

기초대수의 구조적 이해를 위한 새 교육과정¹⁾

David Kirshner (Louisiana State University)

번역: 정 인 철 (전남대학교)

한국수학교육학회

제 37회 전국수학교육연구대회

국립 경상대학교

10/13/06

참 고 문 헌

- Kirshner, D. (1987). *The grammar of symbolic elementary algebra*, Unpublished doctoral dissertation. University of British Columbia, Vancouver.
- Kirshner, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 274-287.
- Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 83-98). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Kirshner, D., & Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(4), 224-257.
- Kirshner, D. co-PI, & Solh, H. (2005). *A structural curriculum for secondary school algebra*. Report for Louisiana BOR Enhancement Grant, *Overcoming Louisiana's Mathematics Gap: From Algebra to Calculus*.
- Kirshner, D. PI. (Submitted). *Structural Understanding of Elementary Algebra Project*. NSF, Instructional Materials Development, March 2006.

1) 이 논문은 제37회 전국수학교육연구대회의 전체 강연 논문인 A New Curriculum for Structural Understanding of Algebra의 파워포인트 원고를 번역한 것입니다.

대수의 두 측면

- 구조적 측면

- 논리적 하부구조, 해석에 관하여 외부로부터 추상화된 형식적 규칙과 절차에 대한 원리

- 경험적 측면

- 참고영역, 일상 현상의 모델화, 응용 또는 적용, 수, 양, 모형

대수의 구조적 권위

기초대수의 주요한 점은 단순히 그 자체가 ‘추상적이다’라는 것이다. 즉, 공리에는 형식적 결과 이상의 의미가 결여되어 있다.... 대수는 “가설-연역 체계”로서의 역할을 스스로 수행한다. (Bell, 1936, p. 144)

대수에서의 오류 패턴

$$(a+b)^c = a^c + b^c \qquad \frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} \qquad a^{mn} = a^m a^n$$

NAEP : 12학년 학생들(고등학교 3학년)의 40%만이 적절한 수준의 복잡한 전형적 문제를 오류 없이 풀었다. (Blume & Heckman, 1997).

$$(ab)^c = a^c b^c \qquad \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b} \qquad a^{m+n} = a^m a^n$$

대수를 공부하는 학생들은 사고를 깊게 하지 않고 기호에 집착하는 경향이 있다. (Thompson, 1989, p. 138)

오류 패턴 외 : 반성 능력의 결여

SAT 수학 평균이 717 점인 122명의 학생 대상 (Washington University, 2005)

예) $\frac{dp}{dt} = k\left(1 - \frac{p}{k}\right)$

대수적 기호의 이해 (Arcavi, 1994)

가장 효율적인 해법을 제시하시오.

$$A) \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2x + 3 = \frac{21}{4}$$

$$B) \left(2\sin x + \frac{1}{2}\right) - 2\sin x + 3 = \frac{21}{4}$$

10%에 해당하는 12명의 학생이 B를 해결하는데 A 방법을 활용하도록 시도했다.

(Washington University, 2005: SAT 수학 평균이 717점인 122명의 학생을 대상으로)

교육과정의 목표

- 1) 학생들의 대수 기호 조작의 일관된 특징인 잘못된 규칙을 줄이거나 완전히 제거한다.
- 2) 중등학교에서 대수를 배우는 모든 또는 거의 대부분의 학생들이 대수 방정식과 표현에 있어서 정교한 구조적 관점을 갖도록 한다.

학생들의 부주의한 기호 조작에 대한 해석적 관점

A) 학생들은 교육과정에 제시되어 있는 규칙들을 이해하려 하고, 이렇게 이해하려는 노력 중에 곤란한 상황을 겪는다. 그 결과, 부주의한 시각적 패턴으로 돌아간다. (규칙 기반의 설명)

B) 출발점에서 학생들은 교과서와 교사가 제공하는 규칙과 절차에 대한 주의 깊은 설명을 참고하지 않고 시각적 대상들의 상호관계와 같은 대수적 기술을 발달시키려고 노력한다. (대상 상호관계 설명)

해석적 관점 : 교과과정의 제언

A) 학생들은 교육과정에 제시되어 있는 규칙들을 이해하려 하고, 이렇게 이해하려는 노력 중에 곤란한 상황을 겪는다. 그 결과, 부주의한 시각적 패턴으로 돌아간다. (규칙 기반의 설명)

대수 규칙과 절차에 대한 추상적 표현의 경우 대부분의 학생들이 이것을 완전히 이해하는 것은 너무 어렵다. 대수에서 의미형성에 기여하는 경험적 접근법을 탐구하라.

