

입자법을 이용한 댐 붕괴의 수치 시뮬레이션

박종천,^{*1} 이병혁,² 정성준²

NUMERICAL SIMULATION OF DAM-BROKEN PROBLEMS USING A PARTICLE METHOD

J.C. Park,^{*1} B.H. Lee² and S.J. Jung²

A particle method recognized as one of the gridless methods has been developed to investigate the nonlinear free-surface motions interacting to the structures. The method is more feasible and effective than convectional grid methods for solving the non-linear free-surface motion with complicated boundary shapes. The right-handed side of the governing equations for incompressible fluid, which includes gradient, viscous and external force terms, can be replaced by the particle interaction models. In the present study, the developed method is applied to the dam-broken problem on dried- and wet-floor and its adequacy will be discussed by the comparison with the experimental results.

Key Words : 입자법(Particle Method), 커널함수(Kernel Function), 비선형성 자유표면 유동(Non-linear Free-Surface Flow), 비압축성 유동(Incompressible Flow), 댐 붕괴 문제(Dam-broken Problem), 이동입자 반음해법(Moving Particle Semi-implicit Method(MPS)), 입자간 상호작용 모델(Particle Interaction Model)

1. 서 론

종래 연속체의 수치 시뮬레이션 기술로는 격자를 이용하는 방법이 널리 사용되어 왔다. 하지만 복잡한 형상에 대해서는 격자 생성에 많은 어려움과 방대한 시간이 소요되며 연속적인 계면(Interface)의 대변형 문제에는 계면 추적에 대해 많은 어려움을 포함한다. 한편 입자를 사용하는 SPH법[1], PIC법[2], PIC법의 계량인 FLIP 법[3,4], MPS법[5,6] 등은 격자생성의 복잡한 작업이 불필요하여 격자가 꼬이는 등의 위상관계를 고려할 필요가 없어 계면이 크게 변형되는 문제에도 적용될 수 있는 장점을 가지고 있다. 특히 비선형성 자유표면 유동의 수치 시뮬레이션의 경우에 있어서 입자를 이용한 수치 시뮬레이션 방법은 격자를 이용한 해석 방법보다 복잡한 형상의 물리 현상을 해석할 수 있는 가능성을 가지고 있다. 또한 입자를 이용한 수치 시뮬레이션 방법은 완전한 라그랑지(Lagrangian) 접근에 의해 이류항(Convective term) 계산을 입자의 이동으로 직접 계산하여 격자법 등의 오일러(Eulerian) 접

근법에서 심각하게 유발되는 수치 확산을 줄일 수 있다.

본 연구에서는 Koshizuka et al.[6]이 제안한 MPS(Moving particle semi-implicit) 법을 기초로 댐 붕괴 문제에 적용하고 개발된 방법의 타당성을 검토하는 것을 목적으로 한다. 아울러 향후 국소지역에서 쓰나미의 연안 방파제에 미치는 파력 추정 문제의 적용성에 대하여 토론하기로 한다. 본 연구에서 취급하는 댐 붕괴 문제는 그 자체가 자유표면 거동에 관한 여러 가지 비선형성 특성을 포함하므로 비선형 자유표면 유동을 포함하는 다양한 수치 시뮬레이션의 검증에 이용되어 왔다[5,7-9]. 또한 댐 붕괴 문제를 초기조건으로 국소 쓰나미(Local Tsunami)의 연안 방파제에 미치는 파력 추정 문제 등에 종종 활용되기도 한다[9-11].

2. 지배방정식

비압축성 점성 유체의 유동에 관한 지배방정식은 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식이다.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (1)$$

1 정회원, 부산대학교 조선해양공학과
2 학생회원, 부산대학교 대학원 조선해양공학과
* Corresponding author, E-mail: cpark@pnu.edu



$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F} \quad (2)$$

여기서 ρ 는 밀도, t 는 시간, \vec{u} 는 속도벡터, ∇ 은 구배 연산자, P 는 압력, ν 는 동점성계수, \vec{F} 는 외력을 각각 나타낸다.

