

## 고차 내삽기법을 사용한 중첩 격자기법

이 경 록,<sup>\*1</sup> 김 규 흥<sup>2</sup>NOTES FOR AUTHORS OF THE KOREAN SOCIETY  
OF COMPUTATIONAL FLUIDS ENGINEERINGK.L. Lee<sup>\*1</sup> and K.H. Kim<sup>2</sup>

*This paper presents the high order conservative interpolation methods. This method has been successfully implemented into a cell-centered finite volume methods code. Results using high order and maintaining conservation interpolation method are more accurate compared to bilinear interpolation.*

**Key Words :** 전산유체역학(CFD), 중첩 격자(Overset grid), 고차 내삽기법(High order interpolation)

## 1. 서 론

효율적인 격자계 생성 문제는 전산 유체 해석에서 중요한 문제 중 하나이다. 복잡한 형상이나 움직이는 물체 주위 유동장 해석등의 경우에서 유용한 격자 기법중 하나는 중첩 격자기법이다. 중첩 격자기법은 중첩되는 두 개의 격자간에 격자의 경계 부분에서 서로간의 경계조건을 교환하여 유동 해석을 시행하는 기법이다. 이러한 정보 교환 시 많이 사용되는 방법이 내삽기법이다. 내삽기법을 통하여 경계조건에 정보 교환 시에 중요한 점은 내삽기법에서 발생하는 오차를 최대한 줄여주는 것이다. 고차의 계산 기법은 turbulence, aeroacoustics, electromagnetics, fluid/structure interactions 등과 같은 다양한 물리적 현상 해석에서 낮은 차수 알고리즘의 한계를 보완해 준다. 고차의 해석 기법들은 격자계에서 고주파수 파동을 표현하는데 낮은 차수의 기법들보다 정확한 결과를 보여준다. 기존 많이 사용되어온 내삽 기법은 2차의 기법으로 위와 같은 물리적 현상 해석에 한계가 있기 때문에 중첩 격자기법에서도 고차의 내삽 기법을 필요로 한다. 본 연구에서는 유한 체적법을 사용한 고차의 내삽기법을 통하여 기존의 기법보다 정확한 내삽 기법을 개발하였다. 또한 물성치가 급격히 변화

는 구간이나 불연속구간에서 정확도가 낮은 내삽기법의 단점을 보완하기 위하여 limiter 기법을 사용하여 정확도를 향상시켰다.

## 2. 고차 내삽기법

## 2.1 지배 방정식

본 연구에서는 압축성 cell-centered finite volume method를 사용한 2D Euler 방정식을 사용하였다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e + p)u \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \end{bmatrix} \quad (2)$$

AUSMPW+ 와 MUSCL 기법을 사용하였고 explicit 시간 적분법을 사용하였다.