정보 처리 심리학 (규칙 기반의 설명)

인식적 분석은 학생들이 원형으로부터 추출하거나 교과서에서 직접 얻은 규칙으로부터 출발한다. 대개 이것들은 (분배법칙, 소거법칙, $AB=0$ 이면 $A=0$ or $B=0$ 을 사용한 가약 다항식의 풀이 과정과 같은) 전통적인 대수 교과서 내용의 핵심을 구성하는 기본적인 규칙들이다.(Matz, 1980, p. 95).

규칙 기반 설명은 이성적 행위자로서 인간을 바라보는 문화의 민속 심리학에 깊은 철학적 뿌리를 두고 있다. (Dupuy, 2000)

참고 문맥에서의 초점

일반화와 구조화된 일반성의 점진적 형식화는 형식주의보다 우선해야 한다 - 그렇지 않으면 형식주의는 학생들의 경험의 측면에서 아무런 근거가 없게 된다. 현재 학교 대수의 전면적 실패는 형식주의가 도입된 뒤에 그것을 학생들의 경험과 연결하려는 노력이 부적절함을 보여준다. "마치 처음에 무의미한 것은 언제나 무의미한 것처럼 보인다." (Kaput, 1995, pp. 74-75)

개정 움직임

일반적으로, 학생들이 견고한 개념적 기초를 세우기 전에 기호조작에 너무 집중하면, 기계적 조작 그 이상은 할 수 없을 것이다...상징적 표기를 하는 의미 있는 작업을 위한 기초는 오랜 시간에 걸쳐 세워져야 한다. (NCTM 학교수학을 위한 원리와 기준, 2000, p. 39)

해석적 관점 : 교과과정의 제언

B) 출발점에서 학생들은 교과서와 교사가 제공하는 규칙과 절차에 대한 주의 깊은 설명을 참고하지 않고 시각적 대상들의 상호관계와 같은 대수적 기술을 발달시키려고 노력한다. (대상 상호관계 설명)

학생들이 구조적 내용을 개념적으로 몰입하도록 하는 현 교육과정에서 규칙과 절차가 제시되는 방식에 잘못된 점은 없는지를 탐구하라.

연결주의(결합주의)자 모델 (대상 상호관계 설명)

- 연결주의 모델은 규칙활동의 연속적 과정으로서가 아니라 대단위적으로 마디 마디의 평행체 제안에서 활동의 확대로서 인식된다. (Bereiter, 1991; Dreyfus, 2002; Gee, 1992)

- 학습은 계층적 규칙구조의 습득이 아니라 들어가고 나오는 마디 사이에서 역동적 상호작용의

견고한 상태를 구축하는 것으로 모델화 된다. (Lloyd, 1989; Rumelhart, Hinton, & Williams, 1986).

왜곡된 교육과정

대수 수업의 관찰, 2005년 11월: $-2 + 4n + 9 = 20$

$$-2 + 4n + 9 = 20 \quad \text{so} \quad \begin{array}{c} -2 + 4n + 9 = 20 \\ + 2 \end{array} = 20 + 2 \quad \text{so} \quad 4n + 9 = 22$$

$$-2 + 4n + 9 = 20 \quad \text{so} \quad -2 + \frac{4n}{4} + 9 = \frac{20}{4} \quad \text{so} \quad -2 + n + 9 = 5$$

