韓國數學敎育學會
<全國數學敎育研究大會 프로시딩>
제 37회. 2006. 10. 147-161

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 37th. Oct. 2006. 147-161

# 증명보조카드를 활용한 중학생의 증명지도에 관한 연구

이 정 자 (대구도원중학교)
조 정 수 (영남대학교)

## I. 서 론

### A. 연구의 필요성 및 목적

Lakatos(1976)는 수학적 사고활동은 인간의 경험에 바탕을 둔 역사적 활동이며 수학은 오류 가능한 준경험 과학이라고 주장한다. 즉, 수학은 공리라는 확고한 기초위에 증명을 통해서 불변의 정리를 축적하는 것이 아니라 개선되고 성장하는 것이고, 증명은 발견과 개선의 수단으로 본 하나의 사고실험과정으로 여기면서 수학적 활동에서 증명의 역할을 강조하였다(우정호, 1998).

미국수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)에서도 수학과 교육과정에서 수학적 추론과 증명활동을 학교 수학의 중요한 목표로 삼고 있다. 우리나라는 제 7차 교육과정(교육부, 1999)에서 문제해결력과 함께 수학적 힘의 신장을 중요시하고 있다. 수학적 힘이란 탐구하고 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학에 관한 또는 수학을 통한 정보 교환능력, 수학 내에서 또는 수학과 다른 학문적 영역 사이의 아이디어를 연결하는 능력, 문제해결이나 어떤 결정을 내려야 할 때 수량과 공간에 관한 정보를 찾고 평가하고 사용하려는 성향과 자신감을 포함하는 것으로 인지적 측면과 정의적인 측면을 모두 포괄한다. 따라서 수학 지식의 성장 근원은 수학적 사고 활동이라 할 수 있으며, 수학적 사고 활동의 핵심은 수학적 추론과 증명이라고 할 수 있다.

증명은 현재의 문제를 조사하여 추측을 형성하는 발견의 맥락있고 그 추측이 참인지 거짓인지를 조사하는 정당화의 맥락, 그리고 마지막으로 그 결과를 다른 사람에게 설명하여 확신시키는 사회적 맥락의 과정이라고 할 수 있다. 증명은 연역적 활동이며, 결론으로부터 나아가는 분석적 사고방식과 가정으로부터 나아가는 종합적 사고방식이 역동적으로 통합된 과정이다(나귀수, 1998).

증명이 수학적 사고활동의 중요한 역할을 함에도 불구하고 학교수학에서 증명 영역은 제 역할을 발휘하지 못하고 있다. 학교현장에서는 교사, 학생 모두 증명을 어려워할 뿐만 아니라 왜 배워야 하는지 조차도 이해하지 못한 채 암기위주의 수업이 이루어지고 있는 실정이다. 또한 우리나라 중학생들의 증명 능력은 대략 10~30%정도의 학생들만이 기본적인 정리를 증명할 수 있는 수준으로서 매우 낮다고 한다(서동엽, 1999).

나귀수(1998)는 학생들이 증명 학습상황에서 증명방법을 전혀 탐색하지 못하고, 명제의 해석을 어려워하며, 정당화 수단으로서 증명의 한계를 느끼며, 반드시 기호를 사용해야 한다는 데 많은 어려움

을 겪는다고 한다. 또한 대부분의 교사들은 이러한 어려움을 해소하기 위해 다양한 맥락에서 배경화 작업을 시도하거나 일상적인 단어를 이용하여 간단하고 쉽게 설명하고, 증명과정을 절차화하여 나름대로의 지도방안을 고안하였으나 증명에 대한 논의 방식은 다분히 종합적 양식을 따르며, 증명의 결과물이라고 할 수 있는 정리를 더욱 강조하는 방식으로 수업을 조직하여 증명지도를 한다고 한다.

이러한 문제점을 해결하기 위한 방안으로 학교수학에서 좀 더 학생들에게 수학적 의미와 동기를 부여할 수 있는 증명지도방법 연구가 많이 이루어져왔다. 대표적으로 수리 철학적 입장에서 Lakatos의 준경험주의, 사회적 구성주의 이론, 교수학적 입장에서 Van Hieles의 기하 학습수준 이론, Freudenthal의 이론, 발달 심리학적 입장에서 Piaget, Bell의 이론, 인지 심리학적 이론, 협동학습, 동기유발 학습 등 다양한 관점에서 증명지도에 관한 문헌연구와 실험연구, 질적 사례연구가 이루어져왔다. 이러한 연구의 공통점은 분석법과 종합법을 통합하여 지도함으로써 학생 스스로 증명의 의미를 이해하고 추론하여 증명할 수 있는 능력을 신장시키는데 목적을 두고 있다.

따라서 본 연구는 증명에 관련된 다양한 수학적 사고 활동을 경험하고, 자유롭게 생각하고, 추측을 제기하고, 자신의 추측이나 주장에 대해 정당성을 입증하여 자기 자신이나 다른 사람에게 이 추측이나 주장을 설득하고 확신시킬 수 있는 방안으로 증명과정에 관련된 기본적이며 핵심적인 정리, 개념, 절차 등을 카드로 제시하는 방법을 지도함으로써 기하증명 능력 변화와 기하증명에 대한 학생들의 수학적 태도 변화를 알아보는데 그 목적이 있다.

본 연구에서 사용되는 카드는 학생들이 어떤 명제를 증명하기에 필요한 기본적인 선수학습 내용이나 증명에 필요한 모든 정리, 개념, 원리 등을 직사각형 모양의 종이에 적은 것을 의미한다. 또한 증명에 꼭 필요하지 않지만 도움을 줄 수 있는 내용도 몇 가지 포함된다. 본 연구의 증명과정은 다양한 카드 중에서 명제의 증명에 필요하다고 생각되는 카드를 선택하여 배열하고, 카드를 배열한 자신의 생각을 쓰는 과정을 통해 그 배열이 논리적으로 이상이 없는지 점검 후 증명하는 활동으로 계획하였다. 이런 증명과정을 통해 카드는 학생 개개인의 수학사고 활동에서 명제를 세분화하여 분석하고, 증명의 방향을 스스로 탐구하는 데 도움을 주는 보조적인 역할을 하므로 이 카드의 이름을 증명보조카드(Proof Assisted Cards, PAC)로 정의하고자 한다.