일반적으로 격자법에서 연속방정식 (1)은 속도의 발산(Divergence)으로 표현되는 반면, 본 연구에서는 밀도의 발산으로 표현된다. Navier-Stokes 방정식 (2)의 좌변은 전미분(Total derivative) 형태이며, 입자의 직접적인 이동에 의한 가속도를 나타낸다. 한편, 우변은 압력 구배항, 점성항 그리고 외력항으로 구성되어 있다. 비압축성 점성 유동을 시뮬레이션 하기 위해서는 구배항, 점성항 및 비압축성을 나타내는 입자간의 상호작용 모델이 필요하며, 본 연구에서는 이러한 모델들에 대하여 Koshizuka et al.[6]에 의해 제안된 MPS(Moving Particle Semi-implicit Method) 법을 도입하였으며, 이에 대한 수치적 검증은 이병혁 외[12]에 상세히 기술되어 있다.

3. 입자간 상호작용 모델

MPS법에서는 입자 상호작용 모델을 통해서 연속체의 이산적인 계산을 행한다. 즉, 지배방정식의 편미분 연산자에 대응하는 입자간 상호작용 모델을 만들고, 지배방정식 각각의 항과 등가인 입자 상호작용 모델로 치환하게 된다. MPS법에서 입자 상호작용 모델은 커널 함수에 기초하여 이루어진다.

3.1 커널 함수(Kernel function)

연속 유체는 입자의 속도성분, 질량, 압력과 같은 물리량으로 구성된다. 유체의 흐름은 입자들 상호간 작용에 의해 가시화될 수 있으므로 지배방정식은 커널 함수에 기초한 입자간 상호작용으로 표시할 수 있다. 본 연구에서 사용한 커널 함수의 구체적인 식은 다음과 같다.

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & (0 \leq r < r_e) \\ 0 & (r_e < r) \end{cases} \quad (3)$$

여기에서 r 은 두 입자 사이의 거리이고, r_e 는 입자 상호작용 범위를 나타내는 커널 크기(Kernel size)이다. 커널 함수는 두 입자 사이의 거리 즉 중심 입자에서 주변 입자까지의 거리에 따라 입자 각각에 대하여 물리량의 가중치를 주는 것이다. 임계거리 r_e 는 초기 입자 배치 상태에서 평균 입자간 거리 l_0 에 임의의 값을 곱하여 얻는다.

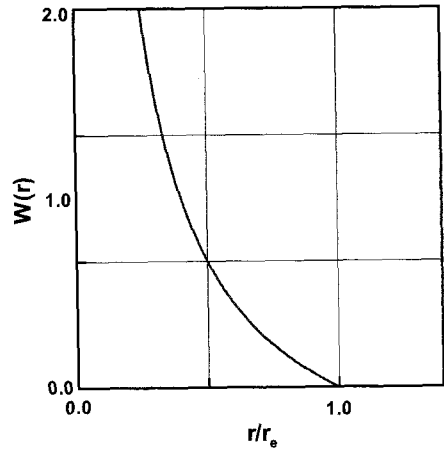


Fig. 1 The kernel employed in the present study

3.2 구배 모델(Gradient model)

MPS법에서 입자 i 의 구배 모델은 입자 i 와 그 주변 입자 j 사이에서 구배 벡터를 $(P_j - P_i)(\vec{r}_j - \vec{r}_i) / |\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2$ 으로 계산하고 이것을 커널 함수로 평균 한 것이다(Fig. 2). 구배 모델에서 동일한 입자에 대한 구배 벡터는 고려하지 않는다.

$$\langle \nabla P \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{P_j - P_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \right] \quad (4)$$

식 (4)에서 d 는 계산 공간의 차원이고, n^0 는 초기 입자 배치 상태에서의 입자수밀도(Particle number density)이다. 입자 i 의 입자수밀도는 식 (5)과 같이 정의한다.

$$n_i = \sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \quad (5)$$

식 (5)는 주변의 입자 j 의 커널 함수의 합을 취한 것으로 중심입자 i 는 입자수밀도 계산에 포함하지 않는다. 체적 V 중에 질량 m 의 입자가 N 개 들어 있다고 하면 밀도는

$$\rho = \frac{mN}{V} \quad (6)$$

이 된다. 입자수밀도의 정의로부터 N 을 입자수밀도로, V 를 커널 함수의 적분으로 근사할 수 있다.

