韓國數學敎育學會
<全國數學敎育硏究大會 프로시딩>
제 37회. 2006. 10. 113-117

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 37th. Oct. 2006. 113-117

중등학교 수학교과서에 제시된 불변성의 개념에 대한 고찰

이 상 근 (경상대학교)
김 태 호 (경상사대부설고등학교)
정 기 영 (경남과학고등학교)
이 춘 구 (경남과학고등학교)

1. 서 론

우리나라 수학교육의 목표와 현대 수학교육의 동향을 살펴보면 수학적 사고력을 신장하는 수학교육, 문제해결력을 신장하는 수학교육 등을 매우 강조하고 있다. 그리고 수학과 교육과정 개정사항을 살펴보면 수학적 사고력과 문제 해결력을 강조하여 문제해결력을 개발시키기 위한 구체적인 방법을 '교수・학습 방법'란에 제시하도록 요구하고 있다. 그리하여 문제해결에서 다양한 문제 해결 방법이나 문제해결 전략과 전술을 강조하는 수학교육을 하고 있다.

특히 수학과목의 모든 교사용 지도서에는 다양한 교수・학습 방법과 문제해결력을 신장시키기 위한 교수・학습방법을 제시하고 있다. 여기에 제시된 문제 해결 전략으로 그림그리기, 예상과 확인, 표 만들기, 규칙성 찾기, 단순화하기, 식 세우기, 거꾸로 풀기, 논리적 추론, 반례 들기 등이 있다. 그러므로 본 연구에서는 위의 문제해결 전략들 중에서 규칙성 찾기와 강력한 연관이 있는 불변성의 원리를 이용한 문제해결 전략에 대해 그 의미를 알아보고, 불변성의 원리가 일반계 고등학교 수학 교과 내용을 중심으로 어떻게 사용되어졌고, 불변성의 원리가 문제 해결 전략으로서 어떤 의미를 가지는지를 살펴볼 것이다.

2. 불변성이란 ?

.... 중략 ....

3. 본론

.... 중략 ....

그러므로 본 연구에서는 중등 수학 교육에서 불변성을 이용한 문제 상황을 고찰해 보고 불변성의 원리의 가치를 탐구해보고자 한다. 특히 여기에서는 고등학교 수학 10-가. 나, 수학1 및 수학2 교과서에 제시된 수학적 개념과 문제들에 대해 불변성의 원리가 적용된 경우를 Harold Shapiro가 제시한

1) 불변량(invariant)과 같은 양적인 개념의 불변성을 활용한 경우,
2) 변환(transformations)을 통한 불변성의 원리를 활용한 경우,
3) 측도 구성(scaling)에 불변성의 원리를 활용한 경우,
4) 불가능성 증명들(impossibility proofs) 문제에 불변성의 원리를 활용한 경우,
5) 불변성의 원리를 이용하는 다른 예들,

등의 경우로 나누어 다루어 보고, 각 경우에 대해 '불변성의 원리를 어떻게 사용하고 있는가?' 또는 '어떻게 문제 해결에 활용할 수 있는가?' 하는 것을 고찰해 보고자 한다.

우선 불변성의 원리가 적용된 경우의 예를 간단히 살펴보면

1) 불변량(invariant)과 같은 양적인 개념의 불변성을 활용한 경우의 예로는 닮음도형의 닮음비, 일반각에서의 삼각비인 삼각함수의 정의, 함수의 주기성, 비례관계와 그 활용, 불변량이 있는 경우의 무리방정식의 해법, Gaussian paring, 패리티(parity) 등 아주 많은 경우의 예들을 살펴볼 수 있다.

2) 변환(transformations)을 통한 불변성의 원리를 활용한 예는 배색문제의 그래프 이론을 이용한 해석, 도형의 이동에 의한 도형의 표준화, 도형의 대칭성, 치환을 이용한 문제 해결 등의 경우가 있다.

