

Hermite 유한요소에 의한 자연대류 유동계산

김진환*

COMPUTATIONS OF A NATURAL CONVECTION FLOW USING HERMITE FINITE ELEMENTS

J.W. Kim*

This paper is a continuation of the recent development on the hermite-based divergence free basis function and deals with a non-isothermal fluid flow thru the buoyancy driven flow in a square cavity with temperature difference across the two sides. The basis functions for the velocities consist of the hermite function and its curl. However, the basis for the temperature are the hermite function and its gradient. Hence, the number of degrees of freedom at a node becomes 6, which are the stream function, two velocities, the temperature and its x- and y-derivatives. Numerical results for the streamlines, the temperatures, the x-velocities and the y-velocities show good agreements with those of De vahl Davis[7].

Keywords : 무발산 요소(Divergence Free Element), 벡터 포텐셜(Vector Potential), 회전 기저 함수(Solenoidal Basis Function), 비회전 기저 함수(Irrotational Basis Function)

1. 서 론

Navier-Stokes 방정식에서 밀도의 변화를 무시함으로써 유체 운동에 대한 서술을 상당히 단순화할 수 있으나, 이러한 운동 방정식의 단순화는 속도 벡터는 회전(solenoidal)이어야 한다는 구속 조건을 제시하고 있다. 이 구속 조건은 단순화된 운동 방정식의 풀이를 오히려 더 어렵게 하고 있음은 잘 알려져 있다. 특히 2000년 수학의 해를 맞이하여 해결되어야 할 7대 난제 중의 하나로 비압축성 Navier-Stokes 방정식에 대한 해의 존재 여부가 선정되었음은 시사하는 바가 크다고 하겠다(<http://www.claymath.org/millennium/>). 이 연구에서는 자연 대류에 의한 비압축성 유동에 대한 수치적 해를 구하기 위하여 hermite 기저함수를 이용한 유한요소법의 사용에 대하여 논의하기로 한다.

정사각형 영역에서 자연대류에 의한 비압축성 유체의 무차원화된 운동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} = -\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - \nabla p + \text{Pr} \nabla^2 \underline{u} - \text{Pr} Ra T \hat{q} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T = -\underline{u} \cdot \nabla T + \nabla^2 T + Q \tag{1.3}$$

여기서 \underline{u} 는 유체 속도 벡터, p 는 압력, T 는 온도, \hat{q} 는 중력 방향의 단위 벡터, Pr = Prandtl 수, Ra = Rayleigh 수를 의미하며 모두 무차원화된 변수들이다.

식 (1.2)는 Helmholtz 정리로부터 회전(solenoidal) 성분과 비회전(irrotational) 성분으로 아래와 같이 직교 분리될 수 있다 [1].

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} = \pi^S(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \text{Pr} \nabla^2 \underline{u} - \text{Pr} Ra T \hat{q}) \tag{2.1}$$

$$\nabla p = \pi^I(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \text{Pr} \nabla^2 \underline{u}) \tag{2.2}$$

여기서 연산자 π^S 와 π^I 는 각각 벡터장의 회전 성분과 비회전 성분을 투사(projection)하는 연산자이다. 즉, 속도 벡터 \underline{u} 는 연산자 π^S 를 통하여 $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ 을 만족시키는 속도 벡터 공간에서 해를 구하게 됨을 의미하며, 연속방정식 (1.1)은 더 이상 필요하지 않게 된다.

회전함수 중에서 가중 함수 \underline{v} 를 취하고, 비회전 함수 중

1 정희원, 동의대학교 기계공학과

* E-mail: kimjw@deu.ac.kr



에서 가중 함수 q 를 취하여, 식 (1.2)와 (1.3)에 각각 내적을 하면 다음과 같은 변분식을 얻는다.

$$\left(\underline{v}, \frac{\partial}{\partial t} \underline{u}\right) = -\left(\underline{v}, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}\right) - \text{Pr}(\nabla \underline{v}, \nabla \underline{u}) - \text{Pr} \text{Ra}(\underline{v} \cdot \hat{\underline{q}}, T) \quad (3.1)$$

$$\left(q, \frac{\partial}{\partial t} T\right) = -\left(q, \underline{u} \cdot \nabla T\right) - (\nabla q, \nabla T) + (q, Q) \quad (3.2)$$