$$\frac{N}{V} \cong \frac{\langle n \rangle}{\int w dv} \quad (7)$$

따라서 밀도에 관한 식 (6)은 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\rho \cong \frac{m \langle n \rangle}{\int w dv} \quad (8)$$

즉, 커널 함수의 임계거리가 일정하면 커널 함수의 적분도 일정하므로 밀도는 입자수밀도에 비례한다. 따라서 입자수밀도의 물리적 의미는 밀도가 된다.

3.3 확산(Laplacian) 모델

수학 연산자인 라플라시안(Laplacian, ∇^2)은 물리적으로 확산을 의미하며, Fig. 3에서 표시하는 바와 같이 입자 i 가 갖는 물리량의 일부를 주위의 입자 j 쪽으로 커널 함수의 분포에 따라 분배하는 역할을 한다.

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle = \frac{2d}{\lambda n_i} \sum_{j \neq i} [(\phi_j - \phi_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)] \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) |\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2}{\sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)} \cong \frac{\int_V w(r) r^2 dv}{\int_V w(r) dv} \quad (10)$$

단, 식 (9)에서 d 는 계산 공간의 차원이고, λ 는 해석해와 동일한 분산을 유지하기 위해 사용하는 계수이다.

3.4 비압축성 모델

만약 입자의 질량이 모두 동일하다면, 유체의 밀도는 입자수밀도에 비례하므로 연속방정식 (1)은 입자수밀도가 일정하다는 조건과 동일하다.

MPS법에서는 비압축성 유동의 계산 알고리즘으로써 SMAC 법과 유사한 알고리즘을 사용한다(Fig. 4). 매 시간스텝은 양과 음의 2단계로 나뉜다. 시각 n 에 있어서 입자의 위치, 속도, 압력은 각각 \vec{r}_i^n , \vec{u}_i^n , P_i^n 라고 하면, 제 1단계에서는 점성항과 외력항의 계산을 통하여 입자의 중간속도인 \vec{u}_i^* 를 계산하고, 입자의 중간속도 \vec{u}_i^* 를 이용하여 입자의 중간위치 \vec{r}_i^* 를 계산한다. 즉,

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i^n + \Delta t \vec{u}_i^* \quad (11)$$

식 (11)에 의한 입자의 이동은 격자를 사용하는 방법에 있어서 이류항의 계산에 해당된다. 계산된 입자의 중간 위치를

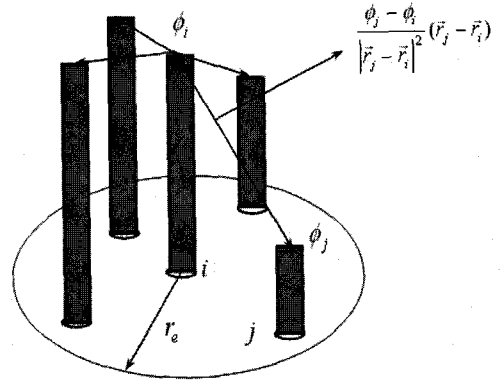


Fig. 2 The gradient model of MPS method.

이용하여 입자수밀도 n_i^* 를 계산할 수 있다.

제2단계에서는 먼저 압력의 포아송(Poisson) 방정식을 계산한다.

$$\langle \nabla^2 P \rangle_i^{n+1} = - \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n_i^* - n^0}{n^0} \quad (12)$$

식 (12)의 우변은 제 1단계의 입자수밀도 n_i^* 와 초기 입자수밀도 n^0 와의 차를 나타낸다. 좌변은 확산 모델인 식 (9)에 의해 연립 1차방정식으로 이산화 할 수 있으며, 적절한 반복해법에 의해 구할 수 있다. 구해진 압력을 식 (13)에 대입하여 속도의 수정치 \vec{u}_i' 를 계산한다. 단, 우변의 압력 구배 계산은 MPS 법의 구배모델 식 (4)를 사용한다.

