韓國數學敎育學會
<全國數學敎育硏究大會 프로시딩>
제 37회. 2006. 10. 21-34

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 37th. Oct. 2006. 21-34

대수의 구조적 이해를 위한 새로운 교육과정[1)]

David Kirshner (Louisiana State University)
번역: 방 정 숙 (한국교원대학교)

대수의 구조적 이해를 위한 새로운 교육과정

대수는 어렵다. 또는 적어도 그런 평을 받고 있다. 대수를 이해하고 대수의 비밀스런 규칙과 방법을 잘 알려면 똑똑해야한다. 이러한 인식은 지속적인 오류 패턴 또는 학생들이 대수 규칙을 이해하는 데 상당한 어려움을 가지고 있다는 것을 알려주는 "잘못된-규칙(mal-rules)" (표 1) (Sleeman, 1986)에 관한 수십 년 간의 연구를 통해 지지된다. 여전히 학습에 관한 연구는 인간 인지의 본질에 대한 가정에 근거한 이론적 전통 내에서 개발되고 해석되고 있다. 그러한 가정에 이의를 제기한다면, 연구 결과는 재해석될 수 있다. 그러나 이렇게 반문할 수 있을 것이다: 학생들의 일관된 오류를 보면 대수가 이해하기 어렵다는 것 이외에 어떤 다른 해석을 가할 수 있을까? 서양 철학의 절정에서부터 30년 동안의 대수 오류 연구를 자세히 살펴보는 동안 안전벨트를 꼭 잡고 있으시오. 학습에 대한 전통적인 가정에 매우 거칠게 운전을 하긴 하지만, 내가 확신하건데, 여전히 그럴만한 가치가 있다. 왜냐하면, 학생들의 대수 성취도를 위한 새로운 전망 가운데로 낙하할 수 있기 때문이다.

표 1
잘못된 규칙과 올바른 규칙

잘못된 규칙	올바른 규칙
$(a+b)^c = a^c + b^c$	$(ab)^c = a^c b^c$
$\sqrt[c]{a+b} = \sqrt[c]{a} + \sqrt[c]{b}$	$\sqrt[c]{ab} = \sqrt[c]{a}\,\sqrt[c]{b}$
$a^{mn} = a^m a^n$	$a^{m+n} = a^m a^n$
$a^{m+n} = a^m + a^n$	$a(m+n) = am + an$
$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$	$\frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$
$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b}$	$\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$

1) 이 논문은 제37회 전국수학교육연구대회 <프로시딩> pp.1~19에 게재된 논문인 A New Curriculum for Structural Understanding of Algebra를 번역한 것입니다.

전통적인 대수 교실은 중등학교의 수학 교육에 관심이 있는 우리 모두에게 익숙한 장소이다. 교과서는 식과 방정식을 조작하는 규칙을 제시한다. 교사는 규칙을 설명하고 시범을 보인다. 학생들은 교사가 제시한 모델을 따라 전형적인 응용 문제를 해결하는 것을 연습한다. 어느 정도 학생들이 요구되는 기능을 신뢰할만하게 증명해 보일 수 있다는 점에서, 적어도 기본적인 수준에서는 우리의 설명이나 시범이 이해되었다고 결론 내린다. 표 1에서 제시한 것과 같은 오류 패턴을 보이는 학생들에 대해서는, 우리가 규칙을 너무 추상적으로 다루어서 학생들이 제대로 이해하지 못했다거나 학생들의 이해를 강화할 만큼 충분히 공부하지 않았다고 안타까워한다. 미국의 12학년 학생들 중에서 단지 40%만이 적절하게 복잡한 기호 조작 문제를 오류 없이 해결하므로(Blume & Heckman, 1997), 학생들에게 대수의 추상적인 일면을 제시하는 것조차 두려워지게 된다. 이처럼 대수 기능(algebra skills)을 교육과정에 제시된 규칙과 절차를 이해하는 것으로 보는 익숙한 관점은 지난 30년간 대수 학습 연구를 뒷받침해온 인지 심리학의 정보 처리(Information Processing [IP]) 전통의 인지적 가정과 일치한다. 예를 들어 Carry, Lewis, 그리고 Bernard(1980)의 인지적 분석은 "대수 게임의 합법적인 움직임(p. 2)"에서 시작되었다. 좀 더 분명하게 Matz(1980)는,

> 개인의 문제-해결 행동을 다음 두 가지 요소를 사용하는 과정으로써 이상화한다. 첫 번째 요소는 대개, 지식은 새로운 문제보다 우선한다는 것을 가정하여, 학생이 견본으로부터 추출하거나 교과서로부터 직접 얻게 되는 규칙의 형태를 취한다. 대부분 이런 것들은 전형적인 대수 교과서 내용의 핵심을 형성하는 기본적인 규칙(예를 들어, 분배 법칙, 소거 법칙, '$ab=0$일 때 $a=0$ 또는 $b=0$'이라는 원리를 활용하여 인수분해가 가능한 다항식을 해결하는 절차와 같은 규칙)이다. (p. 95)

Matz의 틀에서 두 번째 요소는 어떻게 오류 패턴이 "알려진 규칙과 익숙하지 않은 문제간의 차이를 연결하는 방법을 구체화하는 *추정 기술(extrapolation techniques)*"을 (잘못)적용함으로써 발생하는지를 탐구했다(Matz, 1980, p. 95).

대수적 기능에 있어서 학생들의 능력은 주어진 규칙을 확실하게 습득하고 적용하는 데 달려 있다는 아이디어는 편안한 면이 있다. 왜냐하면 이는 서양 사상의 데카르트 이원론의 철학적 가정과 아주 잘 어울리기 때문이다(Brooks, 1991; Clancey, 1999; Dupuy, 2000; Estep, 2003). 데카르트 이원론은(물론, 데카르트 좌표의 르네 데카르트 덕분에) "마음과 물질, 그리고 마음과 육체의 분리라는 원리이다. 데카르트에 따르면 마음은 '사고하는 것(thinking thing)'이고 비물질적인 실체이다... 자기 자신의 핵심으로써 의심하고, 믿고, 희망하는 등등의 부분이다. 육체는 물질적인 실체이다"(Wikipedia, 2005, http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_dualism). 데카르트는 마음이 육체에게 직접적인 행위와 행동을 만들어내도록 작용한다고 믿었다. 하지만 떨어진 "실체"간의 이러한 상호작용은 항상 일종의 철학적 수수께끼와 같은 문제로 간주되어 왔다. 그러나 마음을 컴퓨터에 비유하는 것에 근거한 정보 처리 이론은 "마음이 물질과 상호작용한다는 형이상학적 문제를"해결한다(Haugland, 1985, p.2). 왜냐하면 IP 이론은 기능이 중앙집권화된 일련의 스크립트에 근거하여 수행된다는 것을 통해 제어 구조를 설명하기 때문이다. 대수에서 그러한 스크립트는 교육과정에 제시되는 대수 규칙을 포함한다. 그