## 2.2.1 고차 내삽기법

중첩 격자계에서는 주격자와 중첩 격자간의 경계에서 유동

1 학생회원, 서울대학교 대학원 기계항공공학부

2 정회원, 서울대학교 조교수

\* Corresponding author, E-mail: rudfhr1228@snu.ac.kr

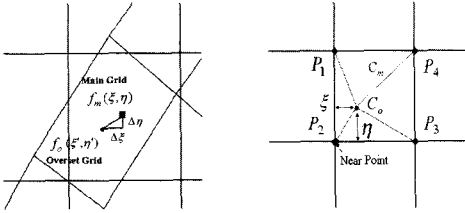


Fig. 1 (a) 주격자 내 중첩격자의 위치 (b) near point 위치

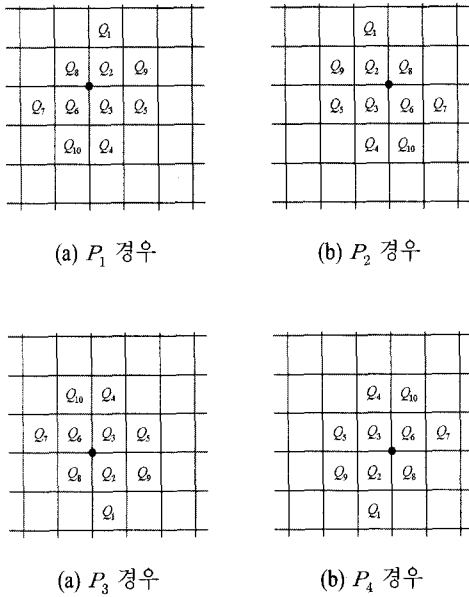


Fig. 2

정보의 교환을 필요로 한다. 이러한 정보 교환시에 많이 사용되는 기법이 내삽기법이다. turbulence, aeroacoustics, electro-magnetics, fluid/structure interactions 등과 같은 다양한 물리적 현상 해석에서 낮은 차수 알고리즘의 한계를 보완하기 위하여 고차의 알고리즘을 필요로 하고 있다. 때문에 본 연구에서는 4차의 내삽기법을 제시하였다.

Fig. 1(a)에서 보듯이 주격자 cell 내에 위치하는 중첩격자 cell 중심위치에서 주격자의 물성치  $f_o$ 는 다음과 같은 내삽함수를 통하여 구해진다.

$$f(\xi, \eta) = A\xi^3 + B\eta^3 + C\xi^2\eta + D\xi\eta^2 + E\xi^2 + F\eta^2 + G\xi\eta + H\xi + I\eta + J \quad (3)$$

$\xi, \eta$  는 computational domain 변수 이다.

내삽함수  $f$  의 10개의 계수를 결정하기 위하여 주위 10개 셀을 필요로 한다. 10개의 cell을 선택하는 경우는 Fig.1 (b)에서 보듯이 주격자 cell 내의 중첩 격자의 cell 중심  $C_o$ 의 위치에 따라 4가지로 나뉜다. 중첩 격자 cell 중심  $C_o$ 의 위치가 주격자의 격자점  $P_1, P_2, P_3, P_4$ 중 가까운 점을 찾고 각 경우에 대하여 10개의 cell을 찾게 된다. 각 경우는 Fig. 2와 같다. 선택한 10개의 cell의 물성치를 통하여 내삽함수의 계수를 구한다. 각 경우는 서로 대칭이므로 실제 계산에서는 가까운 점이  $P_2$ 인 1가지 경우의 계수를 구하여 대칭시켜 계산한다.

중첩격자의 cell 중심이 위치한 주격자  $Q_3$ 의 왼쪽 아래 격자점을 원점으로 하여 각 cell에서의 내삽함수를 적분하면 내삽함수의 계수를 구할 수 있다

$$\begin{bmatrix} 1 & -15 & -1 & 7 & 1 & 7 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 6 & 3 & 3 & -4 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 3 & 3 & -4 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 3 & 3 & -4 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 15 & 1 & 7 & 1 & 7 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 6 & 3 & 3 & -4 & 2 & -2 & 1 \\ 15 & 1 & 7 & 1 & 7 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 & 3 & 3 & -4 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 3 & 3 & -4 & -2 & 2 & 1 \\ -15 & 1 & 7 & -1 & 7 & 1 & -3 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 & 3 & 3 & -4 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 3 & 3 & -4 & -2 & -2 & 1 \\ 15 & -1 & 7 & 1 & 7 & 1 & -3 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 & 3 & 3 & -4 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 15 & 1 & -7 & 1 & 7 & -3 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & -6 & 3 & 3 & -4 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \end{bmatrix} \quad (5)$$

위에서 구한 계수를 통하여 중첩격자 cell 중심위치에서의 주격자의 물성치를 구할 수 있다. 이는 주격자에서의 물성치이



기 때문에 중첩격자의 물성치 값으로 변환 해줄 필요가 있다. 식 (3)은 주격자의 computational domain 변수  $\xi, \eta$ 에 대한 함수이며 이를 중첩격자의 변수  $\xi', \eta'$ 에 대한 함수로 변화시켜 준다.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} x + \frac{\partial \xi}{\partial y} y \\ \eta &= \frac{\partial \eta}{\partial x} x + \frac{\partial \eta}{\partial y} y \end{aligned} \quad (6)$$

$\xi, \eta$ 와  $x, y$ 는 각각 주격자에서의 computational domain 과 physical domain 이다.