$$\vec{u}_i' = - \frac{\Delta t}{\rho} \langle \nabla P^{n+1} \rangle_i \quad (13)$$

최종적으로, 시각 $n+1$ 에서 입자의 속도와 위치는 각각 다음 두 식에 의해 새롭게 얻어진다.

$$\vec{u}_i^{n+1} = \vec{u}_i^* + \vec{u}_i' \quad (14)$$

$$\vec{r}_i^{n+1} = \vec{r}_i^* + \Delta t \vec{u}_i' \quad (15)$$

본 방법과 일반적인 차분법에 있어서의 SMAC법과의 차이는 이류항이 입자의 이동에 의해 직접 계산된다는 것과 압력의 포아송 방정식에 있어서 우변의 소스항이 속도의 발산이 아닌 입자수밀도로 표시되는 것이다.

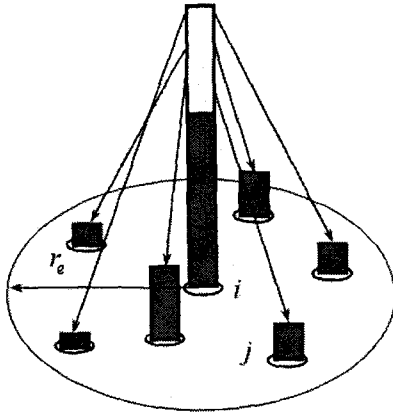


Fig. 3 The Laplacian model of MPS method.

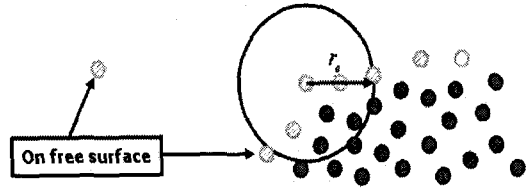


Fig. 5 Free-Surface Model of MPS method.

이의 입자이다. 유체 입자와 벽면 입자는 압력의 계산에 포함시킨다. 벽면 입자를 압력 계산에 포함시키는 이유는 유체 입자가 벽면 주변에 집중될 경우 벽면 입자의 압력을 크게 하여 벽면에 유체 입자가 집중되는 것을 방지하기 위함이다. 벽 내 가상 입자의 배치는 벽면 입자의 입자수밀도 계산이 적절히 되도록 커널 함수의 임계거리까지 벽면 입자의 외측에 배치한다.

입자법의 물리량 계산은 주변 입자의 물리량으로부터 계산되기 때문에 특히 경계면 내에서의 물리량 설정이 매우 중요하다. 본 연구에 사용된 벽 경계 조건은 두 가지이다. 하나는 Koshizuka et al.[6]이 제안한 방법으로서 점착 경계조건(No-slip)에 대해서 벽 내 가상 입자들의 속도를 항상 0으로 설정하고 미끄럼 경계 조건(Free-slip)에 대해서는 벽과 수평한 성분에 대해서 벽 방향 속도의 기울기를 0으로 설정하고, 압력의 계산에 있어서는 벽 내 가상 입자를 제외시킨다(Case01). 또 다른 경계조건은 이동경계조건이다(Case02). 이동경계조건은 식(16)에 의해 계산되어지며, 식 (16)에서 \vec{n} 과 \vec{t} 는 각각 벽면의 수직벡터와 수평벡터이다.

$$P_{dum} = P_i + \rho gh, \quad x_{dum} = 2x_{wall} - x_i$$

$$u_{dum} \cdot n = 2u_{surf} \cdot n - u_i, \quad u_{dum} \cdot t = u_i \cdot t \quad (16)$$

3.6 자유표면 경계조건

자유표면 경계조건은 입자들의 완전 라그랑지안(Lagrangian)적 이동으로서 만족된다. 자유표면 경계조건으로 운동학적 경계조건과 동역학적 경계조건이 있다. 본 연구에서 동역학적 경계조건은 자유표면 입자의 압력을 대기압과 동일한 0의 값으로 고정하고, 운동학적 경계조건은 자유표면 입자를 직접 이동하여 만족시킨다. 두 경계조건을 만족시키기 위해서는 자유표면 입자의 탐색이 선행되어야 한다. 식 (17)은 자유표면 입자의 탐색 방법을 나타내고 있다.