## II. 이론적 배경

### A. 증명의 본질

Kline은 수학(mathematics)이라는 단어는 복수의 개념으로 이해되어야 하며, 수학자들이 서로 다른 견해들을 갖게 되는 근본적인 문제점은 '증명이 무엇인가'에 관한 견해 차이에 있다고 한다. 즉 수리철학 사조간의 수학의 본질에 대한 입장의 차이는 증명에 대한 생각의 차이에서 유래된다는 것이다(서동엽, 1999).

수리철학은 수학적 지식의 본질에 대한 인식에 따라 크게 절대주의와 상대주의로 구분된다. 18세기까지는 수학이 절대적 진리의 모델로 간주되는 플라톤주의가 지배적이었으나 “유클리드의 제 5공준이 성립하지 않으면서도 완전히 모순 없는 기하이론을 만드는 것이 가능하다”라는 사실이 발견되면서 비유클리드 기하가 출현하게 되었고 이로 인해 그 기초가 동요되었다. 이러한 현상을 극복하기 위한 논의로 19세기와 20세기 초에 논리주의, 형식주의, 직관주의가 나타났다. 20세기에 들어와서 수학에 대한 형식적이고 연역적인 증명관을 비판하는 준경험주의, 사회적 인식론이 대두되었다.

증명은 플라토니즘에서는 수학 명제가 절대적으로 참임을 정당화하는 수단으로, 논리주의에서는 수학 명제가 논리적으로 참임을 정당화하는 수단으로 가능하다. 또한 직관주의에서는 구성적 증명을 통해 구성 가능성이 입증되는 명제만을 참인 명제로 인정하며, 형식주의에서는 증명을 의미 없는 기호 조작으로 환원함으로써 무모순성과 완전성을 정당화하고자 한다. 절대적 수리철학자들은 무엇을 타당한 증명으로 인정할 것인가라는 점과 증명의 세부 내용에 있어서 상당한 관점의 차이를 보이기는 하지만 증명의 본질을 수학적 명제를 정당화하는 수단으로 파악하는 데에 있어서 공통된 입장을 취하고 있다. 그러나 수학의 기초를 확립하기 위한 수단으로서 연역적 추론 을 중시하는 절대주의의 증명관은 그 자체 내에서도 문제점을 내포하고 있으며, 많은 비판을 받아왔다. 증명의 역할과 수학적 증명의 타당성에 대한 기준이 다르기 때문에 유일한 기준을 설정하기 어렵고, 수학적 추론 과정을 보여 주지 못하고 수학적 사고의 결과만을 세련된 형식으로 제시하는 종합적인 방식으로 증명이 이루어지기 때문에 학생들에게 증명을 의미 있게 지도하기에 부적절하다(나귀수, 1998).

준경험주의 대표 철학자 Lakatos는 수학은 공리의 확고한 기초위에 증명에 의해 불변의 정리를 축적해 가는 활동이 아니라, 반박될 가능성이 있는 ‘잠재적 반증자’를 갖고 있어 개선되어 가며 성장하는 준경험과학이라고 말한다. 또한 증명과정을 원시적 추측→증명→반례에 의한 반박→증명분석→추측의 개선과 새로운 개념의 출현의 순서로 보았다(우정호, 1998). Lakatos가 주장하는 증명의 본질은 사고실험이라는 것과 증명절차는 추측을 부분추측으로 분해하여 그것을 이미 알고 있는 것과 연결시키는 과정이다. 사고실험은 머리 속에서 어떤 대상들을 다루면서 사고 활동의 결과를 관찰한다는 것을 의미한다. 따라서 사고 실험을 통한 증명의 재검토 과정에서 반례에 의해 증명과 추측을 반박하고 개선함으로써 새로운 개념을 발견할 수 있다는 점에서 증명이 발견의 수단임을 시사한다고 말할 수 있다. 한편 증명이 추측을 부분 추측 또는 보조정리로 분해하여 그것을 가능한 한 멀리 떨어져 있는 지식체에 포함시키는 관점은 분석적 사고방식으로서의 증명의 측면을 강조한 것임을 알 수 있다. 그러나 Lakatos가 주장하는 증명과정을 그대로 따르는 것은 오히려 인위적인 학습 상황을 강제로 부과할 위험이 있으며, 형식적 증명을 배제해야 한다는 식으로 해석하는 것은 바람직하지 않다. 형식적 증명은 정당화를 위한 유용한 수단으로 오랫동안 인정 받아왔으며, 새로운 결과의 개연성에 대한 근거와 참인 이유를 제공한다는 보다 넓은 의미에서 연역적 증명을 해석할 필요가 있다(조완영, 2000). 따라서 Lakatos가 강조하는 발견의 맥락과 절대주의에서 강조하는 정당화의 맥락을 통합함으로써 증명 교육을 보완할 방안을 탐색할 필요가 있다(나귀수, 1998).

사회적 구성주의에서는 수학적 지식과 개념은 발달하고 변화한다는 오류주의자의 인식론과 수학적 지식의 정당화보다는 발생과정을 중시하는 준경험주의에 초점을 두고 있다. 수학적 지식의 기초는 언어적 지식, 관습, 규칙이고, 언어는 사회적 구성물이라는 것, 개인의 주관적인 수학적 지식을 공표 후에 공인된 객관적 수학적 지식으로 변하도록 하는데 사회적인 상호작용 과정이 필요하다는 것 그리고 객관성은 사회적인 것으로 이해된다는 것에 근거하여 수학적 지식은 사회적 구성물로 받아들여진다(서동엽, 1999). 사회적 구성주의는 절대주의적 관점에서 주장하는 형식 논리로서의 한계를 지적하면서, 형식적인 명제와 증명이 우리가 실제적으로 관심을 두고 있는 비형식적인 개념에 얼마나 의미 있는가에 관심을 두고 있다(조완영, 2000). 이러한 관점에서 증명은 확신의 수단이자 이해의 수단으로 파악되고 있으므로 수학 교실에서 증명의 목적은 학생들의 이해를 증진시키는 설명이라고 할 수 있다. 하지만 오로지 학생들의 구성활동만 강조하고 교사의 역할을 무시해서는 안 되며, 사회적 합의를 지나치게 강조함으로써 수학적 지식 본연의 성질을 무시하는 것은 바람직하지 않다. 또한 지적 성숙도가 미숙한 학생들에게 수학이 사회적으로 합의된 지식이라는 관점을 갖도록 하는 것에 대해 숙고할 필요가 있다. 따라서 사회적 구성주의로부터 이끌어낼 수 있는 교육적 시사점은 증명을 통해 학생들에게 정리가 왜 참인가에 대한 통찰을 제공함으로써 정리를 이해하고 확신하도록 지도해야 하며, 학생들의 주관적 지식과 사회적 상호작용을 교수·학습에서 보다 적극적으로 활용하여 교사와 학생, 학생들 간의 활발한 상호작용이 이루어질 수 있도록 수업상황을 설계할 필요가 있다는 것이다(나귀수, 1998).