여기서 (\cdot, \cdot) 는 내적을 의미한다. 영역 Ω 는 겹치지 않는 (non-overlapping) 소영역을 혹은 요소들로 나누어지며, 식 (3.1)과 (3.2)는 각각의 요소에 적용된다. 식 (3.1)과 (3.2)는 정의된 요소 기저함수(basis function)들을 이용하여 적절한 요소 연결 방정식을 구성한다.

그러나 요소 내에서 유동함수 ψ 에 대한 보간을 어떻게 정의해야 하는지는 분명하지가 않았다. 이를 위해 Holdeman[3, 4]은 ψ 에 대한 보간 함수로써 hermite 3차 함수의 사용을 제안한 바 있으며, 다음 절에서는 hermite 3차 함수를 사용한 회전 및 비회전 유한 요소 기저 함수의 전개 과정을 보인다.

2. 사변형 요소에 대한 보간 함수

2.1 회전(solenoïdal) 보간 함수

$\psi^e(x, y)$ 를 사변형 요소 내의 유동 함수 $\psi(x, y)$ 의 근사 값이라 하고 3차 hermite 함수에 의하여 보간된다고 하자. (ξ, η) 좌표계를 가지는 기준 요소(reference element)에 대한 hermite 함수는 다음과 같다[4].

$$g_{00i} = (1/8)(1 + \hat{\xi}_i \xi)(1 + \hat{\eta}_i \eta) \times (2 + \hat{\xi}_i \xi + \hat{\eta}_i \eta - \xi^2 - \eta^2) \quad (4.1)$$

$$g_{10i} = (-1/8)\hat{\xi}_i(1 - \xi^2)(1 + \hat{\xi}_i \xi)(1 + \hat{\eta}_i \eta) \quad (4.2)$$

$$g_{01i} = (-1/8)\hat{\eta}_i(1 - \eta^2)(1 + \hat{\xi}_i \xi)(1 + \hat{\eta}_i \eta) \quad (4.3)$$

여기서, 아래 첨자 i 는 요소의 절점 번호를 나타내며, $\hat{\xi}_i$ 와 $\hat{\eta}_i$ 는 해당되는 절점 좌표값인 ± 1 을 가진다.

3차 hermite 함수에 대한 자유도는 미지수 그 자신과 각 방향에 대한 도함수들로 구성된다. 임의 절점 “ i ”에 대한 자유도를 $(\Psi_i, \partial\Psi_i/\partial x, \partial\Psi_i/\partial y)$ 라 하면, 요소 내에서 유동 함수는 다음과 같이 구한다.

$$\psi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 \left(\Psi_i g_{0i} + \frac{\partial\Psi_i}{\partial x} g_{xi} + \frac{\partial\Psi_i}{\partial y} g_{yi} \right) \quad (5)$$

여기서,

$$g_{0i} = g_{00i} \quad (6.1)$$

$$g_{xi} = g_{10i} \frac{\partial x}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (6.2)$$

$$g_{yi} = g_{10i} \frac{\partial y}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (6.3)$$

(x, y) 좌표계와 (ξ, η) 좌표계 사이에서 기저 함수의 변환은 다음과 같다.

$$\underline{g}_i = \hat{\underline{g}}_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^T \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 $\underline{g}_i = (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi})$, $\hat{\underline{g}}_i = (g_{00i} \ g_{10i} \ g_{01i})$ 이다. 변환 도함수 행렬(Jacobian) J 는 아래와 같이 정의한다.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