$$n_i^* < \beta n^0 \quad (17)$$

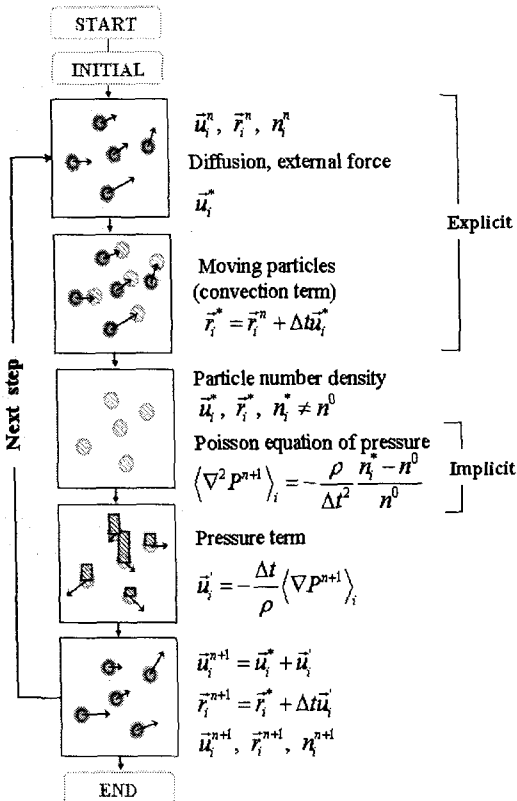


Fig. 4 Algorithm of the present particle method.

3.5 벽 경계 조건

본 연구에 사용된 입자의 종류에는 유체 입자(Ffluid particles), 벽면 입자(Wall particles) 그리고 벽 내의 가상입자(Dummy particles)이다. 벽면 입자는 유체 입자와 가상입자 사

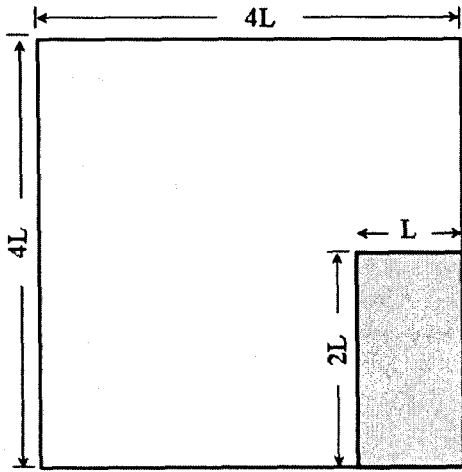
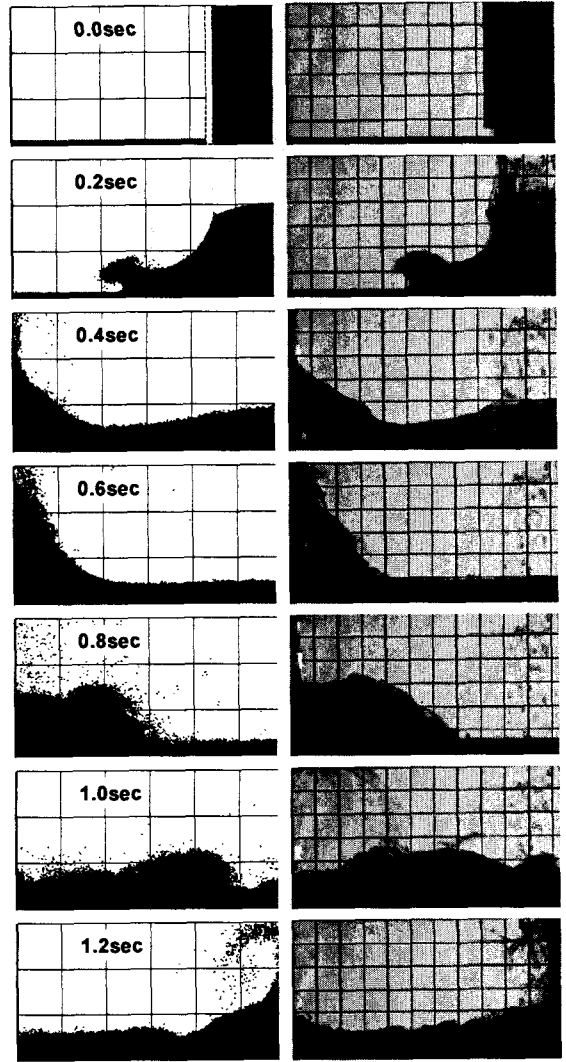