수리철학적 관점을 종합해 보면 발견을 통해 추측을 형성하며 그 이후에 그 추측이 참이면 정당화 과정을 통해 그 추측의 결과를 다른 사람에게 설득시키는 사회적 활동이 일어난다. 즉 증명의 타당성은 정리가 참임을 설득시키고, 참인 이유를 개념들로 관련지어 일관성 있게 설명하는데 있는 것이다. 그리고 증명은 결론으로부터 나아가는 분석적 사고방식과 가정으로부터 나아가는 종합적 방식이 통합된 사고과정이므로 증명의 다양한 측면을 학교수학에도 적절히 반영시켜야 할 것이다(유소영, 2005).

### B. 증명의 역할

증명은 한 가지로 정의되는 것이 아니라 복합적 다면적인 의미로 파악되므로 증명의 다양한 측면을 학교수학에서도 적절히 반영하기 위해서는 증명의 역할에 대해 알아 볼 필요가 있다.

De Villers는 Bell이 제시한 증명의 세 가지 역할이외에 발견과 의사소통의 역할을 추가하여 5가지를 들고 있다(류성림, 1998).

첫째, 증명의 역할은 '입증'이다. 입증이라는 말은 '수학적인 진술의 정확성을 입증(확신 또는 정당화)하는 것'으로 사용하고 있다. 여기서 정확성은 논리적 필연성에 따라 지도해야 한다는 것을 강조한 것으로 해석할 수 있다. 입증의 고찰 대상은 어떤 상황에 있어서 그 상황에 설정되어 있는 조건과 그 상황에서 실제로 일어나고 있는 결론과의 관계의 적절성이라고 할 수 있다. 따라서 입증이란 '결론에 대해 가정이 필요함을 나타내는 것, 또는 그러한 가정 하에서는 이러한 결론이 반드시 일어

난다는 사실을 보이는 것'으로 볼 수 있다.

둘째, '왜 그것이 참인가에 대한 통찰을 얻을 수 있는 설명'으로 '설명'의 역할을 말하고 있다. 설명을 통해 어떤 가정 하에서 어떤 결과가 일어난다는 사실을 분명하게 할 수 있으며, 이것은 자신은 물론 다른 사람에게도 분명하게 말하여 설득할 수 있기 때문에 '납득 또는 설득'이라고 할 수 있다.

셋째, '여러 가지 결과를 공리나 정의, 정리로부터 이루어지는 연역적인 체계를 확립하는 것'으로 '체계화'의 역할을 말하고 있다. 이는 Bell이 제시한 체계화의 의미와 같은 뜻으로 사용된다.

넷째, '새로운 결과를 발견이나 발명하는 것'으로 '발견'의 역할을 진술하고 있다. 발견의 역할은 준경험주의 수리철학의 증명에 대한 관점과 일치한다(조완영, 2000). 입증은 실제로 조건과 결론과의 관계를 고찰하기 때문에 주어진 조건에 대해 '조건은 이것으로 충분한가, 다른 조건으로 바꿀 수는 없을까, 결론을 바꾸기 위해 조건을 바꿀 수는 없을까' 등의 문제도 제기할 수 있다. 이것은 조건과 결론의 새로운 관계를 확립하거나 진술된 명제와 그에 따르는 생각과의 새로운 관계를 만드는 것이라 할 수 있다(유소영, 2005).

다섯째, '수학적인 지식을 전달하는 것'으로 '의사소통'의 역할을 제시하였다. 의사소통의 범위를 수학자들 사이, 교사와 학생 사이, 학생들 사이에서 일어나는 것으로 보았으며, 전달 자체의 목적보다는 전달을 전제로 이루어지는 설명이나 논쟁을 받아들이는 기준을 습득하는 데 목적이 있다(조완영, 2000).

이러한 증명의 다양한 역할들은 학교수학에서 제대로 반영되어 있지 않다. 조완영(2000)은 실제 증명에 관련된 내용이나 증명지도는 증명의 연역적 정당화 역할을 강조하는 경우가 대부분이고 교사와 학생 모두 증명을 왜 하는지도 모른 채 증명활동을 소홀히 다루고 있다고 한다. 따라서 이러한 증명의 역할들을 충분히 검토한 후에 교사와 학생 모두 증명활동의 필요성을 깨닫고 증명활동에 적극적으로 참여할 수 있도록 증명의 다양한 역할을 교실 수업에 적용하여 증명수업의 질적 개선이 이루어져야 할 것이다.

## Ⅲ. 연구방법 및 절차

본 연구는 중학교 2학년 8-나 단계 도형의 성질 단원에서 증명보조카드(PAC)를 사용하여 증명 지도한 뒤 학생들의 증명능력과 수학적 태도 변화를 알아보는 것을 그 목적으로 하고 있다. 이 연구 목적을 달성하기 위해 다음과 같은 방법에 따라 본 연구를 실시하였다.

### A. 연구 대상

#### 1. 학교 배경

본 연구자는 대구광역시 달서구에 위치한 D중학교에 재직 중인 경력이 4년차인 수학교사이다. D중학교의 전체교사 수는 71명이며 그 중 수학교사는 9명, 2학년 교과담당 수학교사는 3명이다. 전체

학급 수는 42개이고, 전체 학생 수는 남녀 합하여 1609명이다. 본교 2학년은 14개의 반으로 편성되어 있으며 전체 2학년 학생 수는 525명이다. 본 연구자는 2학년 14개의 반 중 5개의 반을 맡고 있으며 각 반 학생 수는 약 37~38명이다. 연구자가 재직하고 있는 D중학교는 달서구에 위치한 주변의 학교에 비하여 학업성취도평가시험에서 매년 상위권에 속하고, 학부모의 학력이나 경제적 능력이 높은 편이며 학부모의 교육열도 높은 편이다.