3) 측도 구성(scaling)에 불변성의 원리를 활용한 경우의 예로는 벡터(vector)의 화살표를 이용한 표기 방식을 벡터의 성분 표시로 바꿀 수 있는 경우, 삼각함수에서 호도법을 이용한 각의 실수화 등의 경우가 있다.

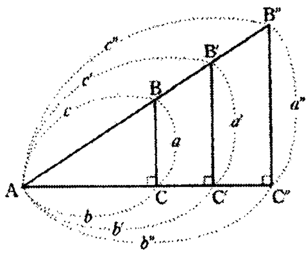
4) 불가능성 증명들(impossibility proofs) 문제에서 불변성의 원리를 활용한 경우의 예로는 작도 불가능성과 Galois 의 정리, Konigsberg의 다리 와 Euler의 회로 등의경우가 있다.

5)불변성의 원리를 이용하는 다른 예로는 나눗셈 정리를 이용한 식의 계산, 인수정리와 항등식의 성질을 이용한 식의 값 계산하기 등의 문제해결에서의 다양한 형태의 예들을 만날 수 있다.

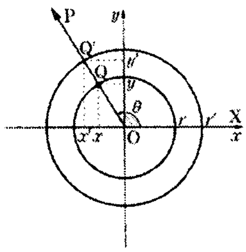
앞에서 제시한 불변성의 원리를 이용한 각 경우의 예들을 자세히 살펴보기로 하자.

첫째로 불변량(invariant)가 양적인 개념으로 존재하는 경우에 있어 살펴보기로 하자.

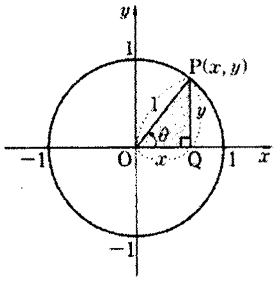
1) 닮음도형의 닮음비는 <그림 1>과 같이 닮음삼각형 ABC, A′B′C′ 및A″B″C″은 닮음비라는 일정한 불변량을 가지며, 일정한 닮음비가 대응하는 변의 길이 비이며, 닮음삼각형의 넓이의 비는 삼각형의 닮음비의 제곱비에 의해 계산할 수 있다. 이와 같이 닮음비라는 불변량을 가지는 도형들은 그들 도형 상호간의 공통적인 성질과 불변량에 따른 많은 성질들을 함께 가지고 있다. 이러한 성질들을 이용하는 것은 도형 관련 문제 해결에 아주 유익한 문제해결전략을 활용할 수 있을 것이다.



<그림 1>



<그림 2>



<그림 3>

2) 일반각에서의 삼각비인 삼각함수의 정의는 좌표평면상에서 동경상의 한 점 P에 대해 점P의 좌표와 선분OP의 길이를 이용하여 일반각에 대한 삼각함수를 정의한다. 그런데 이 정의는 길이에 대한 좌표의 비에서 좌표 개념에 길이 개념을 적용하면 삼각함수의 정의는 닮음삼각형의 닮음비는 일정하다는 성질을 이용하여 <그림 2>와 같이 중심이 원점이고 반지름이 r 인 원위의 점의 좌표와 반지름의 길이를 이용하여 삼각함수를 정의할 수 있고, 여기서 <그림 3>과 같이 반지름이 r 인 원 대신에 반지름의 길이가 1인 단위원상의 점의 좌표를 이용하여 삼각함수를 정의하여도 일반각에 대한 삼각함수의 값은 언제나 일정하다. 그러므로 삼각함수를 이용한 많은 문제들에서 삼각함수의 값은 정의를 이용하는 경우 보다 단위원에서 해결하는 경우가 훨씬 수월하고 문제 해결 전략으로도 가치가 높다. 이와 같이 할 수 있는 것이 닮음비라는 불변량이 존재하기 때문이다.

