

## SVM을 이용한 새로운 슬라이딩 평면의 구성에 관한 연구

김성국, 왕범광, 박승규, 곽군평  
창원대학교

### A study on the Sliding Surface design by using SVM(Support Vector Machines)

Seongguk Kim, Fa Guang Wang, Seung, Gun Pyong Kwak. Kyu Park  
Changwon National University

**Abstract** - In the conventional sliding mode control(SMC), the states of controlled systems are linearly dependent because of the characteristic of the sliding surface. This means that conventional SMC can not add its robustness to other control methods. To overcome this problem, a special sliding surface with additional dynamic states has been proposed. However the additional dynamic states make it difficult to design a controller because the order of a controller becomes higher. So, in this paper, a novel sliding surface design method, which does not require any additional dynamic state, is proposed. The relationships between the states with desirable responses can be expressed by using SVM and included in a sliding mode dynamics. The robust optimal controller with the optimal performance and the robustness of SMC is considered.

#### 1. 서 론

슬라이딩 모드 제어는 여러 분야에서 적용되고 있는 강인제어 이론이다[1]. 초기에 슬라이딩 모드 제어는 입력의 채터링과 도달 거리의 문제가 지적되었다. 그러나 많은 연구를 통해 이 같은 문제는 해결되었다[2]-[3]. 그리고 또 하나의 문제점은 슬라이딩 평면은 공칭 시스템의 동특성을 가지지 못하기 때문에 다른 제어기와 결합하기 용이하지 않다는 점이다. 이러한 문제 개선책으로 가상 상태를 이용하여 슬라이딩 평면을 설정하는 방법이 사용되었다[4]. 본 논문에서는 SVM(Support Vector Machines)라는 분류 알고리즘을 사용하여 슬라이딩 평면을 구성하는 새로운 방법을 제시하고자 한다[5]. 슬라이딩 평면을 구성하는데 있어 커널 함수를 분류를 사용함으로써 시스템의 상태값들 사이의 관계를 정의함으로써 새로운 평면이 설정 되게된다. 새롭게 구성된 슬라이딩 평면과 최적 제어를 이용하여 시스템의 입력을 구하고 이를 이용하여 시스템의 동특성의 안정성을 확인 할 수 있게된다.

#### 2. 본 론

##### 2.1 공칭 시스템을 이용한 슬라이딩 평면 설정

본 장에서는 공칭 시스템을 이용하여 슬라이딩 평면을 설정할 수 있음을 간략하게 설명하고자 한다.

불확실성을 가지는 선형 시스템을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + d_{initial}(t) \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Cd(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 시스템의 상태  $x \in R^n$ , 시스템의 입력  $u \in R$ , 불확실성을

$$d = \frac{\Delta Ax(t) + \Delta Bu(t) + d_{initial}}{C} \in R^r$$

불확실성의 최대값과, 정합조건은 다음과 같이 정의된다.

$$|d(t)| < d_{max}, \text{rank}[B \ C] = \text{rank}[B]$$

여기서 공칭제어기는 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{x}(t) = A_o x(t) + B_o u(t) \quad (2)$$

그리고 가제어 공칭 시스템은 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{x}(t) = A_c z(t) + B_c u(t) \quad (3)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_1 - \alpha_2 & \dots & -\alpha_n \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

공칭 시스템으로부터 가상 상태를 정의하면

$$\dot{z}_v(t) = -\alpha_n z_n(t) - \dots - \alpha_2 z_3(t) - \alpha_1 z_2(t) + \dot{u}_o(z, t) \quad (4)$$

공칭 가제어 시스템과 가상 상태로부터 다음과 같은 슬라이딩 평면을 설정 할 수 있다.

$$s_n = z_v(t) + \alpha_n z_n(t) + \dots + \alpha_1 z_1(t) - u_o(t) \quad (5)$$

#### 2.2 SVM(Support Vector Machines)과 새로운 SMC

SVM(Support Vector Machines)은 몇 가지의 샘플과 반복학습을 통한 상태들의 추정값을 가지고 패턴인식 문제를 해결하는 통계학습 이론들 중 한 방법이다. SVM(Support Vector Machines)의 문제 해결방법 가운데 분류 함수를 사용하여 상태값  $x$ 의 관계들을 추정하여 슬라이딩 평면을 구성하고자 한다.

일반적인 형태의 분류는 다음의 조건을 만족한다.

$$y(x) = w^T f(x) + b \quad (6)$$

$x \in R^n$ 는 입력,  $w$ 와  $b$ 는 서로 다른 그룹의 support vector 사이의 간격에 의해서 결정되는 최대 이득의 계수이다.