<표III-1> D중학교 2학년 현황

| 학년 | 반 | 전체 재적수 | 반 재적수 | 수학교사 |
|---|---|---|---|---|
| 2학년 | 14 개 | 525 명 | 37~38 명 | 3 명 |

2. 연구대상 학급 및 학생선정 절차

본 연구자가 담당하고 있는 중학교 2학년 가, 나, 다, 라, 마 5개의 반 학생들을 대상으로 PAC를 이용한 증명 수업을 3차례 실시하였다. PAC를 이용한 증명수업상황에서 학습태도가 좋고 수업에 참여하는 의욕이 높으며, 학반 분위기가 좋은 '라'반을 선택하여 집중적으로 PAC를 이용한 수업을 실시하였다. 이 반의 학생 중에서 상, 중, 하로 구분하여 각 그룹의 평균에 가깝고, 자신의 생각을 잘 표현할 수 있는 남녀 학생 2명씩 선정하여 총 6명을 연구대상으로 확정하였다. 그런데 2학기에 전학을 온 상 성적의 여학생 한 명이 개인적으로 참가할 의사를 밝혀 연구대상에 포함하게 되었다. 따라서 최종 7명을 연구대상 학생으로 확정하였다.

B. 연구방법

본 연구는 10월부터 12월까지 수학 8-나 도형단원에 관하여 <표III-2>과 같이 5차시동안 5개의 반 학생들을 대상으로 학습지를 이용하여 수업을 하였다. 처음 1, 2차시 수업은 PAC를 배열하여 증명하는 방법이 익숙해질 수 있도록 연구자가 증명하는 방법을 보여주는 시범 형식에서 점차적으로 학생 스스로 참여할 수 있도록 계획하였다. 3차시 수업부터는 학생 스스로 할 수 있는 시간을 주고 자신의 증명과정을 발표하는 시간을 가졌다. 4차시 수업부터는 5개의 반 중에서 학급 구성원들의 학습 참여태도와 학교 시험성적을 고려하여 1개의 반을 선정하였다. 선정된 이 반에서는 수준별로 구성된 이질화된 모둠을 구성하였고, 모둠구성원들의 협력학습을 통해 명제를 증명하는 과정을 거친 뒤 증명과정이 다른 모둠의 발표를 통해 서로의 증명과정의 공통점과 차이점을 비교하면서 분석해보는 수업을 하였다. 전체 수업과정과 모둠별 협동학습 과정을 녹음장치인 mp3로 녹음하여 녹취록을 작성하였고 이를 통해 교수-학습 상황을 분석하여 다음 학습지 작성에 참고하였다. 12월에 상, 중, 하로 구분하여 2~3명씩 선정된 학생 개개인 별로 PAC를 이용한 증명활동 학습지를 작성하도록 하였다. 이 과정의 활동에서는 PAC를 먼저 제시하지 않았고, PAC없이 증명활동을 하게 한 후 PAC를 요청하는 학생에게만 카드를 제시해 주었다.

<표Ⅲ-2> 5차시 수업내용

| 차시 | 소단원 | PAC를 이용한 증명 수업내용 |
|---|---|---|
| 1 | 1. 삼각형의 성질<br>1. 명제와 정리 | • 선분 $\overline{AB}$의 수직이등분선 $l$위의 한 점 $P$는 두 점 $A$, $B$로부터 같은 거리에 있다. |
| 2 | 1. 삼각형의 성질<br>1.명제와 정리 | • 삼각형의 세 내각의 합은 180° 이다. |
| 3 | 1. 삼각형의 성질<br>2. 이등변삼각형의 성질 | • 이등변 삼각형의 두 밑각의 크기는 같다. |
| 4 | 2. 사각형의 성질<br>1. 평행사변형 | • 평행사변형 $ABCD$의 대각선 $\overline{BD}$위에 두 점 $E$, $F$를 $\overline{BE}=\overline{DF}$ 가 되게 잡으면, □$AECF$는 평행사변형이다.<br>• 평행사변형 $ABCD$ 에서 변 $AD$, $BC$위에 각각 점 $E$, $F$를 $\angle AFB=\angle CED$가 되게 잡으면, □$AFCE$는 평행사변형이다. |
| 5 | 2. 사각형의 성질<br>1. 평행사변형 | • 평행사변형 $ABCD$의 변 $BC$의 중점을 $M$이라 하고, $\overline{AM}$의 연장선과 $\overline{DC}$의 연장선의 교점을 $E$라 하면, □$ABEC$는 평행사변형이다. |

C. 증명활동 학습지 및 PAC

학습지는 명제, 명제를 그림으로 나타내기, 명제를 가정과 결론으로 나누기, PAC를 배열해본 후 연결하여 붙이기, PAC를 배열한 이유 적기, 종합하여 증명하기 등 6가지 영역으로 나누어 구성하였다. 학습지 양식은 <표Ⅲ-3>과 같다.

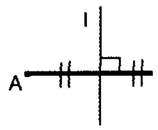
<표Ⅲ-3> 학습지 양식

| 1 명제 : | | | |
|---|---|---|---|
| 2 알맞은 그림과 기호 | | 3 가정 결론 적기 | 가정 :<br>결론 : |
| 4 PAC 카드 배열 | PAC 연결하기 | 연결한 이유 | |
| | | | |
| 5 증명 | PAC 배열하기 전 | PAC 배열 후 | |
| | | | |

증명할 명제의 내용은 접하지 않은 명제를 도입하는 것보다 교과서에 있는 친숙한 명제를 도입하는 것이 PAC에 대한 거부감을 줄일 수 있고, 학습 부담을 줄일 수 있기 때문에 D중학교에서 사용하고 있는 수학 교과서 '두산 출판사 수학8-나'의 내용들을 참고하였다.

PAC는 주어진 명제를 증명하기에 필요한 선수학습 내용이나 증명에 필요한 모든 정리, 개념, 원리 등을 직사각형 모양으로 만들었다. 단순히 카드 내용을 연결하는 것 이상의 사고과정을 유도하기 위해 카드의 내용은 모든 내용이 제시되어 있지 않도록 내용 안에 빈 괄호를 삽입하여 만들었다. 또한 여러 카드 중에서 연상되는 카드를 선택할 수 있도록 다양하게 작성하였다. 예를 들면 '선분 $\overline{AB}$의 수직이등분선 $l$위의 한 점 $P$는 두 점 $A$, $B$로부터 같은 거리에 있다.'와 관련한 연상 카드를 <표Ⅲ-4>와 같이 만들었다. 증명을 할 때 주어진 PAC 외에 필요한 카드가 있다고 생각되는 학생들에게는 다른 카드를 만들어 보게 하였다.