절점 “ i ”에 대한 현재의 자유도는 $(\Psi_i, \partial\Psi_i/\partial x, \partial\Psi_i/\partial y)$ 으로, Ψ_i 는 유동 함수 ψ 자신에 대한 자유도, U_i 는 x 방향의 속도 u 그리고 V_i 는 y 방향의 속도 v 에 대한 자유도라 하면 이는 $(\Psi_i, -V_i, U_i)$ 와 같다. 우리는 Hermite 보간 함수에서 x 및 y 도함수에 대한 함수들의 위치를 바꾸고 \pm 부호를 바꾸더라도 유동 함수의 보간에는 이상이 없음을 주목하여, 절점의 자유도를 $(\Psi_i, \partial\Psi_i/\partial y, -\partial\Psi_i/\partial x)$ 혹은 (Ψ_i, U_i, V_i) 로 바꾸어 벡터 포텐셜 $\psi^e(x, y)$ 의 보간을 다음과 같이 한다.

$$\psi^e(x, y) = \sum_{i=1}^n (g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \underline{\Psi}_i^e \quad (9)$$

회전 속도 벡터 $\underline{u}^e(x, y)$ 는 $\psi^e(x, y)$ 에 대한 curl을 취함으로써 얻어진다. 즉,

$$\underline{u}^e(x, y) = \nabla \times \psi^e(x, y) \hat{k} = \sum_{i=1}^n \left(\begin{matrix} (\partial/\partial y)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \\ (-\partial/\partial x)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \end{matrix} \right) \underline{\Psi}_i^e \quad (10)$$

따라서 회전 속도에 대한 보간 함수, $\underline{S}_i(x, y)$, $i = 1, \dots, 4$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i(x,y) &= \begin{pmatrix} (\partial/\partial y)(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \\ (-\partial/\partial x)(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \\ S_{11i} & S_{12i} & S_{13i} \\ S_{21i} & S_{22i} & S_{23i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_{11i} & S_{12i} & S_{13i} \\ S_{21i} & S_{22i} & S_{23i} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, S_{11i}, \dots, S_{23i} 는 부록에 이들의 도함수들과 함께 나타내었다. 따라서 요소 내의 속도 $\underline{u}^e(x,y)$ 는 아래와 같이 구해진다.

$$\underline{u}^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{S}_i(x,y) \underline{\Psi}_i^e(12)$$

이렇게 구해진 속도 $\underline{u}^e(x,y)$ 가 무발산임을 검증하는 것은 어렵지 않다.

2.2 비회전(irrotational) 보간 함수

비회전 성분들은 스칼라 포텐셜($\phi(x,y)$)의 구배(gradient)로부터 얻을 수 있다. 스칼라 포텐셜($\phi(x,y)$)의 보간 함수는 식 (5)와 (6)에서 보인 3차 hermite 함수 $g_i(x,y)$ 이다. 임의의 사변형에서 $\phi^e(x,y)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\phi^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 (g_{0i} \quad g_{xi} \quad g_{yi}) \underline{\Phi}_i^e \quad (13)$$

여기서 $\underline{\Phi}_i^e$ 는 스칼라 포텐셜의 자유도로서 다음과 같다.

$$\underline{\Phi}_i^e = (\Phi_i \quad \partial\Phi_i/\partial x \quad \partial\Phi_i/\partial y)^T \quad (14)$$

비회전 기저 함수, $\mathbf{G}_i(x,y)$,는 스칼라 포텐셜, $\phi^e(x,y)$,의 구배(gradient)를 취하여 구하면 된다. 따라서,

$$\begin{aligned} \nabla\phi^e(x,y) &= \sum_{i=1}^4 \nabla(g_{0i} \quad g_{xi} \quad g_{yi}) \underline{\Phi}_i^e \\ &= \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} \quad g_{xi} \quad g_{yi}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} \quad g_{xi} \quad g_{yi}) \end{pmatrix} \underline{\Phi}_i^e \end{aligned} \quad (15)$$

요소 내에서 $\nabla\phi^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{G}_i(x,y) \underline{\Phi}_i^e$ 로 근사화되기 때문에 비회전 기저 함수, $\mathbf{G}_i(x,y)$,는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i(x,y) &= \begin{pmatrix} G_{11i} & G_{12i} & G_{13i} \\ G_{21i} & G_{22i} & G_{23i} \\ \frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} \quad g_{xi} \quad g_{yi}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} \quad g_{xi} \quad g_{yi}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

$\mathbf{G}_i(x,y)$ 와 $\nabla\mathbf{G}_i(x,y)$ 의 구체적인 수식화는 회전 기저 함수의 경우와 유사하기 때문에 생략한다.

