를 이용하고자 한다.

정리 2. 다음의 양한정 행렬 $R, Q, S, Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3$ 그리고 P_1 과 어떤 적합한 행렬 P_2, P_3 이 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하면 오차 상태 시스템 (3)은 안정하며,

$$\begin{bmatrix} X_2 + X_2^T & * & * & * & * & * \\ \Psi_1 & -X_3 - X_3^T & * & * & * & * \\ * & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} - Y^T - (1-\tau(t))S^{-1} & * & * & * & * \\ * & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} & 0 & -(1-g(t))Q^{-1} & * & * \\ X_2 & X_3 & 0 & 0 & -(1-g(t))Q^{-1} & * \\ \tau(t)X_2 & \tau(t)X_3 & 0 & 0 & 0 & -(1-\tau(t))S^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

(5)

관측기 이득값은 다음과 같이 구해진다.

$$L = X_1^{-1} W.$$

여기서

$$\Psi_1 = X_3 - X_2^T + X_1(A_o + A_D) + C^T W^T \text{이다.}$$

증명) 공간의 제약으로 생략한다. ■

4. 수치적 예제

본 장에서는 제안된 시간 변동 시간 지연을 가지는 불확실한 선형 뉴트럴 시스템의 관측기 설계 및 오차 상태 방정식의 안정도를 확인하기 위하여 모의 실험을 한다. 모의 실험에 사용하는 시간 지연을 가지는 선형 시스템은 [7]에서 쓰인 예를 본 논문의 불확실한 선형 뉴트럴 시스템에 맞게 수정한 것이다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 3 \\ -0.6 & -2 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.2 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = 0.3 \times A, \Delta A_d = 0.3 \times A_d, \Delta D = 0.3 \times D$$

$$D = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$\tau(t) = 3\sin t, g(t) = 3$$

정리 2의 LMI 해를 구하면 다음과 같다.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 294.4 & -72.23 \\ -72.23 & 17.5 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 52.52 & 27.62 \\ -2.992 & 53.68 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 367.3 & 769.8 \\ -730.2 & 304.1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 123.7 & -155.6 \\ 796.5 & 126.7 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 90.66 & -2846 \\ 2681 & 69.4 \end{bmatrix}.$$

정리 2의 해를 이용하여 오차 상태 방정식을 안정화 시키는 관측기 이득 L 을 구해보면 다음과 같다.

$$L = \begin{bmatrix} -32.309 \\ 34.2314 \end{bmatrix}.$$

설계된 관측기 이득값을 이용하여 선형 시스템에 적용하면 오차 상태 변수 $e_1(t)$ 와 $e_2(t)$ 의 시스템 응답은 그림 1과 같다. 그림 1로부터 제안된 방법에 의한 오차 상태 변수는 시간이 지날수록 0에 수렴함을 확인 할 수 있다.

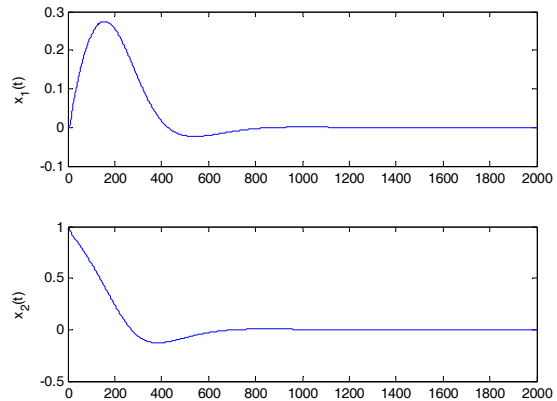


그림 1. 오차 상태 시스템의 시간 응답
Figure 1. Time response of the system

5. 결 론

본 논문은 시간 변동 시간 지연을 가지는 불확실한 선형 뉴트럴 시스템의 관측기 설계에 대해서 논의하였다. 뉴트럴 시스템의 안정도를 판별하기 위하여 Lyapunov-Krasovskii functional을 도입하고 이를 바탕으로 뉴트럴 시스템의 안정도를 분석하였다. 이를 바탕으로 불확실한 선형 뉴트럴 시스템의 관측기 이득값을 제시하였다. 선형 행렬 부등식을 이용하여 관측기의 이득값을 설계하며, 오차 상태 방정식의 안정도를 판별하였다. 본 논문에서 제시된 수치적 예제로부터 제안된 기법의 효용성을 입증하였다.

감사의 글

이 논문은 2007년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음

[참 고 문 헌]

- [1] P. Zitek, "Anisochronic state observers for hereditary systems," Int. J. Control, Vol. 42, pp. 581-599, 1998.
- [2] M. Hou, P. Zitek, and R. J. Patton, "An observer design for linear time-delay systems," IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 47, pp. 121-125, 2002.
- [3] Z. Wang, J. Lam, and K. J. burnham, "Stability analysis and observer design for neutral delay systems," IEEE Trans. Autom. Contro, Vol. 47, pp. 478-483, 2002.
- [4] M. S. Mahmoud, "Robust control and filtering for time-delay systems," New York.
- [5] C. H. Lien and J. D. Chen, "Discrete-delay-independent and discrete-delay-dependent criteria for a class of neutral systems", ASME J. DYN. Syst., Vol 125, pp. 33-41, 2003
- [6] E. Fridman, "New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems," Systems & Control letters, Vol 43, pp. 309-319, 2001
- [7] P. Park, "A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol 44, pp. 876-887, 1999.