래서 대수 학습은 규칙을 이해하고 이를 지적 스크립트로 통합하는 것을 반드시 포함해야 한다 (Matz'에서처럼, 1980, 모델). 사실, 우리는 이원론적 아이디어로 가득 찬 문화에 파묻혀 있기 때문에, 학생들이 교육과정에 제시된 규칙을 이해하는 것은 말할 것도 없고 규칙의 의미에 관여하지 않은 채 대수적 기능을 획득할 수 있다는 제안을 이해하기란 어렵다

이원론의 우세에도 불구하고 수학 교육자이면서 연구자로서 우리의 직관은 우리에게 다른 방향을 자주 지시한다. 위에 제시된 잘못된 규칙들을 생각해 보자. 그러한 오류를 혼동하는 것은 그들의 피상적인 특징이다. 오류를 보면, 올바른 대수 규칙의 *의미*에 대한 잘못된 *이해*를 반영하기 보다는 올바른 규칙의 시각적 *형태*의 잘못된 *인식*에 지나지 않는 것 같다. 이러한 의미에서 Thompson(1989)은 대수를 공부하는 학생들이 "머리를 쓰지 않은 채 기호만 넣으려는 성향"(p. 138)을 가졌다고 말했다. 여하튼 학생들은 규칙의 의미와 관계없이 대수 표기법의 시각적 형태를 다루는 것으로 보인다. 예를 들어 Erlwanger(1973)의 획기적인 연구를 보면:

> 우리는 이런 종류의 대화가 마치 교환법칙이라는 대수적 개념에 대한 증거라고 간주하고 싶어진다. 그러나 규칙에 대한 Benny의 개념을 전체적으로 살펴보면, 대수 연산에 대한 인식이라기보다는 출력된 페이지에 있는 패턴을 인식하고 있는 것 같다. (19쪽에 대한 주석)

물론, 대수 기호의 "분별없는" 조작에 좌절하는 이러한 절규는 필수적인 기능을 완전히 획득하고자 노력하는 학생들도 포함한다. 하지만 성공적인 학생들은 어떠한가? 실패하는 학생들은 이해하는 것을 포기하고 기호를 분별없이 조작하려는 학생들인 반면에, 성공적인 학생들은 이해하려는 것에서부터 출발한다고 볼 수 있지 않을까? 다음 두 연구에서 나는 성공적인 대수 조작 기능을 위한 기초를 탐구하기 시작했는데, 결과적으로 매칭이 되는 시각적 패턴은 학생들이 산출하는 성공적인 작업의 기초가 된다는 것을 발견했다.

첫 번째 연구에서 학생들의 분해 지식을 조사했다. 학생이 $3x^2$과 같은 식을 [$(3x)^2$보다는 $3(x^2)$으로] 성공적으로 분해할 수 있을 것으로 가정하자. 이원론적 관점에서 보면, 우리는 이 학생이 연산 규칙의 순서에 대한 명확한 지식을 가진다고 가정한다(예를 들어 지수법은 곱셈에 우선한다). 그러나 Kirshner(1989)는 그런 능력이 종종 기호 체계의 시각적 특징과 관련된다는 것을 밝혔다. 이 학생이 암묵적 수준에서 진정 알고 있는 것은 "대각적인 연결이 수평적인 연결보다 우선한다"와 같은 것이다. 이 연산에 대한 선언적 정보를 유지하는 대안적인 표기법으로 예를 들어, 3M×E2처럼 ("M"=곱셈, "E"=지수법) 과제를 제시했을 때, 학생들이 올바르게 분해하는 능력이 제대로 발휘되지 못했다. 많은 학생들에게 분해하는 지식은 평범한 기수법의 시각적 단서와 뒤엉켜 연결되어 있었다. 학생들은 그 규칙들을 지적 수준에서 "알지" 못했고, 대신에 출력된 기호의 시각적 공간 내에서 조작하는데 익숙했던 것이다.

표 2

시각적으로 두드러진 규칙과 시각적으로 두드러지지 않은 변형적 규칙

$x(y+z)=xy+xz$	$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
$(xy)^2=x^2y^2$	$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
$(x^y)^z=x^{yz}$	$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
$\frac{w}{x}\frac{y}{z}=\frac{wy}{xz}$	$\frac{w}{x}+\frac{y}{z}=\frac{wz+xy}{xz}$
$\frac{xy}{xz}=\frac{y}{z}$	$\frac{w}{x}\div\frac{y}{z}=\frac{wz}{xy}$

두 번째 연구는 표 2에서 제시된 것과 같은 *변형적 규칙(transformational rules)*과 관련된 학생들의 참여의 본질에 대해 조사했다. 규칙의 두 열을 자세히 살펴보자. 표의 왼쪽 열처럼 어떤 규칙들은 특정한 *시각적 특징*을 가지고 있어서 방정식의 좌변과 우변을 서로 자연스럽게 관련짓는다. 시각적 특징의 성질은 쉽게 파악될 수 있지만 정의하기는 어렵다. 이는 부분적으로 방정식의 좌변에서 우변으로 반복되는, 상징적이고 공간적인 요소를 포함한다. 그러나 원인이 무엇이든지간에, 이 영향은 각각 구별된 시각적 프레임이 한 장면의 지속적인 예로 인식되는 애니메이션과 - 실제로는 여러 개의 구별된 그림으로 구성되지만, 하나의 움직이는 시각적 장면을 산출하는 것처럼 보이는 만화 영화를 생각해보라-유사하다(Kirshner & Awtry, 2004). 따라서 시각적으로 두드러진 규칙들에 대해서는 관찰자가 방정식의 구별된 두 변을 의식적으로 연결하기 위해서 멈출 필요가 없다. 왜냐하면 이 두 변이 각각의 존재로써 인식되지 않고 시간이 지남에 따라 변형되는 하나의 존재로 인지되기 때문이다.