3. 수치 계산

3.1 회전 및 비회전 보간 함수에 의한 요소 행렬

임의의 사변형 요소에서 식 (3.1)과 (3.2)에 대하여 Galerkin 잔여치법을 적용하기로 한다. 식 (3.1)의 시간항 ($\underline{v}, \frac{\partial}{\partial t}\underline{u}$)에 대한 요소 행렬을 \mathbf{M}_{ij}^e , 대류항 ($\underline{v}, \underline{u} \cdot \nabla\underline{u}$)에 대한 요소 행렬을 \mathbf{C}_{ij}^e , 소산항 ($\nabla\underline{v}, \nabla\underline{u}$)에 대한 요소 행렬을 \mathbf{D}_{ij}^e , 그리고 부력(buoyancy)에 의한 요소 행렬을 $\tilde{\mathbf{B}}_{ij}^e$ 라 하면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_j d\Omega_e \quad (17.1)$$

$$\mathbf{C}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i^T \left(\underline{u} \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial x} + \underline{v} \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (17.2)$$

$$\mathbf{D}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \mathbf{S}_i^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}_i^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (17.3)$$

$$\mathbf{B}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i^T \begin{pmatrix} \hat{g}_x \\ \hat{g}_y \end{pmatrix} \mathbf{q}_j d\Omega_e \quad (17.4)$$

여기서 위첨자 T는 전치 행렬을 의미한다.

식(3.2)에 대한 유한 요소 전개를 위하여 시간항 ($\underline{q}, \frac{\partial}{\partial t}T$)에 대한 요소 행렬을 $\tilde{\mathbf{M}}_{ij}^e$, 대류항 ($\underline{q}, \underline{u} \cdot \nabla T$)에 대한 요소 행렬을 $\tilde{\mathbf{C}}_{ij}^e$, 소산항 ($\nabla\underline{q}, \nabla T$)에 대한 요소 행렬을 $\tilde{\mathbf{D}}_{ij}^e$, 그리고 열 생성항 (\underline{q}, Q)의 요소 벡터를 $\tilde{\mathbf{f}}_i^e$ 라 하면 다음과 같이 된다.

$$\tilde{\mathbf{M}}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j d\Omega_e \quad (18.1)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{q}_i^T \left(\underline{u} \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial x} + \underline{v} \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (18.2)$$

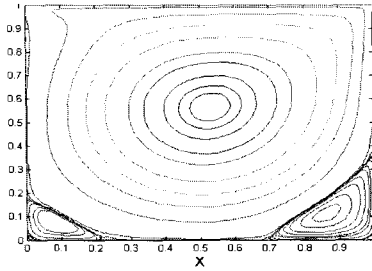


Fig. 1 Streamlines for Re = 1,000.

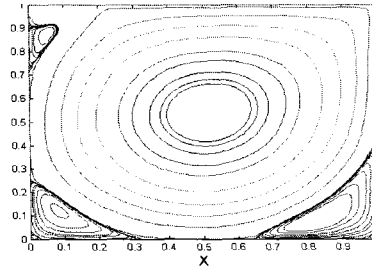


Fig. 2 Streamlines for Re = 3,200.

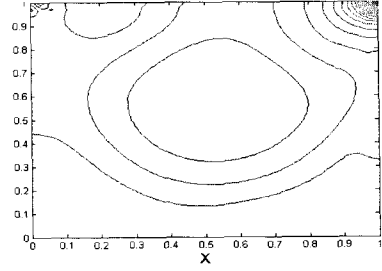


Fig. 3 Pressure by Modified Residual.