<표Ⅲ-4> PAC의 예

| | |
|---|---|
| ① 직선 $l$: 선분 $\overline{AB}$의 수직이등분선<br>(주어진 선분의 중점에서 그 선분에<br><br>수직인 선 ) | ② 직선 $l$ 위의 한 점 $P$는 두 점<br>$A$, $B$로부터 같은 거리에 있다. |
| ③ 두 삼각형의 대응하는 세 (   )의<br>길이가 같으면 두 삼각형은 합동<br>이다. (   합동) | ④ 두 삼각형의 대응하는 두 변의 길이가<br>같고, 그 (   )의 크기가 같으면<br>두 삼각형은 합동이다. (   합동) |
| ⑤ 두 삼각형의 대응하는 한 변의 길이가<br>같고, 그 양 (   )의 크기가 각각 같을<br>때 합동이다 .(   합동) | ⑥ 두 삼각형이 합동이면 대응하는<br>각이 같다. |
| ⑦ 두 개의 도형이 운동에 의해 완전히<br>포개질 경우 이를 (   )이라 한다. | ⑧ 두 삼각형이 (   )이면<br>대응하는 변의 길이가 같다. |

3. 인터뷰 방법

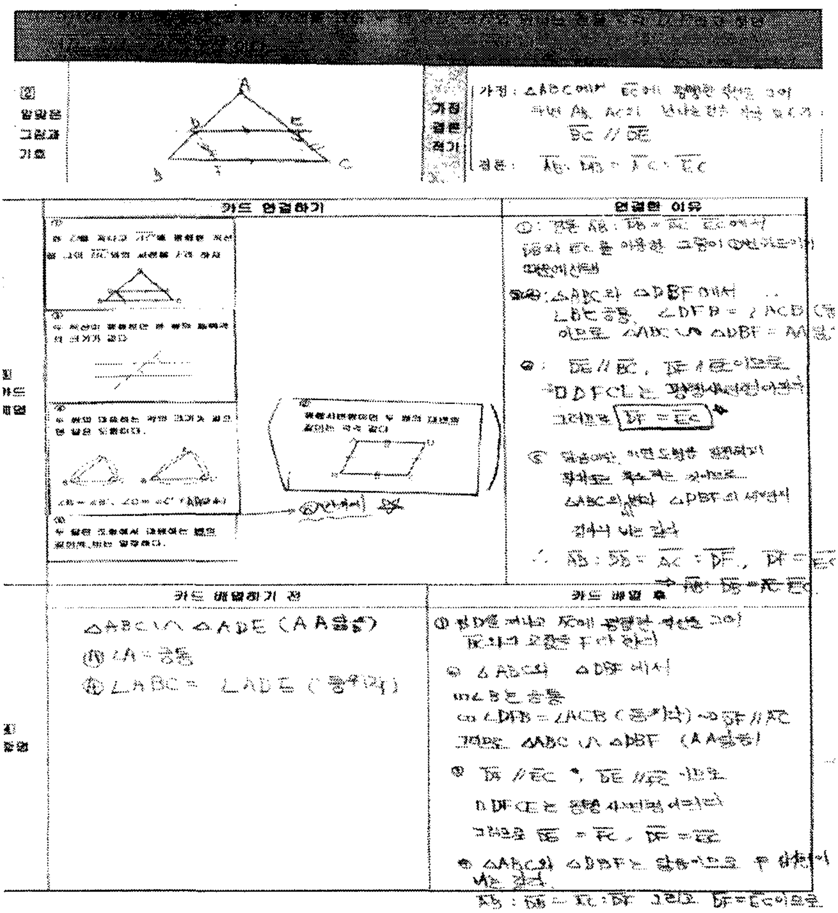
상, 중, 하로 구성된 수준별 학생 7명을 대상으로 방과 후 조용하고 열린 분위기에서 이야기 형식으로 25~30분정도 인터뷰하였다. 인터뷰는 2차례 실시하였고, 장소는 연구자가 담당하고 있는 일반 교실의 반 크기인 특별실(정보실)에서 이루어졌다. 수학에 대한 자신의 생각, 증명에 대한 생각, 느낌, PAC를 사용한 증명활동 후 증명에 대한 생각의 변화, 증명활동에서 PAC에 대한 자신의 생각, 증명수업에서 교사에게 원하는 요소 등에 관하여 자유롭게 문답 형태로 인터뷰하였다. 정확한 음성

을 녹음하기 위해 연구 대상자 옆에 mp3를 의식하지 않는 장소에 올려두고 녹음하였고, 녹음한 문답 내용에 대해 녹취록을 작성하였다.