우리 연구에서 발견한 것은 학생들이 시각적으로 두드러지지 않은 "모양새 없는" 규칙보다는 시각적으로 두드러진 규칙을 좀 더 쉽게, 하지만 훨씬 피상적인 수준에서 학습한다는 것이다. 즉, 학생들은 모양새 없는 규칙보다 좀 더 쉽게 시각적으로 두드러진 규칙들의 올바른 응용을 인식할 수 있었다. 하지만, 학생들은 옳게 "보이지만" 실제로는 그 규칙이 적용되지 않는 경우에 시각적으로 두드러진 규칙들을 지나치게 일반화하는 경향이 있었다. 이는 놀라운 것이 아니다. 왜냐하면 대수 기호 기능을 습득하려고 학생들이 노력할 때마다 사실상 모든 잘못된 규칙에 시각적으로 두드러진 규칙들이 근거하기 때문이다(표 1을 다시 보라). 그러나 놀라운 점은 우리 연구가 대수 규칙을 이전에 접해보지 않은 7학년 학생들을 포함하고 있다는 점이다. 우리는 이 학생들에게 규칙 유형을 구별하지 않고 엄격한 강의식으로 시각적으로 두드러진 규칙과 모양새 없는 규칙들을 혼합하여 가르쳤다. 그러나 학생들은 자발적으로 표기법의 시각적 구조와 관련지었다. 시각적 단서에 의존하는 것은 비단 실패하는 학생들의 병리학적 적응이 아니라, 어떻게 학생들이 처음부터 대수 기호 체계에 인지적으로 참여하는가에 대한 규범인 것이다.

이원론적 아이디어는 서양 철학과 심리학에 팽배해 있긴 하지만, 인지적 능력의 지적 모델이 적절한가에 대해서는 상당한 학문적 논쟁이 있다. 나는 여기서 잠시 연결주의 심리학(connectionist psychology)을 소개하기를 원하는 데, 이 심리학은 인지 기능을 모델링하는 하나의 접근법으로서 최근에 부각되었고, IP 이론에서 개발된 모델과 같이 규칙에 근거한 모델이 갖는 헤게모니에 도전을 가한다(Bereiter, 1991; Dreyfus, 2002; Gee, 1992). 여기서 내 목적은 이원론적 철학에 근거한, 학습에 대한 우리의 문화적 상식이 잘못된 것일 수도 있다는 가능성을 실제로 제시하고자 하는데 있다. 대수 같은 영역에서 능숙하게 수행하기 위해서 "대수 게임의 합법적 움직임"(Carry, Lewis, & Bernard, 1980, p.2)을 학습하거나 또는 "학생이 전형적인 모델로부터 추출하거나 교과서에서 직접 얻은 규칙"(Matz, 1980, p. 95)에 기초할 필요는 없다. 인지적 기능은 꽤 다른 것이 될 수도 있다.

연결주의(connectionism)는 두뇌에서 상호작용하는 뉴론(neurons)보다는 서로 상호작용하는 노드(nodes) 체계에서 노드간의 활성을 확산하는 것으로서 인지를 설명한다. 전형적으로 연결주의 시스템은 숙달되어야 할 영역의 특징과 부합되는 입력 노드(input nodes)와 성취될 수 있는 행동이나 도달할 수 있는 결정과 관련된 출력 노드(output nodes), 그리고 입력 노드와 출력 노드를 조정하는 감춰진 단위를 포함한다. 하지만, 정보 처리 시스템에서는 입력과 출력이 어떻게 연결되는지에 관해서 명시적인 규칙으로 자세히 설명했었던 반면에, 연결주의 시스템에서는 다르게 작용한다. 노드들은 흥분시키거나 억제하는 신호들을 전달하는 링크를 통해 서로 연결된다(Haberlandt, 1997). 어떤 활성화의 한계에 도달하면, 노드는 연결된 다른 노드에 신호를 보낸다. 이러한 방법으로 연결주의는 중앙집권화되고 순차적인 스크립트를 따르기보다는 평행하면서 분배된 처리를 포함하는 것으로써 인지를 묘사한다.

연결주의 시스템에서 노드들 간의 링크는 가중치가 주어진다. 이는 링크가 자신을 지나가는 신호를 방해함으로써 그 영향을 줄일 수 있다는 것을 의미한다. 또는 그 신호의 최상의 강도를 유지하게 함으로써 목적지에 도달하게 할 수도 있다는 것을 의미한다(Bereiter, 1991). 시스템의 이전 행동의 효과에 따라 점차적으로 노드 간의 연결 가중치를 조정하는 피드백 루프(feedback loops)로 학습을 설계한다(Lloyd, 1989; Rumelhart, Hinton,& Williams, 1986). 시스템이 안정된 상태로 나아감에 따라, 이러한 연결 가중치의 지속적인 조정을 통해 수행 능력이 점차적으로 증진된다. 간단히 말해, 연결주의는 많은 수의 입력 노드, 출력 노드, 그리고 중재 노드 간의 가중치가 적용되는 상호관계로서 인지적 기능을 설계한다. 어떠한 중앙집권화된 규칙에 근거한 프로그램도 작용하지 않는다.

연결주의가 제시하는 대안적인 모델을 추구하고 싶은 마음은 부분적으로 IP 모델은 "성가시고 부서지기 쉽다는 데에 있다." IP 모델은 자극 조건이 매우 상세하지 못할 때 (예를 들어, 나이에 따라 바뀌는 얼굴은 말할 것도 없고, 다른 각도에서 얼굴을 인식하는 것과 같은 시각적 분별 과제에서) 제대로 설명하지 못하는 경향이 있다. "연결주의 모델은 바로 그러한 상황에 잘 들어맞는다"(Haberlandt, 1997, p. 159). 그래서 만약 우리가 의미를 가진 규칙에 대해서 잊는다면, 과정 같은 연결주의를 통해서, 기호적 표현의 시각적 특징간의 연결에 기초하는 것만으로 기능 발달을 추구할 수 있을 것이라고 상상할 수 있다. 이는 대수 학습에서 규칙의 논의가 아무런 역할도 하지 않는다는 것을 의미하지는 않는다. 왜냐하면, 규칙에 대해서 말함으로써 입력과 출력 특징에 인지적으로 집중할 수 있고 이를 통해 입력과 출력 노드로써 연결주의 시스템에 생산적으로 통합될 수 있기 때문이다: "따라서 규칙은 *계산을 시작하는 지식*으로서 중요한 역할을 하지만 이는 철학자와 인지과학자들

이 전통적으로 인식했던 것, 즉, *규칙은 스스로 계산 알고리즘을 구성한다*는 것과는 근본적으로 다른 역할이다"(Bereiter, 1991, p. 14). 또는 이를 좀 더 평범하게 말하자면, 규칙은 우리로 하여금 결정적인 요소에 초점을 맞추도록 도울 수는 있으나, 규칙을 이해하고 행동을 위한 명백한 안내자로써 규칙을 이용하는 것과는 관련이 없다는 것이다: "연결주의 관점에서 보면, 그러한 규칙에 기초한 모델은 허구이다" (Bereiter & Scardamalia, 1996, p. 509).