3) 함수의 주기성은 함수 $y=f(x)$ 가 임의의 실수 x 에 대해 $f(x+p)=f(x)$를 만족하는 최소의 양수 p 가 존재할 때, 이 함수 $y=f(x)$는 주기가 p인 주기함수라고 한다. 이와 같은 주기성을 갖는 함수의 그래프의 모양이나 성질은 한 주기에 해당하는 모양이 반복해서 나타나는 성질을 가지므로 함수의 그래프나 성질을 파악하는데 정의역 전체에 대해 살펴볼 필요 없이 한 주기 p 만큼만 알아보면 함수 $y=f(x)$의 정의역 전체에 대한 성질을 파악할 수 있다. 이것이 주기라는 불변량이 주는 문제해결전략에서의 가치이다.

4) 비례관계와 그 활용의 예로 $2x=3y$일 때 $\dfrac{(x+y)(3x^2-2yx)}{x^2y}$의 값을 구하는 문제를 생각해 보자.

풀이.1) $y=\dfrac{2}{3}x$ 을 대입하여 계산하면

$$\frac{(x+y)(3x^2-2yx)}{x^2y}=\frac{(x+\frac{2}{3}x)(3x^2-2\frac{2}{3}xx)}{x^2\frac{2}{3}x}=\frac{\frac{25}{9}x^3}{\frac{2}{3}x^3}=\frac{\frac{25}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{25}{6}\quad\square$$

풀이.2) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=k$ (k는 비례상수)을 이용하면 $x=3k,\ \ y=2k$ 이므로

$$\frac{(x+y)(3x^2-2yx)}{x^2y}=\frac{(3k+2k)(3\times9k^2-2\times2k\times3k)}{9k^2\times2k}=\frac{25}{6}\quad\square$$

풀이.1)에서는 식의 변형을 이용하여 y를 x에 관한 식으로 직접 나타내어 복잡한 번분수식을 계산을 하였으나, 풀이.2)에서는 x와 y를 비례상수 k 라는 불변량을 사용하여 k 대한 매개변수로 나타내어 풀이.1)보다 쉽게 식의 값을 계산하였다. 이와 같은 문제 상황에서 문자의 개수가 많아지거나 더 복잡하고 항이 많은 식의 값이라면 풀이.2)의 방법이 훨씬 효과적일 것이다.

5) 불변량이 있는 경우의 무리방정식의 해법의 예로는 다음의 방정식을 통하여 제시하고자 한다.

다음 무리방정식 $\sqrt{x+5}-\sqrt{2x-4}=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}$ 의 해를 구하는 과정은 대부분의 수학 II의 교재들은 위의 문제를 양변에 항을 2개씩 놓고 양변을 제곱하여 정리한 후 다시 양변을 제곱하는 방법으로 문제 해결에 접근한다.

그런데 여기서 주어진 방정식을 변형하면 $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-4}$ 이고 주어진 조건 하에서 양 변의 두 항의 제곱의 차가 각각 5로서 일정하므로 분자를 유리화 하면

$\dfrac{5}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}}=\dfrac{5}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-4}}$ 이고 약분하고 역수를 취한 후, 처음 주어진 식과 변변 더하면, $\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+1}$ 이고 따라서 $x+5=2x+1$ 에서 $x=4$ 를 구할 수 있다. 이 방법은 일반적인 방법보다 훨씬 간단하며, 양변을 제곱하지 않으므로 무연근 또한 생기지 않는다. 이와 같이 주어진 문제 상황에서 문제의 각 요소들 사이의 불변량을 찾아서 문제 해결에 적용하는 것은 매우 유익한 것이다.

6) Gaussian pairing 의 예로는, 여러 개의 수를 계산하는 과정에 어떤 특정한 규칙으로 두 수의 합이나 곱이 일정한 경우에는 가우스가 1 부터 n 까지의 합을 구하는데

$$2(1+2+\cdots+n)=(1+n)+(2+n-1)+\cdots+(n+1)=n\times(n+1)$$

임을 이용하여 계산한 것과 같은 방법으로 일정한 규칙을 갖는 쌍을 묶어서 계산을 용이하게 하는 방법을 Gaussian pairing이라 한다. 이제 이러한 Gaussian pairing을 이용하는 문제로서 다음의 문제를 생각해 보자.