# Ⅳ. 연구의 결과 및 분석

## A. 연구문제1 : “학생들의 기하증명 능력”에 대한 결과 및 분석

### 1. 학생A의 기하증명 능력변화



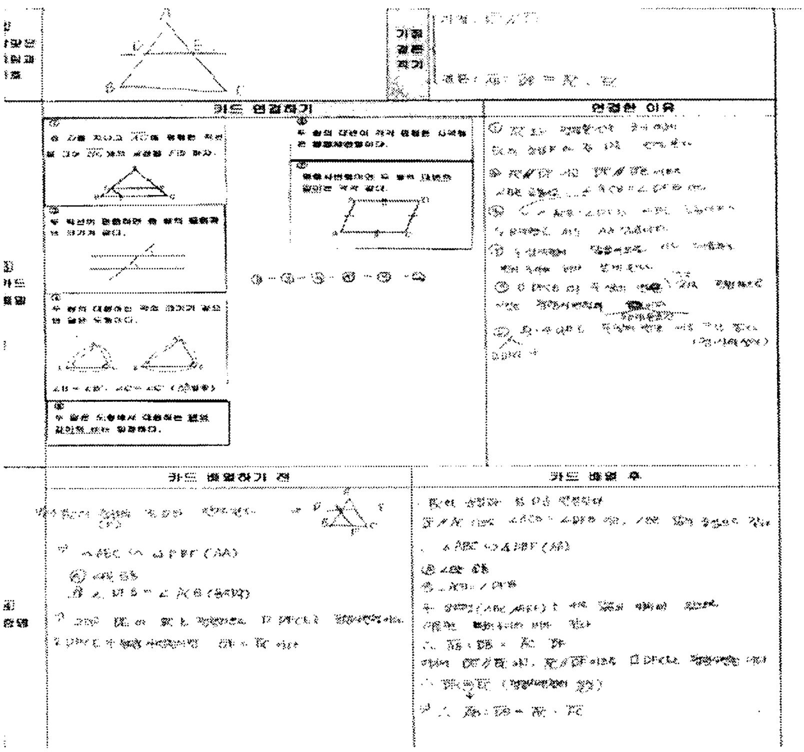

<그림Ⅳ-1> 학생A의 학습지

학생A는 명제에 알맞은 그림과 기호를 그렸고, 명제를 가정과 결론으로 정확히 나누었다. 하지만 증명을 하는 방법에 대해 오랫동안 생각을 하다가 본 연구자에게 PAC를 요청하였다. PAC를 받은

뒤 카드를 선택해서 배열하기까지 5분정도의 시간이 지나자 9장의 카드 중에서 5장의 카드를 선택하여 ①→③→④→②→⑧순으로 PAC를 연결하여 붙였다. A학생의 PAC를 연결한 이유를 살펴보면 결론을 이용한 그림과 연관하여 ①번 카드, 삼각형의 닮음을 보여줄 조건으로 ③, ④번 카드, 평행사변형의 성질을 이용하기 위해 ②번 카드, 닮은 도형의 성질을 이용하여 결론을 유도하기 위해 ⑧카드를 선택했다는 것을 알 수 있다. PAC 순서에 맞추어 논리적으로 서술하였고, 학습지에 나타난 A학생의 증명부분은 카드를 배열한 이유와 동일한 순서로 체계적으로 정리하여 표현되어져 있다.

A학생은 명제를 증명하는 방법에 대해 어려움을 가졌었지만 혼자서 생각하지 못했던 보조선의 이용을 ①카드를 통해 알게 되어 증명이 쉬웠다고 말하였다. 또한 PAC를 배열하는 과정을 통해 증명을 전개해 나가는 방향을 찾을 수 있었고, 증명과정을 설명하기도 쉬웠다고 말하였다(학생A 인터뷰, 2005. 12. 14).

2. 학생D의 기하증명 능력변화



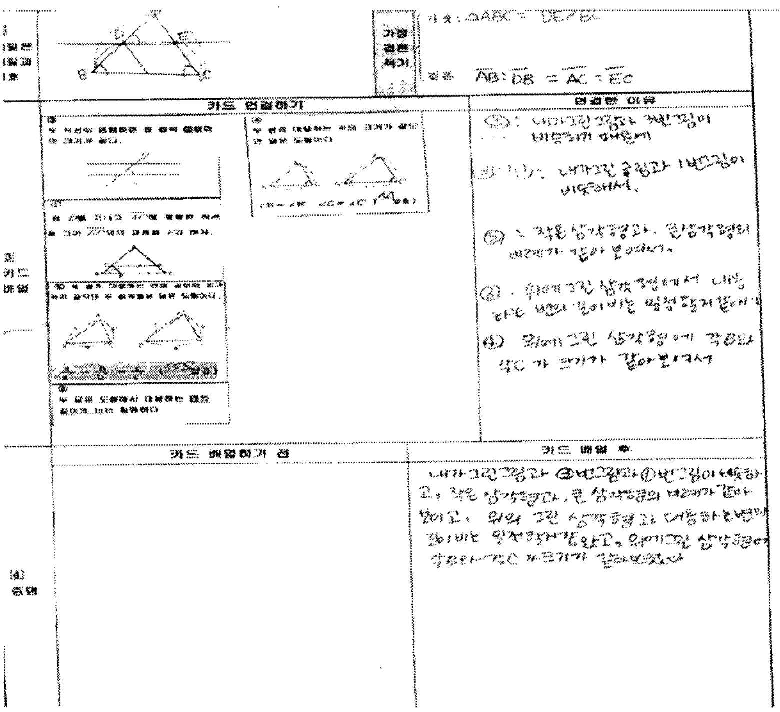

<그림Ⅳ-2> 학생D의 학습지

학생D는 명제를 그림과 기호로 나타내고, 가정과 결론으로 나누는 활동을 통해 명제의 의미를 정확하게 이해하고 있었다. PAC가 제시되지 않은 상황에서 삼각형의 닮음과 평행사변형의 성질이 증

명에 이용되는 것을 찾아냈지만 길이의 비가 성립한다는 결론까지 도달하지 못하였다. 그래서 학생D는 PAC를 요청하였고, PAC를 받은 후 ①→③→④→⑧→⑨→②순으로 PAC를 배열하였다. 연결이유를 살펴보면 보조선을 이용하기 위해 ①번 카드를 선택하였고, 두 도형의 닮음을 증명하기 위해 ③, ④번 카드, 두 도형의 닮음의 성질을 이용하기 위해 ⑧번 카드, 평행사변형이 될 조건으로 ⑨번 카드, 평행사변형의 성질을 이용하기 위해 ②카드를 연결하였다는 것을 알 수 있다. 이를 통해 학생D는 PAC사이의 연결 관계를 생각해보면서 결론까지 논리적으로 정확하게 추론하였다는 것을 알 수 있다.

학생D는 PAC를 배열만 잘 하면 증명을 하기 쉽지만, PAC가 없이 명제만 주어지면 증명하기 힘들다고 말하였다. 또한 명제를 보면서 생각했던 내용들이 PAC안에 있으면 자신의 증명에 대한 확신이 생기고, 연결한 이유를 적는 과정이 번거롭긴 하지만 순서대로 적힌 이유를 보면 증명과정을 기억하기가 훨씬 수월하다고 말하였다(학생D의 인터뷰, 2005. 12. 19).