이러한 인지에 대한 연결주의 관점은 우리 문화의 이원론적 관점에 기초한 모든 것에 도전적이다. 그러나 연결주의는 IP 접근 방법에 일관된 대안을 제시한다 - 컴퓨터 시뮬레이션은 규칙의 안내 없이 구조화된 영역에서 효과적으로 수행하도록 개발되어왔다.

서론에서 묘사했던 전통적인 대수 교실로 되돌아 가보자. 하지만 이제는 비이원론적, 연결주의 렌즈를 통해 다시 살펴보고자 한다. 교과서와 교사는 대수 문제를 해결하기 위한 명확한 규칙과 절차를 제시한다. 학생들은 그런 문제들을 연습하고 결과적으로 문제를 더 잘 풀게 된다. 그러나 이러한 두 교실의 사건들은 서로 매우 독립적이다. 전문성 개발은 교육과정에 제시된 규칙을 "이해"하고 적용하는 데에 근거하지 않는다. 오히려 학생들은 연습을 통해 출력된 기호의 시각적 공간 내에서 활동을 조직하는 패턴 매칭 네트(pattern matching nets)를 점차적으로 정교하게 한다. 충분한 주의와 인내력 때문에 소수의 학생들만이 결과적으로 잘못된 규칙을 만드는 성향을 극복한다. 그러나 이러한 잘못된 규칙들은 "잘못된 이해"가 아니라 시각적으로 지나치게 일반화한 것이다. 그리고 그러한 잘못된 규칙을 극복한다는 것은 "이해"했다는 것이 아니라 패턴 매칭 네트를 충분히 정교하게 했다는 점을 암시할 뿐이다. 우리는 학생들에게 대수 규칙과 과정에 대해서 합리적인 설명을 제공하기 때문에 우리 스스로 대수는 지적 연구라는 <u>환상</u>을 만든다. 그러나 우리가 진정하는 것은 학생들이 시각적 신호라는 바다에서 분별없이 허우적거리게 남겨두는 것이다.

대수 기호의 의미 있는 조작을 위한 가능성

나는 이 글의 나머지 부분에서 학생들에게 의미 있는 대수 기호 조작을 만드는 데 목표를 둔 교육과정 접근 방법을 개괄적으로 말하고자 한다. 그러나 우선 독자에게 유인 상술 (bait-and switch [싼 광고 상품으로 손님을 끌어 비싼 것을 팔려는 상술]) 전략과 같은 인상을 주는 것을 다룰 필요가 있다. 왜냐하면 나는 이 장의 처음 절반에서 인지는 평행하고 분배되며, 규칙에 기초한 모델은 "허구"이며, 대수 기능은 표기법의 표면적인 시각적 특징과 서로 관련된다는 것을 주장하고 나서, 이제는 의미 있는 대수 기호 조작에 대해 제시하고자 하기 때문이다. 비이원론적 관점에 무슨 일이 일어났는가!

연결주의가 서로 상호작용하는 노드의 시스템에서 노드간 활성화의 확산으로써 인지를 본다면, 합리성, 논리, 추론을 어떻게 생각하는가? 이러한 종류의 중앙집권화되고 연속적인 과정은 이제 정신적 삶으로부터 추방된 것인가? 표면상의 대답은 합리성, 논리, 추론은 인지의 핵심 내적 메커니즘(수행

능력을 지배하는 인지적 스크립트를 구성한다고 이원론적 철학자들이 가정한 메커니즘)에서 벗어난 것이며, 사회적 세계에서 논증적 관행으로써 부수적으로 생산된 것이라는 점이다(Kirshner, 2001; Bereiter, 1991, Gee 1992):

> 합리성은 ... 정당화의 이러한 근본적인 사회적 과정에서 기원한다. 우리가 논리적 추론이라고 부르는 것과 개개 마음의 작용으로 간주하는 것은 실제로는 공적인 재구성인데, 이는 타당한 것으로 인식되는 절차에 의해 파생되어질 수 있다는 점을 제시함으로써 결론을 합법적으로 만드는 것을 의미한다. (Bereiter, 1991, p. 14)

이것이 의미하는 바는 우리가 비이원론적 관점을 채택할 때 수학교육자로서 중요하게 생각하는 목표가 - 즉, 학생들이 자신들의 수학 공부에 대해서 합리적인 사고자가 될 것이라는 목표가 - 극적으로 변형된다는 점이다. 합리성, 논리, 추론이 우리가 학생들에게 부여하는 과제에 끼워진 것으로 생각하는 대신에, 우리는 교실의 사회적 환경에서 이러한 인지적 속성들을 규정할 필요가 있다. 합리성은 대수 문제를 해결하는 데에 존재하는 것이 아니라 대수 문제 해결을 정당화하는 데에 존재한다.

규칙과 절차에 대한 명확한 추론을 지원하는 대수 교육과정 개발을 가장 심각하게 방해해 온 것은 이원론적 가정, 즉, 대수 문제를 해결하는 것은 이미 학생들을 추론하게 만든다는 가정에 있다. 우리는 학생들의 올바른 대수 작업이 명백한 지식을 제시하는 것이라고 일관되게 잘못 해석하고, 결과적으로 대수적 절차의 단계별 정당화에 실제로 포함된 우리 자신의 분석에 대해 전혀 신경 쓰지 않는다.