주격자 cell 중심의 위치  $x, y$ 와 중첩격자의 cell 중심의 위치  $x', y'$ 의 차를  $\Delta x, \Delta y$ 라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x &= x' + \Delta x = \frac{\partial x'}{\partial \xi'} \xi' + \frac{\partial x'}{\partial \eta'} \eta' + \Delta x \\ y &= y' + \Delta y = \frac{\partial y'}{\partial \xi'} \xi' + \frac{\partial y'}{\partial \eta'} \eta' + \Delta y \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)과 식 (6)에서 주격자의  $\xi, \eta$ 를 다음과 같이 중첩격자의  $\xi', \eta'$ 로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 \xi' + \beta_1 \eta' + \gamma_1 \\ \eta &= \alpha_2 \xi' + \beta_2 \eta' + \gamma_2 \\ \alpha_1 &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial \xi'} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial \xi'} & \alpha_2 &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial \xi'} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial \xi'} \\ \beta_1 &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial \eta'} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial \eta'} & \beta_2 &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial \eta'} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial \eta'} \\ \gamma_1 &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \Delta y & \gamma_2 &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y \end{aligned} \quad (8)$$

이를 통해 주격자의 내삽 함수 식 (3)을 중첩격자의 함수로 변환 하게 된다.

$$\begin{aligned} f(\xi', \eta') &= A' \xi'^3 + B' \eta'^3 + C' \xi'^2 \eta' + D' \xi' \eta'^2 + E' \xi'^2 \\ &\quad + F' \eta'^2 + G' \xi' \eta' + H' \xi' + I' \eta' + J' \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)에서의 계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A' &= A\alpha_1^3 + B\alpha_2^3 + C\alpha_1^2\alpha_2 + D\alpha_1\alpha_2^2 \\ B' &= A\beta_1^3 + B\beta_2^3 + C\beta_1^2\beta_2 + D\beta_1\beta_2^2 \\ C' &= 3A\alpha_1^2\beta_1 + 3B\alpha_2^2\beta_2 + 2\alpha_1\alpha_2(C\beta_1 + D\beta_2) \\ &\quad + C\alpha_1^2\beta_2 + D\alpha_2^2\beta_1 \\ D' &= 3A\alpha_1\beta_1^2 + 3B\alpha_2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2(C\alpha_1 + D\alpha_2) \\ &\quad + C\alpha_2\beta_1^2 + D\alpha_1\beta_2^2 \\ E' &= 3A\alpha_1^2\gamma_1 + 3B\alpha_2^2\gamma_2 + 2\alpha_1\alpha_2(C\gamma_1 + D\gamma_2) \\ &\quad + C\alpha_1^2\gamma_2 + D\alpha_2^2\gamma_1 + E\alpha_1^2 + F\alpha_2^2 + G\alpha_1\alpha_2 \\ F' &= 3A\beta_1^2\gamma_1 + 3B\beta_2^2\gamma_2 + 2\beta_1\beta_2(C\gamma_1 + D\gamma_2) \\ &\quad + C\beta_1^2\gamma_2 + D\beta_2^2\gamma_1 + E\beta_1^2 + F\beta_2^2 + G\beta_1\beta_2 \\ G' &= 6A\alpha_1\beta_1\gamma_1 + 6B\alpha_2\beta_2\gamma_2 + 2C(\alpha_2\beta_1\gamma_1 + \alpha_1\beta_2\gamma_1 \\ &\quad + \alpha_1\beta_1\gamma_2) + 2D(\alpha_1\beta_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\gamma_1) \\ &\quad + 2E\alpha_1\beta_1 + 2F\alpha_2\beta_2 + G(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2) \\ H' &= 3A\alpha_1\gamma_1^2 + 3B\alpha_2\gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2(C\alpha_1 + D\alpha_2) + C\alpha_2\gamma_1^2 \\ &\quad + D\alpha_1\gamma_2^2 + 2E\alpha_1\gamma_1 + 2F\alpha_2\gamma_2 + G(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) \\ &\quad + H\alpha_1 + I\alpha_2 \\ I' &= 3A\beta_1\gamma_1^2 + 3B\beta_2\gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2(C\beta_1 + D\beta_2) + C\beta_2\gamma_1^2 \\ &\quad + D\beta_1\gamma_2^2 + 2E\beta_1\gamma_1 + 2F\beta_2\gamma_2 + G(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) \\ &\quad + H\beta_1 + I\beta_2 \\ J' &= A\gamma_1^3 + B\gamma_2^3 + C\gamma_1^2\gamma_2 + D\gamma_1\gamma_2^2 + E\gamma_1^2 \\ &\quad + F\gamma_2^2 + G\gamma_1\gamma_2 + H\gamma_1 + I\gamma_2 + J \end{aligned} \quad (10)$$