### 3. 학생G의 기하증명 능력변화



<그림Ⅳ-3> 학생G의 학습지

학생G는 명제를 그림으로 나타내는 과정과 가정, 결론으로 나누는 과정을 전혀 알지 못하였기 때문에 학습지의 이 부분에 대해서는 연구자와 함께 작성하였다. 학생G는 더 생각해 볼 겨를도 없이

바로 연구자에게 PAC를 요청하였다. 초등학교 때부터 누적된 수학지식이 없었기 때문에 PAC의 내용을 읽어보았지만 PAC가 크게 도움이 되지 못하는 것 같았다. 하지만 PAC를 여러 번 읽어 본 뒤에 자신의 논리에 맞는 카드 5장을 선택하였고 ③→①→⑤→⑧→④순으로 카드를 배열하여 붙였다. 학습지에 적은 연결한 이유를 살펴보면 알맞은 그림과 기호 영역에 그린 그림과 시각적으로 연관되어 보이는 카드를 선택하였다. PAC사이의 논리적 연계성 없이 직관적으로 선택하여 PAC를 배열하였기 때문에 올바르게 증명을 하지 못했다. 하지만 PAC를 배열하기 전에는 사고하는 자체를 전혀 하지 않고 "모르겠어요."라는 말만 반복했었다. 그러나 PAC를 배열한 후에는 조금씩 생각하면서 자신의 직관에 따라 명제를 증명하려고 노력하였고, 자신이 왜 그렇게 학습지를 작성하였는지에 대해 설명할 수 있었다.

B. 연구문제2 : "기하증명에 대한 학생들의 수학적 태도"에 대한 결과 및 분석

1. 학생A의 수학적 태도변화

학생A는 수학을 좋아하는 편이지만 수학 시험 점수의 부담감으로 수학에 대해 실증을 느끼고 있었다. 2학년 2학기 도형단원의 증명부분에 대해서는 자신이 풀 수 있는 증명문제에서만 흥미를 느끼고 있었다. 하지만 모르는 문제에서 새로운 것을 스스로 발견하게 되면 문제해결에 대한 성취감과 희열을 느끼는 것 같았다. 이번 학습지 작성에서도 $\overline{DF}=\overline{EC}$인 조건을 발견하게 되면서 $\square DFCE$가 평행사변형이 될 수 있다는 사실을 찾아냈을 때, "아~ 재미있다."라는 말을 하면서 증명에 대한 흥미를 나타냈었다.

학생A는 PAC를 사용하여 증명하는 과정에 대해서는 크게 부담감을 가지지 않았다. PAC를 통해 증명방향을 찾을 수 있을 뿐만 아니라 새로운 사실을 발견하고, 스스로 문제를 해결할 수 있는 능력을 향상시켜준다는 의미에서 일반적인 증명활동보다 PAC를 사용한 증명활동을 선호하였다.

2. 학생D의 수학적 태도변화

학생D는 수학을 계산하는 산술적인 측면에서 좋아한다. 학습은 자기가 꼭 해야 된다는 마음가짐에 따라 달라진다고 여기고 있기 때문에 증명과정의 어려움도 자기 자신의 마음가짐에 따라 달라질 수 있다고 여겼다. PAC안에는 명제의 증명에 필요한 내용들이 있기 때문에 학습에 도움이 된다는 점에서는 좋지만 PAC의 선택과정에서 어려움을 호소하였다. 또한 스스로 생각한 명제 증명 방향을 포함하고 있는 PAC를 발견하면 자신의 생각에 대한 확신이 생기고, 쉽게 증명을 할 수 있다는 점에서 PAC를 이용한 기하증명 활동에 대해 긍정적으로 생각하였다.

### 3. 학생G의 수학적 태도변화

학생G는 초등학교 6학년 때부터 무용을 시작해서 수학 공부를 하지 못하였다. 밝고 명랑한 성격이지만 수학시간만 되면 말 수가 줄어들고 수업에 집중하는 시간이 적으며 대부분의 시간을 그림 그리거나 잠을 자는 편이다. 수학을 특별히 싫어하는 것은 아니지만 무용을 하면서 수학 공부가 많이 뒤쳐졌다는 생각에 수학시간에 어떤 노력도 하지 않는 것을 관찰 할 수 있었다.

학생G는 정확한 수학 용어, 기호의 의미를 잘 모르기 때문에 증명활동에서 어려움을 많이 느끼고 쉽게 포기하는 편이다. PAC안의 내용들을 읽어보고 자기 스스로 배열하는 과정을 경험하면서 아무것도 적을 것이 없던 학습지에 PAC를 통해 적을 수 있는 내용을 발견할 수 있어서 문제해결의 실마리를 스스로 찾을 수 있다는 성취감과 자신감을 가지는 것 같았다.

## V. 결론 및 제언

본 연구는 중학교 2학년 기하증명에서 PAC로 제시하는 방법을 지도함으로써 기하증명 능력 변화와 기하 증명에 대한 학생들의 수학적 태도 변화를 알아보는데 그 목적이 있다. 이를 위해 먼저 증명의 본질과 역할을 살펴보았고 증명지도에 과한 선행연구를 검토하였다. 이를 토대로 D중학교 2학년 5개 반을 대상으로 PAC를 이용한 수업을 5차시 실시한 뒤에 상, 중, 하 학생 7명을 선정하여 7명 학생들의 학습지와 인터뷰 내용을 분석하여 기하 증명 능력과 기하증명에 대한 수학적 태도 변화를 알아보았다. 본 연구의 연구문제에 따른 결론을 정리하면 다음과 같다.

### 1. 연구문제1 : 학생들의 기하증명 능력의 변화

PAC가 주어지지 않은 상태에서 상 집단 학생들은 혼자 힘으로 주어진 명제에 대해 증명을 하려고 노력하였지만 학생들의 수준이 낮아질수록 활동의 참여 정도가 낮았다. 또한 자신의 추론에 대한 확신과 자신감을 가지지 못했고 , PAC가 주어진 상태에서도 명제에 적합한 카드를 선택하는 정확성이 떨어졌다. PAC를 선택하고 배열한 이유와 증명과정을 논리적·체계적으로 서술하는 정도에 있어서도 수준별로 차이가 나타났다.

하지만 학생들의 수학수준과는 상관없이 PAC의 순서를 바꾸어 배열하는 과정과 연결한 이유를 적는 활동을 통해서 증명하고자 하는 명제의 필요한 개념, 원리, 정리들 사이의 관계를 스스로 살펴보고 분석하였고, 이런 과정을 통해 증명과정과 명제를 오래 기억하였다. 또한 PAC안에 보조선의 이용과 같이 증명에 힌트가 되는 내용들이 들어있어서 좀 더 쉽게 증명활동에 접근할 수 있었고, PAC가 없을 때보다는 증명활동이 활발하게 이루어졌다. 그리고 PAC없이 증명을 하는 경우보다 좀 더 논리적으로 PAC안에 들어 있는 내용들을 이용하여 스스로 타당하다고 생각되는 내용들을 체계적으로 서술하였다.