이 점에 대해서 내가 얼마 전에 관찰했던 교수 에피소드를 기술하면서 설명하고자 한다. 수년의 교육 경력이 있는 교사가 방정식 $-2+4n+9=20$을 학생들과 함께 풀고 있었다. 한 학생이 제시한 방법, 즉 양변에 2를 더하고 9를 빼고 나서 4로 나눈 해결 방법을 교사는 칠판에 기록했다. 이 방법은 올바르다(비록 처음에 항을 정리하는 것이 보다 더 효율적이긴 했겠지만). 다음은 이 학생이 처음에 해결한 단계를 나타낸 것이다:

$$-2+4n+9=20 \quad \text{그래서} \quad \begin{array}{l} -2+4n+9=20 \\ +2 \qquad\quad\;\; +2 \end{array} \quad \text{그래서} \quad 4n+9=22$$

다음 교사는 다른 학생이 제시한 잘못된 방법을 칠판에 옮겨 적었는데, 다음과 같다:

$$-2+4n+9=20 \quad \text{그래서} \quad -2+\frac{4n}{4}+9=\frac{20}{4} \quad \text{그래서} \quad -2+n+9=5$$

교사는 하나의 항이 아니라 방정식의 <u>전체 항</u>에 똑같이 해야 한다는 것을 지적함으로써 학생의 오류를 수정하였다. 이는 올바른 설명이다. 분명히 이 교사는 자신이 말하고 있었던 것을 알고 있었다. 그리고 교사는 학생들이 자신들의 아이디어와 해결방법을 발표할 기회를 갖도록 수업 과정을 발전시키려 한다. 그러나 이 교실의 담화가 학생들의 입장에서 의미 이해를 촉진시키는데 실제로 충분한가?

학생들의 관점에서 이 에피소드를 살펴보자. 위에 제시한, 올바른 단계와 잘못된 단계는 보기에 유사하다. 두 사례 모두에서 하나의 연산자가 방정식의 좌변에 있는 하나의 항에만 적용되고 있는 것처럼 보인다. 처음 풀이의 실제적인 구조를 명백하게 만들기 위해서 해야 할 것은 다음과 같은 것이다:

$-2+4n+9$	$=20$	
$(-2+4n+9)+2$	$=20+2$	등식의 법칙
$2+(-2+4n+9)$	$=20+2$	덧셈의 교환 법칙
$(2+-2)+(4n+9)$	$=20+2$	덧셈의 결합 법칙

그러나 내가 관찰한 교사처럼 우리는 대개 이렇게 하지 않는다. 왜냐하면 학생이 정답을 구하면 어찌했든 이미 그 과정을 "이해한 것"으로 만족하기 때문이다. 그러나 십중팔구 성공적인 학생도, 성공적이지 않은 학생도 모두 그러한 유도 과정에 암묵적으로 포함된 교환 법칙과 결합 법칙의 적용을 이해하지 못한다. 두 학생 모두 교실에서 보아 온, 방정식 해결을 위한 시각적 형식을 단지 흉내 내고 있을 뿐이다. 그리고 교사의 충고는 - 전체 변에 똑같이 해야 한다는 것은 - 맞지만, 학생들에게는 무의미할 뿐이다. 왜냐하면 교사는 "전체 변에 똑같이 하는 것"이 구조적인 용어로 무엇을 의미하는 지는 생각하지 않기 때문이다. 우리가 이원론적 이데올로기로부터 비롯된 신념, 즉, 적어도 절차를 올바르게 적용하는 데 성공적인 학생들은 자신들이 하는 것을 이해한다는 신념을 꽉 잡을수록 대수 교수(teaching algebra)를 좌절시키는 경험으로 만드는 것이다. 분명히 학생들은 자신들이 하고 있는 것 중 어떤 것을 이해해야 한다! - 하지만, 마음속에서 우리는 그러지 못하다는 것을 안다.

어휘 지원 시스템

이 장의 첫 문단에서 나는 수수께끼를 제시했었다: "어떻게 ... 학생들의 지속적인 오류가 대수는 이해하기 어렵다는 것 이외에 다른 것을 암시할 수 있을까?" 답은 대수가 이해하기 어려운지 그렇지 않은지에 대해서 학생들의 과거 수행 능력의 기록에서는 - 오류가 있는 것이든 올바른 것이든지 간에 - 어떤 아이디어도 찾을 수 없다는 것이다. 이는 대체로 학생들이 대수 기능을 발전시킬 때 의미를 만드는 데에는 참여하지 않아 왔기 때문이다. 오히려, 학생들은 시각적 표현의 패턴에 민감해졌을 뿐이다. 그래서 우리는 대수 기호를 의미 있게 조작하도록 설계된 교육과정에 대해 학생들이 어떻게 나아가는지 알지 못한다. 이 절에서는, 어떻게 그러한 교수법적 접근이 구성될 수 있는가에 대한 개요를 그려보고자 한다.

대수를 구조적으로 의미 있게 만들기 위한 교육과정 상의 도전은 대수적 표기법에 대한 학생들의 시각적 이해와, 학생들의 식과 방정식의 조작을 중재하는 추론적 관행을 만드는 것이고 여기서 후자[식과 방정식에 대한 학생들의 조작]에 대해서는 명백한 정당화를 세워야 한다. 나는 그러한 담화의 중심으로써 전통적인 접근 방법에서는 단지 암묵적으로만 가정되었던 식과 방정식의 구조적인 일면을 명백하게 만드는 어휘 지원 시스템(Lexical Support System [LSS])을 묘사하고자 한다(Kirshner, 1998; Kirshner & Awtry, 2004). 이 교육과정 상의 접근 방법은 현재 수정 및 검증 과정에 있고, 중등학교 대수 수업에 광범위하게 적용되기 위해서 제안된다. 이 교육과정을 체계적으로 세밀하게 검토하기보다는 핵심적인 일면을 제공하고, 이 접근 방법의 "맛"을 보여주는 수준에서 수업 단계를 간단하게 그려보고자 한다.

LSS 접근 방법은 대수 규칙과 절차를 좀더 엄격하게 기술하는 것을 가능하게 하는 구조적 어휘를 제공함으로써 식의 단순화와 방정식의 해결을 변환한다. 목적은 대수적 절차에 대한 단계별 정당화를 제공함으로써 학생들이 명백한 추론을 통해 기호 체계에 관계를 맺을 수 있게 하는 것이다. LSS 교육과정은 연속적이고 계열적이다 - 즉, 다음 단계로 나아가기 전에 한 가지 주제를 철저하고 완벽하게 학습하게 하는 교육과정이다. 이런 측면에서 (희망하건대) 매번 보다 높은 정교한 수준에서 이전 주제를 반복적으로 재학습하는, 전통적인 나선형 교육과정과는 다르다.