Lagrange Multiplier  $\alpha$ 는 (8)식에 정의된  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  모든 요소들에 의해 결정된다.

$$\begin{aligned} \text{Maximize } Q(\alpha) &= \Sigma \alpha_i - \frac{1}{2} \Sigma \Sigma \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i^T x_j \\ \Sigma \alpha_i y_i &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$\alpha_i \geq 0$ 일때 다음식과 같이 정의된다.

$$w = \Sigma \alpha_i y_i x_i^T, \quad b = y_k - w x_k \quad (8)$$

여기서  $\alpha_i$ 는 non-zero,  $x_i$ 는 support vector이고

분류 함수는 다음 식과 같다.

$$f(x) = \Sigma \alpha_i y_i x_i^T x + b \quad (9)$$

$\phi(x) = x_i^T x$ 로 정의하면 다음과 같이 표현된다.

$$f(x) = \Sigma \alpha_i y_i \phi(x) + b \quad (10)$$

$\phi(x) = x_i^T x$ 이 선형이라 가정하면,  $\phi(x)$  또한 커널 함수로 대체할 수 있게 된다.

$$f(x) = \Sigma \alpha_i y_i K(x) + b \quad (11)$$

SVC는 슬라이딩 평면을 정의하는데 사용할 수 있다. SVC를 이용한 상태값들 사이의 관계를 근사화하기 위해서는 학습 데이터가 요구된다. 그것은 실제 공칭 시스템으로부터 얻을 수 있다. 학습 데이터를 이용하여 support vector, 파라미터, bias를 얻을 수가 있다.

다음과 같은 상태 값들의 관계를 통해서 SVC 근사화를 확인 할 수 있다.

$$x_1 = \sum \beta_i k(x_{sv}, x_v) + b \quad (12)$$

여기서  $\beta_i$ 는 support vector와 일치하는 상수,  $k(x_{sv}, x_v)$ 는 비선형 함수,  $x_{sv}$ ,  $x_v$ 는 support vector이다.

$$SVC \text{ 근사화를 통해 새로운 슬라이딩 평면이 구성되었다.} \\ S(x) = x_1 - \sum \beta_i K(x_{sv}, x_v) - b \quad (13)$$

슬라이딩 평면위의 상태값들은 공칭 계통의 상태값과 같은 관계를 가지게 된다. 다시 말하면 공칭 시스템의 상태값과 동일하다. 이로서 새로운 슬라이딩 평면은 불확실성이 존재하더라도 동특성을 보장 받을 수 있게 된다. 다음 단계로는 새롭게 구성된 슬라이딩 평면의 입력을 구해야 한다. SMC 입력은 도달 조건( $ss < 0$ )으로부터 얻을 수 있다.

### 2.3 새로운 SMC로 제안된 강인 최적 제어기

강인 최적 제어기는 외란이나 불확실성이 존재하더라도 시스템의 동특성을 보장 받을 수 있다. 시스템 방정식의 평가 함수는 다음 식을 만족한다.

$$J = \int_{t_0}^{\infty} (x_o^T Q x_o + u_o^T R u_o) dt \quad (14)$$

공칭 시스템의 최적 제어기 입력은 다음과 같다.

$$u_o^*(x_o) = -\frac{1}{r} B^T S x_o(t) = -K x_o(t) \quad (15)$$

여기서 S는 다음과 같은 리카치 방정식(Riccati equation)의 해이다.

$$-SA - A^T S - Q + \frac{1}{r} S B B^T S = 0 \quad (16)$$

(2),(15)식을 이용하여 다음과 같이 식으로 대체 할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A x_o(t) + B u_o(t) = A x_o(t) - B K x_o(t) \quad (17)$$

위의 식으로부터 학습 데이터  $x(t)$ 를 구할 수 있다. 그리고 support vector와  $\beta_i$ 는 학습 과정을 통해 얻을 수 있다.

다음과 같은 커널 함수를 고려한다.

$$K_{poly}(x_v) = (x_{sv} \times x_v^T + 1)^P \quad (18)$$

여기서  $x_v$ 는 support vector

(17)식을 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$x_1(t) = \sum \beta_i K_{poly}(x_v) + b \quad (19)$$

결국 다음과 같은 슬라이딩 평면을 구성 할 수 있다.

$$S = x_1(t) - \sum \beta_i K_{poly}(x_v) - b \quad (20)$$

$$K_{poly}(x_v) = (x_{sv}^T x_v + 1)^P \quad (21)$$

$$\dot{S} = \dot{x}_1(t) - \sum \beta_i \dot{K}_{poly}(x_v) \quad (22)$$

$$= Q(x_v) \dot{x} = Q(x_v) (Ax(t) + Bu(t) + Cd(t)) \quad (20)$$

슬라이딩 평면을 이용하여 다음과 같은 입력을 구 할 수 있다.