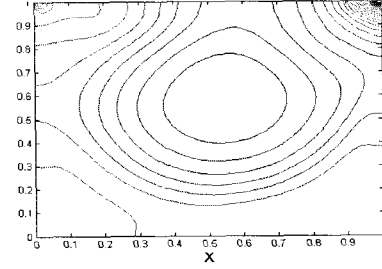


Fig. 4 Pressure by Divergent Free method.

$$\tilde{D}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_j d\Omega_e \quad (18.3)$$

$$\tilde{f}_i^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{q}_i^T Q d\Omega_e \quad (18.4)$$

여기서 $\mathbf{G}_i(x,y)$ 는 비회전 기저 함수이다. 식 (3.1)에 대한 요소 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}^e \underline{\gamma}_{,t} = -(\mathbf{C}^e + \text{Pr} \mathbf{D}^e) \underline{\gamma} - \text{Pr} Ra \mathbf{B}^e \underline{\tau} \quad (19.1)$$

여기서 $\underline{\gamma} = (\Psi \ U \ V)^T$, $\underline{\tau} = (T \ T_{,x} \ T_{,y})^T$ 이다. 식(3.2)에 대한 요소 행렬은 아래와 같이 한다.

$$\tilde{\mathbf{M}}^e \underline{\tau}_{,t} = -(\tilde{\mathbf{C}}^e + \tilde{\mathbf{D}}^e) \underline{\tau} + \tilde{\mathbf{f}}^e \quad (19.2)$$

식 (17)과 (18)을 이용하여 요소 방정식에 대한 무발산 유한 요소 정식화 과정을 수행하고, 이들을 조합하여 전체 행렬 방정식을 구성하게 된다.

3.2 Lid driven cavity 유동

Hermite 유동함수를 이용한 비압축성 유동 해석은 이미 본 학회지에 소개되었으며[5], 유선에 대한 등고선을 Re = 1000 과 3200에 대하여 Fig. 1과 Fig. 2에 각각 나타내었다. 이들의 형태는 Ghia 등[6]의 공동(cavity) 유동에 대한 수치 결과들과 매우 잘 일치하였다. 또 압력에 대한 결과를 알아보기 위하여 Fig. 3와 Fig. 4에 Re = 1000에 대한 압력 등고선을 수정 잔여

$$\begin{aligned} \psi &= u = v = 0 \\ \partial T / \partial y &= 0 \end{aligned} \quad (1, 1)$$

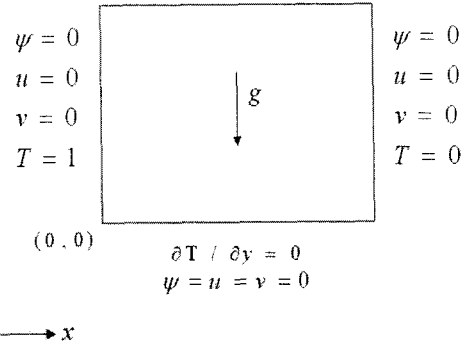


Fig. 5 Boundary conditions for the natural convection in a square cavity.

치법의 결과와 비교하였다. 이 비교에서 현재의 알고리즘에 의한 결과가 더 자세함을 확인할 수 있었다.

3.3 Buoyancy driven square cavity 유동

자연대류 유동에 대한 경계조건은 Fig. 5에 나타내었다. 본 연구에서는 16 x 16 균일 요소들로 영역을 분할하고, Ra = 1,000, 10,000 그리고 100,000에 대한 유선, 온도, 속도 U 그리고 속도 V에 대한 등고선도를 각각 Fig. 6 - Fig. 17에 나타내었다. Ra = 1,000과 10,000에 대하여는 De vahl Davis[7]의 결과들과 잘 일치하고 있으나 Ra = 100,000의 결과들은 차이점들을 보인다. 이는 격자의 수가 작기 때문에 생긴 것으로 보이며 추후 더 세밀한 격자를 이용하여 확인할 필요가 있다.