대수는 두 가지 면이 있다. *경험적인 면(empirical face)*은 참조 영역, 세계의 모델링 현상, 응용, 수, 양, 형태를 향한 외부를 가리킨다. *구조적인 면(structural face)*은 논리적 하부구조, 외부의 해석 영역에서 발췌된 규칙과 절차의 원리를 향한 내부를 가리킨다. LSS는 구조적 교육과정이다. 이는 그래프, 표, 자연스러운 언어적 설명, 물리적 모델, 기하적 유추 등을 무시하고 오로지 형식적 수문자의 기호 시스템만을 다룬다. 그래서 LSS는 대수 지도의 "관심사 전체"는 아니다. 오히려 대수의 양쪽 면을 포함하는, 훨씬 더 폭넓고 광범위한 교육과정의 내부 핵심으로써 LSS를 제안한다. 그럼에도 불구하고, 대수 구조는 학생들에게 적절하게 표현된다는 것을 확실하게 하기 위해 교육과정상의 관심을 독립적으로 이러한 구조적 측면에 집중하는 것은 이해할 만하다. Bell(1936)은 구조적 요구를 다음과 같이 설명했다:

> 기초 대수의 핵심은 간단히 말해 추상적이라는 점이다. 즉, 기호(marks)를 위해 단언된, 전제의 형식적 결과를 뛰어넘은, 어떤 의미도 없는 것이다. ... 대수는 "가설-연역적인 시스템"으로서 스스로 서 있을 수 있다. (p. 144)

LSS 접근 방법은 4단계로 구성된다. **단계 I** 에서 소개되는 기초는 연산 규칙의 순서를 명백하게 설명하는 것이다. 그러한 설명을 통해 *집합 표지(aggregation markers)*가 상세하게 설명되는 데, 이는 시각적으로 식을 분해하도록 "강요"하고 집합 표지가 없을 때 적용되는 연산의 위계를 "강요"한다. 집합 표지는 예상된 대괄호, 중괄호, 소괄호를 포함할 뿐만 아니라 위첨자($3x^{2+y}$와 $3x^2+y$를 비교하라)와, 분수 및 근호($\sqrt{x}+5$와 $\sqrt{x+5}$ 를 비교하라)에서 사용되는 괄선(수평선)을 포함한다.

연산 위계는 1에서 3으로 *연산 수준(operation levels)*을 올리는 것으로 간단하게 요약된다:

수준 1	덧셈과 뺄셈
수준 2	곱셈과 나눗셈
수준 3	지수와 근호

여기서, (a) 높은 수준의 연산이 우선한다. (예를 들어 $1+3x^2 = 1+[3(x^2)]$)

(b) 인접한 연산이 동일한 수준이면, 좌측에 있는 연산이 우선한다.
(예를 들어 $5-3+1=(5\cdot3)+1)$

집합 표지와 수준의 위계 각각에 대해서 불완전하고 명백하지 않게 설명하면서 이를 함께 섞어 표시하는 PEMDAS 두문자어(頭文字語)(Parentheses[괄호], Exponentiation[지수], Multiplication[곱셈], Division[나눗셈], Addition[덧셈], Subtraction[뺄셈])에 자주 의존하는 전통적인 접근 방법에서 연산의 순서는 매우 경시되었다. 이러한 관행은 전통적인 교육과정에서 지속되어 왔다. 왜냐하면, 학생들은 일반적으로 시각적 단서에 의존하여 올바르게 식을 분해할 수 있기 때문이다(Kirshner, 1989). 그러나 연산의 순서에 대한 명백한 지식은 대수에서 변형 규칙과 절차에 대해 명백하게 추론하는 데 중요한 열쇠가 된다.

단계 I은 연산 규칙의 순서를 제시하는 것으로 시작하는 데, 여기서는 학생들이 선행 규칙(precedence rules)에 의해서 쌍 조합을 단계별로 계산하는 것을 정당화하도록 요구하는 식 평가 문제를 연습하게 된다. 연산의 순서의 기초는 LSS의 기초 어휘 요소에서 구축된다. 식의 *주요 연산(principal operation)*은 연산 규칙의 순서에 따라 최소한의 선행 연산으로써 정의된다. 예를 들어 $3x^{2+y}$의 주요 연산은 곱셈이다. 왜냐하면 그 연산은 주어진 식에서 가장 낮은 우선순위를 가지기 때문이다 - 만약 x와 y에 대해 어떤 수치가 주어지고 이 식의 값을 계산하려할 때 곱셈은 가장 나중에 수행되어야 할 연산인 셈이다. *주요 하위식(principal subexpression)*은 주요 연산에 의해 연결되는 식의 일부분으로써 정의된다(따라서 3과 x^{2+y}는 $3x^{2+y}$의 주요 하위식이다). 귀납적으로, 각각의 하위식은 그 자체가 하나의 식을 온전히 구조적으로 나타낼 수 있는 주요 하위식으로 분해될 수 있다. 이 단계에서 학생들은 가장 주요한 것부터 가장 선행되는 것까지 연산의 구조에 대해서 말하기 위해서 "주요 하위식", "그 다음 주요 하위식"등의 언어를 사용한다. 이는 숙달을 위한 접근 방법이기 때문에, 우리는 단계 1에서 임의로 복잡한 식을 다룬다. 예를 들어 이러한 접근 방법을 조직하여 처음으로 시도해보고자 계획한 소규모 연구에서, 학생들에게 다음과 같은 복잡한 식의 구조를 설명하게 하였다(그리고 학생들은 그렇게 할 수 있었다!).

$$\sqrt{\frac{13^2-5\times\sqrt{250-15^2}}{\frac{23-4^2}{2^2+3}}}$$

주요 연산과 주요 하위식이라는 용어는 우리로 하여금 대수 교실에서 사용하는 몇 가지 기본적인 용어를, 구조적인 토대는 없이, 형식적으로 정의하는 것을 가능하게 한다 한다: *항(인수)*은 주요 연산이 덧셈(곱셈)인 식의 주요 하위식이다.