### 2.2.2 Limiter

이와 같은 고차의 내삽 기법은 불연속구간이나 구배가 큰 영역에서 정확한 해를 얻어내지 못한다. 이를 위해 limiter를 사용한다. cell-interface에서의 물성치는 다음을 만족하여 한다.

$$\overline{\Phi}_{i-1} \leq \Phi_{i-\frac{1}{2}} \leq \overline{\Phi}_i, \quad \overline{\Phi}_i \leq \Phi_{i+\frac{1}{2}} \leq \overline{\Phi}_{i+1} \quad (11)$$

따라서  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  값은 다음과 같은 조건을 만족하여야 한다.

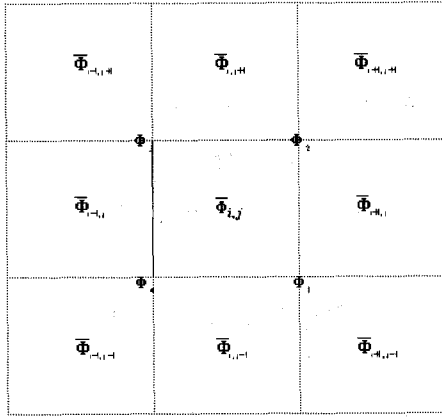


Fig. 3 Distributions of cell averaged values and cell vertex values.

$$\begin{aligned}
 & \min(\bar{\Phi}_{i,j}, \bar{\Phi}_{i+1,j}, \bar{\Phi}_{i,j-1}, \bar{\Phi}_{i+1,j-1}) < \Phi_1 \\
 & < \max(\bar{\Phi}_{i,j}, \bar{\Phi}_{i+1,j}, \bar{\Phi}_{i,j-1}, \bar{\Phi}_{i+1,j-1}) \\
 & \min(\bar{\Phi}_{i,j}, \bar{\Phi}_{i+1,j}, \bar{\Phi}_{i,j+1}, \bar{\Phi}_{i+1,j+1}) < \Phi_2 \\
 & < \max(\bar{\Phi}_{i,j}, \bar{\Phi}_{i+1,j}, \bar{\Phi}_{i,j+1}, \bar{\Phi}_{i+1,j+1}) \\
 & \min(\bar{\Phi}_{i,j}, \bar{\Phi}_{i-1,j}, \bar{\Phi}_{i,j+1}, \bar{\Phi}_{i-1,j+1}) < \Phi_3 \\
 & < \max(\bar{\Phi}_{i,j}, \bar{\Phi}_{i-1,j}, \bar{\Phi}_{i,j+1}, \bar{\Phi}_{i-1,j+1}) \\
 & \min(\bar{\Phi}_{i,j}, \bar{\Phi}_{i-1,j}, \bar{\Phi}_{i,j-1}, \bar{\Phi}_{i-1,j-1}) < \Phi_4 \\
 & < \max(\bar{\Phi}_{i,j}, \bar{\Phi}_{i-1,j}, \bar{\Phi}_{i,j-1}, \bar{\Phi}_{i-1,j-1})
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

### 3. 계산 결과

고차 내삽 기법의 효과를 비교하기 위하여 sine파와 stationary vortex 유동에서 격자를 움직임으로써 내삽기법으로 인하여 발생하는 오차를 bilinear 내삽기법과 비교하여 보았다. 또한 10% bump 문제를 통하여 질량이 보존성을 확인하여 보았다.