Fig. 6 Schematic of set up for dam-broken simulation.



(a) Present method

(b) Experiment

Fig. 8 Comparison of free-surface profiles between numerical result(present method) and experimental result.

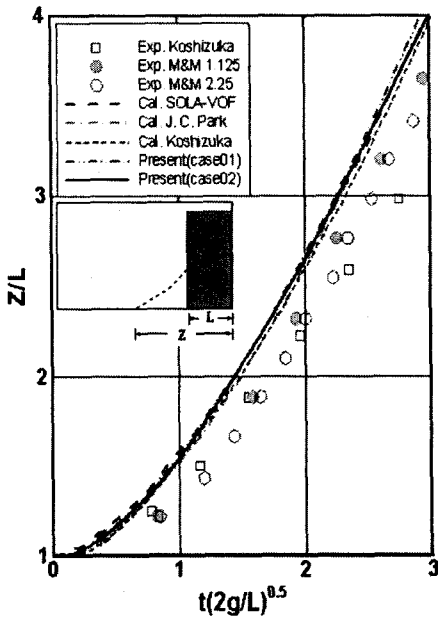


Fig. 7 Comparison with experiments and other simulated results for dam-broken problem.

여기에서 β 는 상수로서 1.0 미만으로 한다. 자유표면에 있는 입자는 근방의 입자수가 상대적으로 적기 때문에 입자수 밀도가 작아지게 되고 식 (17)를 만족하게 된다. 이 조건은 자유표면의 형상을 고려할 필요 없이 모든 입자에 대해 동일하게 정의할 수 있으므로 유체 내부에 기체가 생기거나 유체가 분열·합체되는 경우에도 이용할 수 있다.

4. 수치시물레이션

4.1 댐 붕괴 문제의 수치 시물레이션

앞서 설명한 입자 상호작용 모델을 2차원의 댐 붕괴 문제에 적용하였다. Fig. 6는 댐 붕괴 문제의 초기 형상을 나타낸다. 물 기둥의 폭과 높이는 각각 L 과 $2L$ 이다. 물 기둥은 수조의 오른쪽에 위치한다. 본 시물레이션에서 중력가속도 g 는 $9.81m/s^2$, 동점성계수 ν 는 10^{-6} , 밀도는 1000 그리고 L 은 $150mm$ 을 사용하였다. 커널 함수의 임계거리는 지배방정식



의 점성항, 구배항 그리고 자유표면 입자 탐색에 대해 $2.1l_0$, 압력의 포아송 방정식에 대해 $4.0l_0$ 를 사용하였다.

Fig. 7은 붕괴되는 물기둥 앞부분(Leading edge)의 위치변화를 보여준다. 단 x 축($t(2g/L)^{0.5}$)은 시간에 대한 무차원수를, y 축(Z/L)은 공간에 대한 무차원수를 각각 나타낸다. 그림에서의 기호(Symbol)들은 선행된 실험 결과를 나타내며, 선은 선행된 시뮬레이션의 결과를 나타낸다. 본 시뮬레이션 결과가 선행된 계산 결과들과 잘 일치함을 알 수 있다. 하지만 선행된 실험 결과와는 다소 차이를 보이고 있는데 이는 실험 조건(예를 들어, 초기상태의 물기둥을 고정시켰던 연직벽면의 순간 제거 등)과 시뮬레이션 조건이 다소 상이함에서 비롯된다고 볼 수 있다.