단계 II는 대수의 *변형적 규칙(transformational rules)*을 소개한다(예를 들어 결합, 분배, 제곱의 차 등). 변형된 규칙은 템플릿으로서 하나의 구체화된 통사적(syntactic) 형태의 식을 또 다른 통사적 형태의 식을 산출가능하게 만든다. 예를 들어 $(xy)^2=x^2y^2$은 주요 연산이 지수이고 곱셈이 기초인

식[좌변]을 취하여, 주요 연산이 곱셈이고 주요 하위식(즉, 인수들) 모두 지수를 주요 연산으로 가지는 식[우변]으로 변형한다. 이는 변형적 규칙을 엄격하게 응용할 수 있게 한다. 예를 들어, $(xy)^2 = x^2y^2$ 규칙을 $[(a+b^2)c^2]^{3+m}$에 적용할 수 있다. 왜냐하면 이 규칙의 좌변이 갖는 시각적 관계 때문만이 아니라 $(xy)^2$은 $[(a+b^2)c^2]^{3+m}$에 적합한 구조적 템플릿을 명백하게 형성하기 때문이다. 변형적 규칙에 대한 이러한 명백한 언어적 설명은 시각적으로 두드러진 규칙을 불러일으킬 것 같은, 좌변과 우변간의 자연스러운 시각적 결합을 중재하고 두 변을 각각 개별적으로 분석할 것을 요구한다. 따라서 시각적으로 두드러진 규칙을 시각적으로 지나치게 일반화하여 만들어지는 잘못된 규칙들은 이러한 접근 방법을 통해서 감소되거나 완전히 제거되어야 한다.

단계Ⅲ은 LSS 접근 방법을 표준적인 변형 과제를 구조적으로 기술하는 데까지 확장한다. 예를 들어 *인수분해한다는 것*을 "주요 연산이 곱셈이 아닌 식을 주요 연산이 곱셈인 식으로 변환하는 것"으로 정의한다. 단계Ⅲ 교수법은 학생들로 하여금 이처럼 형식적인 과제 기술(description)에 기초해서만 대수 과제에 대해 추론하게 만든다.

예를 들어, "인수분해 하기"의 정의만 가지고, 학생들은 한 식을 인수분해하기 위해 사용될 수 있는 변형 규칙들을 자기들 마음대로 선택한다 (예를 들어 $xy \pm xz = x(y \pm z)$, $x^2 - y^2 = (x-y)\cdot(x+y)$, $(xy)^2 = x^2y^2$ 등). 이러한 기능은 단계Ⅱ에서 개발된 변형적 규칙에 대해서 명백하게 설명하는 것에 의존한다. 단계Ⅲ은 또한 마지막 단순화가 수행되기 전에 많은 준비가 필요한 분수식을 간단하게 하는 것과 같은 다단계 응용도 포함한다. 예를 들어, *분수식 간단히 하기(simplifying a factional expression)*를 "분수의 분자와 분모의 공통 인수로 약분하기"로 정의한다면, 분모와 분자를 인수분해 하는 것은 마지막 약분 단계에 논리적으로 선행하는 것이다. Davis(1984)는 초기 대수에서 학생들의 확장된 전개는 대개 "시각적으로 조절된 계열"로서 구성된다고 했다. 이 계열은 "절차 P_1을 유도하는 시각적 단서 V_1으로 생각될 수 있고, P_1의 실행은 다시 새로운 시각적 단서 V_2 를 만들며 이는 다시 절차 P_2를 유도한다"(p. 35). LSS 교육과정은 해결 전략을 미리 설계하고 논의하며 의도적으로 시행되는 것을 가능하게 하는 구조적 담화를 깔고 있다.

단계Ⅳ는 구조적 접근 방법을 방정식 해결까지로 확장한다. 방정식을 풀 때 두 종류의 규칙을 적용하게 된다. 방정식과 관련된 대부분의 일은 등호의 좌변 또는 우변에 제시된 각각의 식을 간단히 하는 것이다. 이는 바로 첫 3 단계에서 이미 제시된 것이다. 추가적으로, 등식의 법칙으로 인해 방정식의 양 변에 (적절한 제한을 유지하면서) 동일한 것을 할 수 있다.

구조적 관점에서 보면 몇 가지 다른 사례가 있는데, 이 각각은 해결 방법에 있어서 제각각 구조적인 역동성을 가지고 있다: 변수가 한 번 있는 것, 단일 변수가 동일한 차수로 여러 번 있는 것, 변수가 단일 차수 이상으로 제시되는 것, 그리고 방정식의 체계. 각 사례는 다음 단계로 이동하기 전에 종합적인 양상으로 다루어질 수 있다. 예를 들어, 미지수가 한 번 제시되는 방정식은 모두 주요 연산부터 시작하여 역연산을 활용하고 가장 선행된 연산까지 거꾸로 거슬러 올라감으로써 각 연산을 "원상복구(undoing)"하는 전략을 적용하여 해결될 수 있다. 숙달을 목표로 하는 교육과정에서는 이러한

전략을 다른 경우로 넘어가기 전에 $\sqrt{\frac{2x^3+21}{3}}=5$ 같은 복잡한 방정식을 해결하는 것까지 적용하게 된다. 우리는 전통적인 교육과정에서 그러는 것처럼 단순한 일차 함수에서 멈추지 않는다.

이는 교수 단계의 전반을 완성하는 것이다. 이러한 접근 방법의 초기 검증과 내 자신의 비공식적 선행 실험 결과, 구조적 관점은 지속적인 주의와 연습 아래, 능력이 부족한 학생들에게조차 어렵지 않게 숙달시킬 수 있었다. LSS 접근 방법을 이용할 때 내가 참여해온 많은 경우와 유사하게, 다음의 고안된 에피소드를 통해 이와 같은 보다 엄격한 논증적 관행에 의해 열려지는 일종의 가능한 의사소통을 생각해볼 수 있다. 이 상호작용은 $\frac{3x^2+1}{3y-2}=\frac{x^2+1}{y-2}$에서 학생이 3을 잘못 약분한 것을 포함한다.

교사 : 이 단계에서 네가 사용하고 있는 규칙이 뭐니?
학생 : 분수의 약분 법칙이요.
교사 : 그 규칙이 무엇인지 나에게 설명해 줄 수 있겠니?
학생 : 분수식의 분자와 분모의 공통 인수를 약분하게 하는 규칙이죠.
교사 : 좋아. 이걸 한 번 보자. 무엇을 약분한 것이지?
학생 : 이 3이요. 왜냐하면 곱해진 인수니까요.
교사 : 좋아, 그게 인수이지만 *분자와 분모*의 인수일까? 체크해 보자. 분자의 주요 연산이 뭐지?
학생 : 글쎄요, 지수법, 곱셈, 그리고 덧셈이 있어요. 그래서 주요 연산은 덧셈이고 이는 연산의 위계에 따르면 최소의 우선순위를 가지지요.
교사 : 좋아. 이제 이 경우에 주요 하위식은 뭘까?
학생 : 항들이죠. ... 아, 알겠어요, 약분되는 *전체* 분자와 분모의 인수여야만 하는군요; 부분이 아니라요.