#### 3.1 Sine 파

다음과 같은 밀도 분포를 가지며  $0.8c_\infty$ 로 움직이는 sine 파의 내부를(Fig. 4(a))

$$\rho = 1 + 0.2 \sin(2\pi(x_0 - x))
 \tag{13}$$

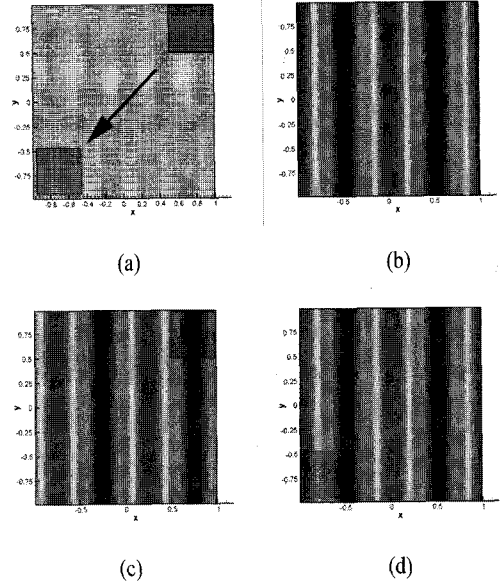


Fig.4 (a) 주격자와 중첩격자 (b) 초기조건 (c) 시작위치 (d) 마지막 위치

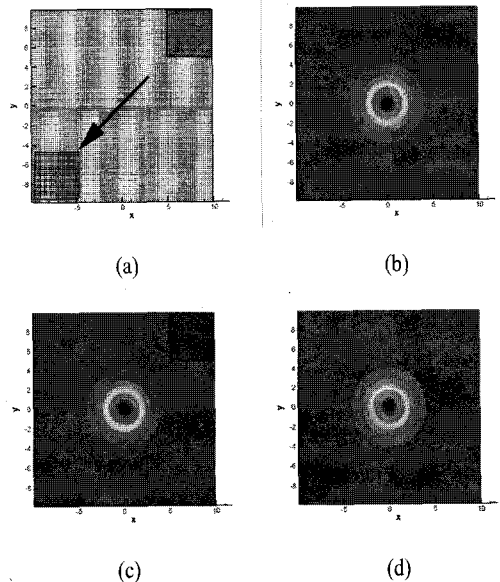


Fig. 5 (a) 주격자와 중첩격자 (b) 초기조건 (c) 시작위치 (d) 마지막 위치

Fig. 4의 (b)와 같이 25x25 크기의 중첩격자가  $1.5c_\infty$ 의 속도로 100x100 크기의 주격자 오른쪽 상단에서 왼쪽 하단으로 이동하면서 발생하는 오차를 계산하였다.(Fig. 4(c),(d)) 이러한 결과와 bilinear 내삽기법을 사용한 결과와 l2norm을 비교함으

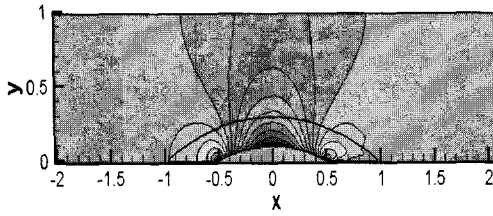


Fig. 6 10% bump에서의 밀도 분포

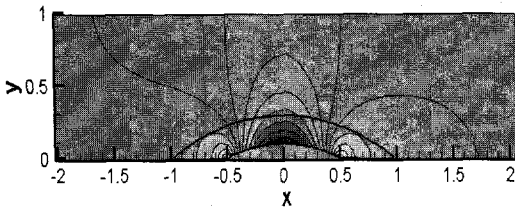


Fig. 7 10% bump에서의 압력 분포

로써 scalar conservation에서 고차 내삽기법의 효과를 알아보았다. 고차내삽기법의 l2norm은 1.526e-5, bilinear 내삽기법의 l2norm은 3.407e-5로 고차 내삽기법의 정확도가 더 높음을 확인할 수 있다.