문제) 함수 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$ 에 대하여 무한급수 $\sum_{k=1}^{100} f(\frac{k}{101})$ 의 값을 구하시오.

풀이) $$\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right)=\frac{4^{\frac{1}{101}}}{4^{\frac{1}{101}}+2}+\frac{4^{\frac{2}{101}}}{4^{\frac{2}{101}}+2}+\frac{4^{\frac{3}{101}}}{4^{\frac{3}{101}}+2}+\cdots+\frac{4^{\frac{100}{101}}}{4^{\frac{100}{101}}+2}+\frac{4^{\frac{101}{101}}}{4^{\frac{101}{101}}+2}$$

이다. 이것을 직접 계산한다는 것은 상당히 힘들 것이다. 그러나 함수 f 가 가지는 성질을 찾으면 위의 계산은 어렵지 않게 해낼 수 있을 것이다. 즉 임의의 실수 x 에 대해

$f(x)+f(1-x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4}{4+2\cdot 4^x}=\dfrac{4^x+2}{4^x+2}=1$이다. 이것

은 함수 $f(x)$는 정의역의 두 원소의 합이 1인 두 수의 함수값의 합은 언제나 1이라는 사실을 의미한다. 그러므로 주어진 식의 계산에서 앞의 사실을 적용할 수 있는 pairing만 구성하면 된다. 이와 같이 pairing의 구성은 실제식의 계산이 아니라 pairing을 통하여 얻은 간단한 식을 이용하여 계산을 편리하게 할 수 있으므로 불변성의 원리가 우리에게 제공하는 문제해결전략은 다른 어떤 전략보다도 뛰어나다고 할 수 있다. 즉

$$\sum_{k=1}^{100} f(\frac{k}{101}) = f(\frac{1}{101}) + f(\frac{2}{101}) + \cdots + f(\frac{101}{101})$$
$$= \left\{f(\frac{1}{101}) + f(\frac{100}{101})\right\} + \left\{f(\frac{2}{101}) + f(\frac{99}{101})\right\} + \cdots + \left\{f(\frac{50}{101}) + f(\frac{51}{101})\right\}$$
$$= 1 + 1 + \cdots + 1 = 1\times 50 = 50 \quad \square$$

이와 같이 주어진 문제를 직접 계산하는 것보다 Gaussian pairing 의 기법을 사용하는 것이 훨씬 문제 풀이를 용이하게 한다. 그러나 여기에서 사용한 함수 f 의 성질을 초보자 들이 쉽게 찾지 못하는 어려움은 가진다.

7) 패리티(parity)란 짝수와 홀수가 갖는 성질을 말한다. 즉 기우성을 이야기하는 것으로서 짝수와 홀수가 갖는 특성으로서 일종의 불변량입니다. 예로 11개의 톱니바퀴가 원형으로 서로 연결되어 있다. 이들 톱니바퀴가 동시에 돌아갈 수 있겠는가? 하는 질문의 답은 '불가능합니다.' 왜냐하면 맞물린 톱니바퀴는 반드시 도는 방향이 반대 방향이어야 한다는 불변의 상황이 존재해야 합니다. 그러데 첫 번째 톱니바퀴가 시계방향이면 짝수 번째 톱니바퀴는 반시계방향으로 돈다. 그러므로 첫 번째는 11번째와 같은 방향으로 돌고 있으므로 첫 번째와 11번째 톱니바퀴는 서로 맞물려 돌아갈 수가 없다.

이와 같이 어떤 행위가 반복적으로 일어나는 상황에서 불변하는 상황이 존재하는 경우를 이용하는 것은 문제 해결에 대단히 강력한 도구가 된다.

이상의 경우들은 수학적 개념의 형성이나 문제해결의 상황에서 불변하는 양이나 상황의 발생을 활용하는 문제 해결 전략으로서 탁월한 효과를 볼 수 있는 경우들이 되겠다.