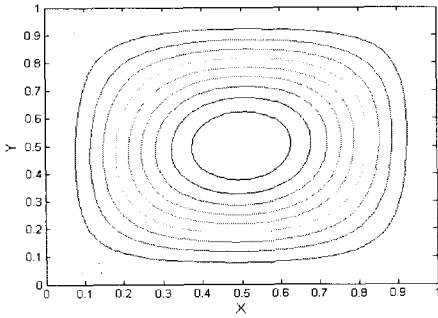


Fig. 6 Streamlines for $Ra = 10^3$.

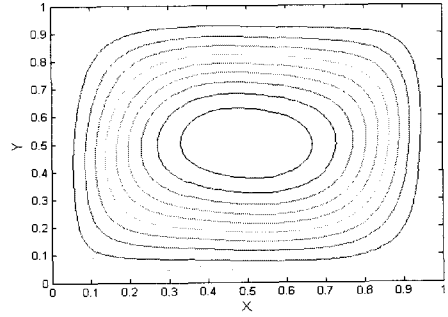


Fig. 10 Streamlines for $Ra = 10^4$.

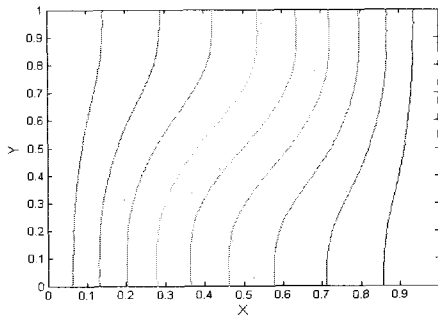


Fig. 7 Temperature for $Ra = 10^3$.

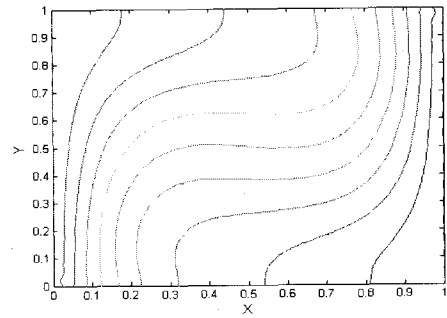


Fig. 11 Temperature for $Ra = 10^4$.

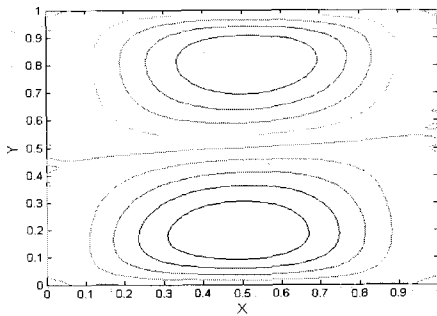


Fig. 8 Horizontal velocity for $Ra = 10^3$.

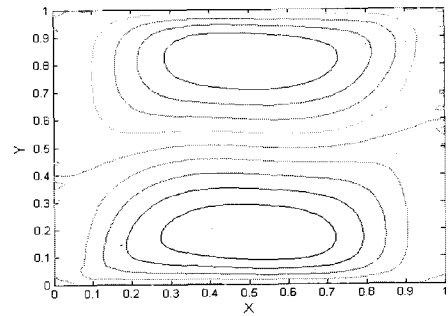


Fig. 12 Horizontal velocity for $Ra = 10^4$.

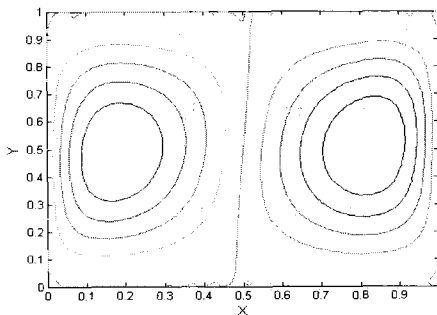


Fig. 9 Vertical velocity for $Ra = 10^3$.

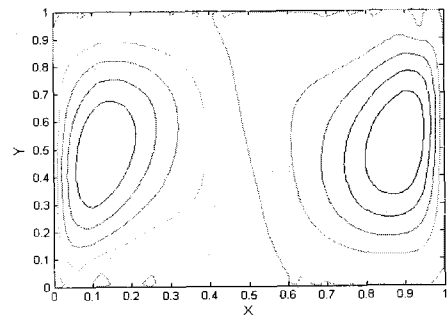


Fig. 13 Vertical velocity for $Ra = 10^4$.