Fig. 8은 바닥에 10mm 높이로 물이 차있는 경우의 시간에 따른 자유표면 형상의 변화를 보인다. 시뮬레이션 조건을 실험과 동일하게 하기 위하여 물기둥의 왼쪽에 이동 벽을 설치하였으며, 이 벽은 물기둥을 붕괴시키기 위해 0.2초에 걸쳐 위쪽으로 $2L$ 만큼 이동한다. 본 연구에서 수행된 시뮬레이션 결과는 약 0.8초 부근까지 Sueyoshi[13]에 의한 실험결과와 자유표면 형상이 잘 일치하나 그 이후에 나타나는 유동의 난류적 거동을 표현하는 데에는 개선의 여지가 있어 보인다.

5. 결 론

본 논문에서는 지배방정식(Navier-Stokes)에 대한 압력구배 모델, 확산모델, 비압축성 모델, 자유표면 계산 모델의 입자간 상호작용 모델인 MPS법을 이용하여 댐 붕괴 문제에 적용하여 유용한 결과를 얻었다. 향후 본 연구는 댐 붕괴 문제를 초기조건으로 하는 국소 쓰나미(Local Tsunami)의 연안 방파제에 미치는 파력 추정 문제 등에 활용 가능하다.

참고문헌

[1] 1988, Monaghan, J.J., "An Introduction to SPH", *Comput. Phys. Comm.*, Vol.48, pp.89-96.
 [2] 1988, Harlow, F.H., "PIC and Its Progeny", *Comput. Phys. Commun.*, Vol.48, pp.1-10.
 [3] 1986, Brackbill, J.U. and Ruppel, H.M., "FLIP: A Method

for Adaptively Zoned, Particle-in-Cell Calculations of Fluid Flows in Two Dimensions", *J. Comput. Phys.*, Vol.65, pp.314-343.
 [4] 1988, Brackbill, J.U., Kothe, D.B. and Ruppel, H.M., "FLIP: A Low Dissipation, Particle-in-Cell Method for Fluid Flow", *Comp. Phys. Commun.*, Vol.48, pp.25.
 [5] 1995, Koshizuka, S., Tamako, H. and Oka, Y., "A Particle Method for Incompressible Viscous Flow with Fluid Fragmentation", *J. Comput. Fluid Dynamics*, Vol.4, pp.29-46.
 [6] 1996, Koshizuka, S. and Oka, Y., "Moving-Particle Semi-implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid", *Nucl. Sci. Eng.*, Vol.123, pp.421-434.
 [7] Hirt, C.W., Nichols, B.D., 1981. "Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries", *J. Comp Phys.*, Vol. 39, pp201 - 225.
 [8] 2003, Park, J.-C., Kim, M.-H., Miyata, H. and Chun, H.-H., "Fully nonlinear numerical wave tank (NWT) simulations and wave run-up prediction around 3-D structures", *Ocean Engineering*, Vol.30, 1969-1996.
 [9] 2005, Lin, C.-L., Lee, H., Lee, T. and Weber, L.J., "A level set characteristic Galerkin finite element method for free surface flows", *Int. J. for Numrer. Methods in Fluids*, Vo.49, pp 521-547.
 [10] 2004, Gomez-Gesteira, M. and Dalrymple, R.A., "Using a Three-Dimensional Smoothed Particle Hydrodynamics Method for Wave Impact on a Tall Structure", *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, Vol.130, No.2, pp63-69.
 [11] 2005, Raad, P.E. and Bidoae, R., "The three-dimensional Eulerian - Lagrangian marker and micro cell method for the simulation of free surface flows", *J. Comput. Phys.*, Vol.203, pp668-699.
 [12] 2007, 이병혁, 박종천, 류민철, 김용수, 김영훈, "비압축성 유동장 해석을 위한 입자법 수치 시뮬레이션 기술 개발", *한국해양공학회지*, 제21권 제4호, pp.8-14.
 [13] 2007, Sueyoshi, M., "Validation of a Numerical Code by a Particle Method for Violent Free-surface Problems", *ISOPE*, Vol.16, No.4, pp.261-267.