2. 연구문제2 : 학생들의 수학적 태도 변화

7명의 학생들은 특별히 수학을 좋아하거나 싫어하지 않았지만 중학교 2학년 기하증명 내용을 대부분 어려워하였다. 증명활동에서 PAC를 사용하고 난 후에는 상 집단 학생들은 새로운 내용을 알 수 있고, 스스로 증명방향을 찾을 수 있기 때문에 긍정적으로 생각하였다. 중·하 집단 학생들은 상 집단 학생들에 비해 연상되는 카드를 선택하고 배열하는 과정을 조금 어려워하였다. 하 집단 학생들은 직관적으로 관련성을 찾아서 PAC를 연결하였고, 기초적인 수학지식이 없기 때문에 전혀 증명활동에 참여할 수 없었다. 그러나 PAC를 통해 정확하게 명제 증명과정을 이해하지는 못했지만 증명활동에 스스로 참여할 수 있는 계기가 된다는 점에서 긍정적으로 생각하였다.

PAC를 통해 좀 더 쉽게 증명활동에 참여할 수 있다는 점에서 PAC를 이용한 증명을 선호하였고, PAC를 이용한 증명지도 수업이 교사가 증명과정을 일방적으로 설명하는 것과는 다른 증명방법이라는 점에서 학생들의 학습동기와 흥미가 유발되었다. 그리고 수준별 7명의 학생들은 증명 수업시간에 스스로 활동하는 과정이 많았기 때문에 학생들은 적극적인 자세로 활발하게 증명활동에 참여하였다. 또한 각 수준별 학생들은 어렵게만 느껴지던 증명을 스스로 해결하였다는 성취감과 증명을 할 수 있다는 자신감을 가졌다.

PAC를 이용한 증명지도를 통해 학생들의 기하증명 능력과 태도에 미치는 영향을 알아보는 것을 목적으로 하고 수행된 본 연구의 결과로부터 제언은 다음과 같다.

첫째, 본 연구는 중학교 2학년을 대상으로 도형 성질과 닮음 단원을 중심으로 자료를 수집하고 분석하였으므로 본 연구의 결과는 중학교 2학년 도형단원에 한정된다고 할 수 있다. 따라서 후속 연구에서는 대상자와 단원 설정에 있어 다양성을 고려하여 연구의 일반성을 높일 필요가 있다고 본다.

둘째. 본 연구에 사용된 PAC는 교과서에 있는 명제 중심으로 만들어졌기 때문에 다양한 증명내용을 포함하고 있지 않다. 그러므로 학생들이 보다 폭 넓은 사고를 할 수 있도록 교과서 이외의 명제나 명제를 증명하는 방법에 있어서 다양한 방법을 제공하는 증명지도 연구가 필요하다고 본다.

셋째, 본 연구의 결과는 약 3개월 정도로 짧은 시간 동안 PAC를 이용한 증명지도 수업을 한 후 학습지와 인터뷰한 내용을 분석한 것이기 때문에 학생들의 증명능력 변화와 태도 변화를 구체적으로 관찰하는 데 어려움이 많았다. 좀 더 심층적이고 구체적인 연구 결과를 얻기 위해서 장기적인 질적 연구가 이루어질 필요가 있으며 이러한 증명지도의 방법에 따른 학생들의 증명능력 향상에 대한 양적연구에 의한 확인도 필요하다고 본다.

마지막으로, 본 연구는 학교현장의 수업 여건으로 인해 구체적인 조작활동을 통한 도형의 성질탐구 과정의 비중을 낮추고, 교사가 미리 제작한 카드 중에서 연상되는 카드를 배열하여 탐구하는 시간에 많은 비중을 두어 수업을 진행하였다. 따라서 GSP, 그래픽 계산기 등을 이용하여 구체적인 조작활동을 통해 도형의 정의와 성질을 탐구하는 과정과 증명활동에 필요한 카드를 학생 스스로 만들어 제작할 수 있는 활동이 첨가된 증명지도방안에 대한 후속연구가 필요하다고 본다.

# 참 고 문 헌


강옥기 · 정순영 · 이환철 (2000). 중학교 수학 7-나 교사용 지도서. 두산.

교육부 (1999). 제 7차 중학교 교육과정 해설(III). 교육부 고시 제 1997-15호. 서울: 대한교과서주식회사.

김수연 (2001). 효과적인 기하증명지도 방안에 대한 연구. 숙명여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석-중학교 기하단원을 중심으로-. 서울대학교 박사학위논문.

류성림 (1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색. 한국교원대학교 박사학위논문.

박성은 (2003). 중등학교 수학 교과서에서의 기하증명에 관한 연구-8학년 중심으로-. 금오공과대학교 교육대학원 석사학위논문.

박은조 (2004). 수학교사들의 증명에 대한 인식 조사. 한국교원대학교 석사학위논문.

서동엽 (1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색-중학교 수학을 중심으로-. 서울대학교 박사학위논문.

신정희 (2005). 분석법을 활용한 8학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구. 충북대학교 교육대학원 석사학위논문.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

유소영 (2005). 중학교 기하영역의 분석-종합적 증명 방법을 위한 자료개발. 한국교원대학교 석사학위논문.

이수아 (2004). 중등수학의 증명에 대한 분석 및 지도. 경성대학교 교육대학원 석사학위논문.

이승희 (2005). 중학교 과정에서 분석법을 활용한 증명지도에 관한 연구. 충북대학교 교육대학원 석사학위논문.

조경 (2003). 중학교 수학의 기하 증명의 이해와 지도에 관한 연구. 서울시립대학교 교육대학원 석사학위논문.

전수진 (2005). 중 · 고등학생들에게 나타나는 정당화 유형 분석. 한국교원대학교 석사학위논문.

조완영 (2000). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구. 한국교원대학교 박사학위논문.

최윤자 (2003). 분석-종합적 증명방법이 중학생 기하증명의 이해에 미치는 영향 연구-분석적 사고활동이 안내된 학습지 이용-. 고려대학교 교육대학원 석사학위논문.

하승철 (2005). 중등학교 수학교육 과정에서 증명지도에 관한 연구. 한양대학교 교육대학원 석사학위논문.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The author.