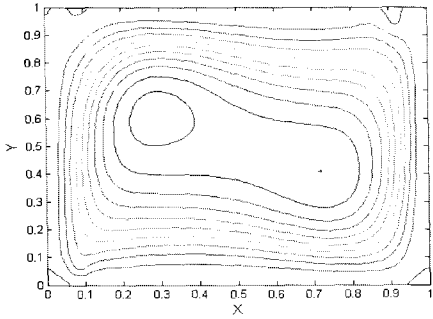


Fig. 14 Streamlines for $Ra = 10^5$.

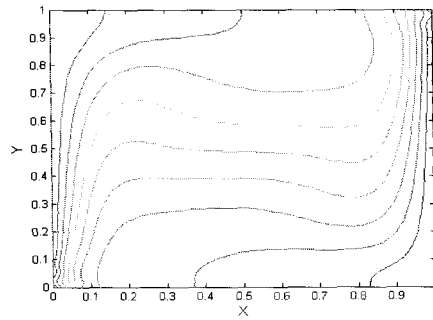


Fig. 15 Temperature for $Ra = 10^5$.

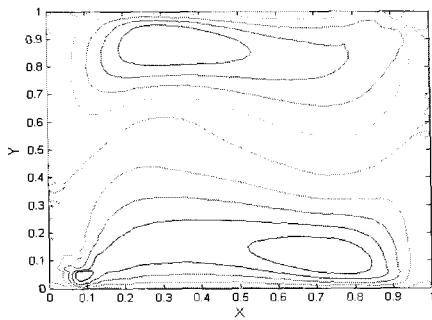


Fig. 16 Horizontal velocity for $Ra = 10^5$.

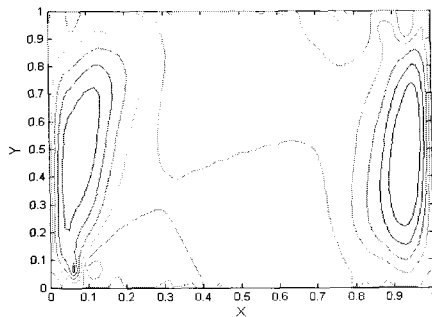


Fig. 17 Vertical velocity for $Ra = 10^5$.

4. 결 론

Holdeman[2,3]이 제시한 무발산 요소를 이용하여 단순 유동 계산 뿐 아니라 비등온 유동인 자연대류 유동에 대한 계산을 수행하였다. 이 경우, 온도는 scalar potential인 관계로 비회전 기저 함수를 사용하였으며, 이의 사용은 매우 긍정적으로 나타났었다. 본 연구에서는 벡터 및 스칼라 포텐셜의 도입을 통하여 보다 넓은 물리적 현상에 적용할 수 있음을 보였다.

참고문헌

- [1] 1977, Pozrikidis, C., Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics, *Oxford University Press*.
- [2] 2004, Holdeman, J.T., "I. Some Lagrange Interpolation functions for solenoidal and irrotational vector fields," manuscript, submitted to *Mathematics of Computation*, <http://j.t.holdeman.home.att.net>
- [3] 2004, Holdeman, J.T., "II. Some Hermite Interpolation functions for solenoidal and irrotational vector fields," manuscript, submitted to *Mathematics of Computation*, <http://j.t.holdeman.home.att.net>
- [4] 1982, Lapidus, L. and Pinder, G.F., Numerical solution of Partial Differential Equations in Sciences and Engineering, *John Wiley & Sons, Inc.*
- [5] 2007, 김진환, "Hermite 유동함수를 이용한 비압축성 유동 계산," *한국전산유체공학회*, 제12권, 제1호, pp.35-42.
- [6] 1982, Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. of Comp. Physics*, Vol.48, pp.387-411.
- [7] 1983, De Vahl Davis, G., "Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution," *Int. J. for Numer. methods in fluidss*, Vol.3, pp.249-264.