$-2 + 4n + 9 = 20$	$= 20$	
$(-2 + 4n + 9) + 2 = 20 + 2$		등식의 성질
$2 + (-2 + 4n + 9) = 20 + 2$		덧셈에 대한 교환법칙
$(2 + -2) + (4n + 9) = 20 + 2$		덧셈에 대한 결합법칙

연결주의자 관점에서 합리성, 논리성 그리고 추론

합리성은 ... 이처럼 본질적으로 정당화의 사회적 과정에서 비롯된다. 개인의 사고 활동에 영향을 주는 소위 논리적 추론이라는 것은 실제로 공적인 재구성인데 이것은 타당한 절차에 의해 유도될 수 있음을 보여줌으로써 결론을 정당화함을 뜻한다. (Bereiter, 1991, p. 14)

새로운 교과과정의 관점

우리가 학생들에게 제시한 과제에 합리성, 논리성 그리고 추론을 이루도록 하는 것을 생각하는 대신 교실의 사회적 환경 속에서 이러한 인식적 노력을 실천해야 할 필요가 있다. 합리성은 대수 문제를 풀이가 아닌 대수 문제 풀이의 정당화 과정에 존재한다.

사전적 지원 체계 (LSS)는

학생들이 시각적 패턴들을 즉흥적으로 연결하는 것과 대수적 규칙과 절차의 명백한 구조적 기술을 지원하는 수학적 능력의 실행 사이에서 두서없이 중재한다.

제 1 단계 : 연산의 순서

- 연산 수준의 위계
- 집단 채점자 체계
예) $3x^{2+y}$
연산: 덧셈, 곱셈, 지수법칙
위첨자는 묶음(집단)표시이다.

묶음(집단)표시

- 소괄호(괄호), 중괄호(브래킷), 대괄호(집합기호)
- 위첨자
- 연결선(분수와 근호에 사용되는 수평선)
- 다음 둘을 비교하여라. $\sqrt{x+5}$, $\sqrt{x+5}$

연산 수준의 위계

- (a) 상위 수준 연산이 우선이다.
- (b) 인접한 연산들이 동일한 수준에 있다면, 왼쪽의 연산이 우선이다.
오름차순으로 연산 수준에 따라
수준 1 덧셈과 뺄셈
수준 2 곱셈과 나눗셈
수준 3 지수와 근호

지수가 곱셈보다 상위 수준이기 때문에 $3x^2$ 은 $(3x)^2$ 이 아니라 $3(x^2)$ 으로 보아야 한다

공간적 차원에서 연산 수준

- (a) 상위 수준 연산이 우선이다.
- (b) 인접한 연산들이 동일한 수준에 있다면, 왼쪽의 연산이 우선이다.
오름차순으로 연산 수준에 따라
수준 1 넓은 배치 $a \pm b$
수준 2 수직/수평 위치 ab or $\frac{a}{b}$
수준 3 대각선 위치 a^b or ${}^b\sqrt{a}$

대각선 위치가 수평 위치보다 우선이기 때문에 $3x^2$ 은 $(3x)^2$ 이 아니라 $3(x^2)$ 이다. 표기법을 $3M \times E2$ 로 바꾸진 않았다. (Kirshner, 1989)

연산 교육의 현 순서

PEMDAS: 괄호, 지수, 곱셈, 나눗셈, 덧셈, 뺄셈

각각에 대한 불완전하고 불명확한 설명을 제시하면서 묶음(집단)표시와 연산 수준의 위계를 함께 혼합한다.

완벽한 숙달을 위한 교육과정

연산 규칙들의 순서에 따른 명백한 관계를 형성하면서 좀 더 복잡한 표현에 대해 수준 높은 유창성에 이를 수 있도록 도와주는 평가 연습 항목들

$$\sqrt{\frac{13^2 - 5 \times \sqrt{250 - 15^2}}{\frac{23 - 4^2}{2^2 + 3}}}$$

사전적 항목

· 식의 가장 기본이 되는 연산(주요연산)은 조작 규칙의 순서에 따라 우선 순위가 가장 낮은 연산이다.

예) $3x^{2+y}$ 에서 기본이 되는 연산(주요연산)은 곱셈이다.