$$u(t) = -\frac{Q(x)Ax(t)}{Q(x)B} - d_{\max} \text{sign}(Q(x_v)S) \quad (23)$$

### 3.시뮬레이션

2차 시스템의 컴퓨터 시뮬레이션 결과이다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d(t) \quad (24)$$

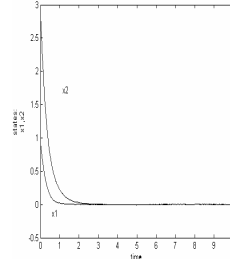
$$K = [2.2845 \quad 0.1392]$$

$$\text{초기값 } x_1(0) = 1, x_2(0) = 3, p=4$$

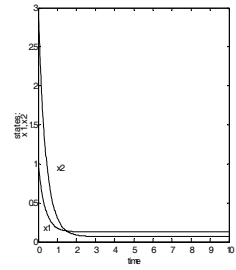
$$D(t) = 0.0228 + 0.59595x_2(t) - 0.3427x_2^2(t) + 0.066784x_2^3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t) + d(t)$$

$$u(t) = \frac{x_1 - 2D(t)x_2(t)}{1 - D(t)} - 0.4001 \text{sign}(s)$$

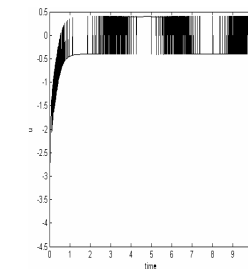


<그림 1>

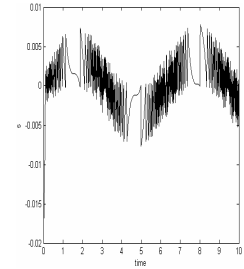


<그림 2>

<그림 1>은 외란과 불확실성이 존재 하지 않는 최적제어 시스템의 상태 값을 나타내었다. <그림 2>의 경우 같은 시스템 내에 불확실성과 외란이 존재하는 경우를 나타내었다. 이 경우 시스템이 원래의 동특성을 보장 받지 못함을 확인 할 수 있다.

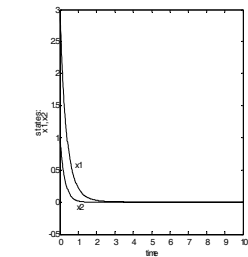


<그림 3>

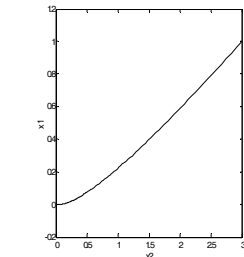


<그림 4>

<그림 3>의 경우 SVM을 이용한 SMC의 시스템 입력을 나타내었다. <그림 4>의 경우 새로운 슬라이딩 평면을 나타내었다. 0에 가까운 평면이 설정되었다.



<그림 5>



<그림 6>

<그림 5>의 경우 외란과 불확실성이 존재하는 SMC의 시스템 상태 궤도이다. 이 경우 원래 시스템의 상태를 유지하고 있다. <그림 6>의 경우 시스템의 상태 선도를 나타내고 있다. 0으로 수렴하고 있는 안정적인 상태임을 확인 할 수 있다.

### 4. 결 론

SVM(Support Vector Machines)을 이용한 새로운 슬라이딩 평면이 제시되었다. 이 같은 새로운 SMC(Sliding Mode Control)을 가지고 상태의 추가 없이 다른 제어기와 결합이 용이함을 확인할 수 있다. 기존의 구성 방법보다 쉽게 평면 구성을 할 수 있고, 강인성 또한 보장 받을 수 있음을 확인할 수 있다. 컴퓨터 시뮬레이션 결과 상태값의 추가 없이 SMC와 최적 제어기를 사용하여 시스템의 동특성을 보장 받을 수 있음을 확인할 수 있었다.

### [참고 문헌]

- [1] Hung, J. Y., Gao, W., and Hung, J. C.: "Variable structure control: A survey", IEEE Trans., 1993, IE-40, (1), pp. 2-22.
- [2] G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai, "Chattering Avoidance by Second-Order Sliding Mode Control" IEEE TAC, Vol. 44, No. 3, March 1999, pp.563-568
- [3] Yilmaz, C. ; Hurmuzlu, Y. "Eliminating the Reaching Phase From Variable Structure Control" Journal of dynamic systems, measurement, and control, v.122 no.4,7
- [4] Utkin V., Shi J. "Integral sliding mode in systems operation under uncertainty conditions" Proceedings of the 35th CDC Dec 1996, pp. 4591-4596
- [5] Wang, Haifeng ; Hu, Dejin "Comparison of SVM and LS-SVM for regression" Neural Networks and Brain, 2005. ICNN&B '05. International Conference on,