### 3.2 Stationary vortex

다음과 같은 Thomson-Rankine vortex model에서(Fig. 5(a))

(a) Free vortex (outside the core)

$$V_{\theta} \cdot r = \text{constant} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V_{\theta}^2}{r} \quad (14)$$

(b) Forced vortex (inside the core)

$$V_{\theta} = \omega \cdot r \quad \text{and} \quad \frac{dp}{dr} = \rho \frac{V_{\theta}^2}{r} \quad (15)$$

Fig. 5의 (b)와 같이 25x25 크기의 증첩격자가 1.5c<sub>∞</sub>의 속도로 100x100 크기의 주격자 오른쪽 상단에서 왼쪽 하단으로 이동하면서 발생하는 오차를 계산하였다.(Fig. 5(c),(d)) 이러한

Table 1 Sine 파 L2norm

Sine 파	고차 내삽기법	Bilinear 내삽기법
		1.526e-5
Stationary vortex flow	고차 내삽기법	Bilinear 내삽기법
		1.204e-4

결과와 bilinear 내삽기법을 사용한 결과와 L2norm을 비교함으로써 Euler equation에서 고차 내삽기법의 효과를 알아보았다. 고차내삽기법의 l2norm은 1.204e-4, bilinear 내삽기법의 l2norm은 2.173e-4로 고차 내삽기법의 정확도가 더 높음을 확인할 수 있다.

### 3.3 10% bump

질량 보존을 확인해 보기 위하여 10% bump가 있는 내부 유동을 해석하였다. 0.375 c<sub>∞</sub> 흐르는 유동의 유입류와 유출류의 질량 유동을 비교하여 질량 보존성을 확인해 보았다. 고차 내삽기법을 사용한 결과와 bilinear 내삽기법을 사용한 결과와 L2norm을 비교하였다.

유입류에서의 질량유동과 유출류에서의 질량 유동을 비교해 보면 2.27e-2% 정도의 질량 손실이 발생하였다. bilinear 내삽기법은 5.74e-2% 정도의 질량손실을 보였다. 고차 내삽기법의 질량 보존성이 더 뛰어난 것을 확인할 수 있었다.

## 4. 결 론

Table 1에서 보듯이 고차 내삽기법이 기존의 bilinear 내삽기법 보다 2배정도 더 정확성을 더 향상시킬 수 있음을 확인할 수 있었고, 10% bump 문제에서 질량보존성이 더 뛰어난 것을 알 수 있었다.

## 참고문헌

- [1] 1987, Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K. and Zienkiewicz, O., "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations," *J.Com.Phys.*, Vol.77.
- [2] 2005, Kim, K.H., Kim, C., "Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows," *J.Com.Phys.*, Vol.208, pp.527-569.
- [3] 1995, Wang, Z.J., "A Fully Conservative Interface Algorithm for Overlapped Grids," *J.Com.Phys.*, Vol.122, pp.96-106.
- [4] 1989, Young J. Moon, Meng-sing Liou, "Conservative Treatment of Boundary Interfaces for Overlaid Grids and Multi-level Grid Adaptations," *AIAA-89-1980*.
- [5] 2000, Philip M. Cali, Vincent Couaillier, "Conservative Interfacing for Overset Grids," *AIAA-2000-1008*.
- [6] 1985, Ria, M., "An Implicit, Conservative, Zonal-Boundary Scheme for Euler Equation Calculations," *AIAA-85-0488*.
- [7] 1994, Wang, Z., Buning, P. and Benek, J., "Critical Evaluation of Conservative and Non-Conservative Interface Treatment for Chimera Grids," *AIAA-94-0320*.