· 식에서 가장 기본이 되는 하위식(주요 하위식)들은 주요 연산과 결합된 식의 부분들이다.

예) 3과 x^{2+y} 는 $3x^{2+y}$ 의 가장 기본이 되는 하위식(주요 하위식)이다.

순환적으로, 각각의 하위식들은 그 자체로 식을 완전하게 구조적으로 기술하게 하는 주요 하위식들로 분해될 수 있다.

· 항들은 기본이 되는 연산(주요 연산)이 덧셈인 식의 기본이 되는 하위식들이다.

· 인수들은 기본이 되는 연산(주요 연산)이 곱셈인 식의 기본이 되는 하위식들이다.

제 2 단계 : 변형 규칙

· 방정식의 양변에 대한 구조적 기술의 측면에서 변형 규칙들의 추론적 설명

예) $(xy)^2 = x^2y^2$ 의 경우 기본 연산(주요 연산)이 지수법칙이고 그 밑이 곱셈인 식이며 그 식을 주요 연산이 곱셈이고 주요 하위식들(즉, 인수)이 모두 주요 연산이 지수법칙인 식으로 변형시킨다.

규칙의 적용에 대한 설명

· $(xy)^2 = x^2y^2$ 는 식 구조의 명확한 분석을 통해서 $[(a+b^2)c^2]^{3+m}$ 로 적용된다.

변형 규칙의 시각적 특징

눈에 잘 보이는 규칙

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$(xy)^2 = x^2y^2$$

$$\frac{w}{x} \frac{y}{z} = \frac{wy}{xz}$$

$$\frac{xy}{xz} = \frac{y}{z}$$

눈에 잘 보이지 않는 규칙

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$\frac{w}{x} + \frac{y}{z} = \frac{wz + xy}{xz}$$

눈에 잘 보이는 규칙들은 각각의 이미지가 시간에 따라 변형되는 만화 그림의 연쇄와 같다.

제 3 단계 : 과제 정의

인수분해하기 : 주요 연산이 곱셈이 아닌 식을 주연산이 곱셈인 식으로 변형하라.

문제: 식을 인수분해 하는데 사용될 수 있는 변형규칙을 선택해서 제시하여라.

(예, $xy + xz = x(y+z)$, $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, and $(xy)^2 = x^2y^2 + y$)

문제

예) 다음을 인수분해 하여라.

$$\left[\left(6 - \sqrt{\frac{x}{5}} \right) + 5y^3 \right]^2 - \left[\left(\frac{\sqrt{7+y}}{2x} \right) - 11x \right]^2$$

다단계 유도

분수식 간단히 하기: 분수의 분자, 분모에서 공통인수 소거하기.

따라서 분자, 분모를 인수분해하는 것은 분수식을 간단히 하는데 선행되어야 하며 필수적이다...

예시 대화 :
$$\frac{3x^2 + 1}{3y - 2} = \frac{x^2 + 1}{y - 2}$$

교사 : 이 단계에서 어떤 규칙을 사용하고 있니?

학생 : 분수의 소거법칙입니다.

교사 : 그 규칙이 무엇인지 나에게 설명해 줄 수 있니?

학생 : 그 규칙은 분수식의 분모, 분자에 있는 공통 인수를 소거하는 것입니다.

교사 : 그래, 그럼 같이 보자. 무엇을 소거했니?

학생 : 3입니다. 3이 인수이기 때문에 곱해져 있습니다.

교사 : 좋아, 3은 정말 인수가 맞아. 그런데 3이 분모, 분자의 인수일까? 확인해 보자. 분자의 주연산이 뭐지?

학생 : 음.. 지수법칙, 곱셈, 덧셈이 있습니다. 따라서 주연산은 덧셈이고, 덧셈은 연산의 위계에 따르면 가장 낮은 수준입니다.

교사 : 그래, 잘 했다. 이제 이 경우에는 무엇이 주요 하위식이니?

학생 : 항들입니다...어, 알았다. 소거되려면 분자, 분모 전체의 인수이어야 합니다. 그 일부가 아니라요.