이러한 의사소통 가능성은 학생과 교사가 구조적인 토대 없이 "항"과 "인수"같은 용어를 사용하여 서로에게 이야기하는 전통적인 대수 수업과는 대조될 수 있다. 아마도 교사는 학생에게 <u>인수</u>를 약분하고 있는 지를 확실하게 하라고 훈계를 할 수 있을 것이다. 그러나 교사에게는 매우 분명하고 구체적인 구조적인 구별이 학생에게 전달되지 않는다. 대신에, 이 학생은 단지 무언가 틀린 것을 했고 뭔가 다른 것을 할 필요가 있다는 것만을 배울 뿐이다. 구조적인 기초에 대한 이해가 없다면, 이 학생에 대해서 기록되는 것은 단지 그릇된 적용과 올바른 적용에 대한 구조적 형태일 뿐이다. 결국, 이게 지속적이다 보면, 시각적 패턴이 점차로 충분히 정제되어져서 올바르지 못한 응용을 억지로 하게 만든다. 이런 방법으로 구조적 정보에 대한 의사소통을 위한 기회로서 시작된 것은 시각적 패턴을 분별없이 매칭하기 위한 지지로 제한된다.

형식적 담화로서 학생들을 대수에 문화화하기

이 글의 제목이 제안하는 바는 대수를 구조적으로 이해하는 것이 학생들에게 보이는 것처럼 그렇게 어려울 필요는 없다는 것이다. 나는 학생들의 일관된 오류는 구조적인 대수를 이해하는 데 있어

서의 어려움이 아니라, 구조적인 의미에 참여하지 못했음을 반영한다는 점을 제시하여 이러한 입장을 지지하려고 노력했다. 이 관점에서 대수의 문제는 개념적인 문제라기보다는 문화적인 문제이다. 학생들의 정답이 이해를 제시하는 것이라고 우리가 잘못 해석해왔기 때문에, 학생들에게 구조적으로 견고하고 형식적으로 엄밀한 버전의 대수를 제시하지 못해 왔다. LSS 접근 방법은 교육과정의 논증적인 구조와 학생들의 참여 문화에 좀 더 조심스럽게 관심을 기울인다.

다른 논문에서(Kirshner, 2002; Kirshner & Awtry, 2004), 나는 문화 학습은 종종 혼란스럽고 구별되지 않은 목표를 남긴 채, 개념 학습에 비해 눈에 띄지 않아 왔다고 주장했다. 이러한 이유 때문에, 나는 특히 LSS 교육과정에 의해 제시되는 정교한 문화적 목표를 주의 깊게 한정하고자 한다. 왜냐하면 구조적 대수에는 다양한 국면이 있고, 이것이 일관되고 진보적인 형태로 소개되기 위해서는 진지하고 지속적인 교수법적 노력이 필요하기 때문이다.

Ernest(1998)는 수학적 주장의 타당성을 단언하게 할 수 있는 수학적 방법의 기초적인 양상 즉, 논리성(logicality)과 형식성(formality)을 제안했다. 논리성은 추론의 명백한 과정에 의존하고 형식성은 해석되지 않은 규칙의 엄밀한 적용에 의존한다. 수학적 방법의 이러한 두 가지 면은 수학 교육의 중요한 목적을 구성한다. 우리는 학생들이 논리적으로 추론할 수 있고 통사적으로 정의된 변형에 대해서도 참(truth)을 보존하기 위해서 기호의 능력을 이용하기를 원한다.

학교 대수를 구조적 목적으로 나아가게 하기 위한 마지막 합의된 노력은 1960년대와 1970년대의 새수학 시기에 있었다. 새수학은 "집합, 관계, 함수의 개념과, 연역적 추론 및 패턴의 탐색과 같이 광범위하게 적용가능한 수학적 과정을 현명하게 사용하는 것"에 초점을 맞췄다(Fey & Graeber, 2003, p. 524). 그러나 새수학은 "극도로 형식적이고, 연역적으로 구조화되었으며 이론적이어서, ... 보통의 학생들과 수준이 낮은 학생들의 기초 수학 능력의 요구를 맞추는데 실패한 것으로"(NACOME, 1975, p.ix) 널리 알려져 있다. 새수학이 겪은 어려움을 분석할 때, 이것이 반영했던 논리주의적 아젠다를 주의해서 볼 필요가 있다(Ernest, 1985). 사실 새수학의 명백한 의도는 기하 교육과정에서 연역적 추론을 강조하던 것을 대수 교육과정까지 확장하는 것이었다:

> 대수 지도에서 이해와 의미를 강조하기 위한 한 가지 방법은 연역적 추론을 도입하는 것이다. [수학에 관한] 위원회는 기하에서만이 아니라 학교 수학의 모든 과정에서 연역적 추론을 가르쳐야 한다고 확실하게 믿는다. (대학 입학 사정 위원회, 1959, p.23)

그러나 연역적 추론은 청소년은 말할 것도 없이 성인에게도 매우 어렵다(Evans, 1982). 특히 *만일 p 라면 q 이다(if p then q)*에 기초한 연역인 조건 추론은 매우 혼란스럽다. *만일 p 라면 q 이다*가 주어질 때, 논리적 원리 긍정식(Modus Ponens)(p를 주장하면 q를 추론한다)은 간단하다; 그러나 대우 부정식(*q 가 아니다*를 주장하면 *p 가 아니다*를 추론한다)은 타당하지만, 명백하지 않다. 그리고 타당하지 않은 변형들은(즉 *p 가 아니다*를 주장하면 *q 가 아니다*를 추론하는 것과 q를 주장하면 p를 추론한다) 많은 성인들이 타당한 것으로 인식한다(Evans, 1982). 추론적 논리에 초점을 둔 것은 왜 새수학이 오로지 재능 있고 대학행(college-bound) 학생들에게만 성공적인 것처럼 보였는지를 설명할

수 있을 것이다.

대조적으로, LSS는 수학의 형식적 방법, 즉, 식과 방정식의 구조적 분석과 변형 규칙들의 엄밀한 적용에 초점을 둔다. 이제는 동치의 논리적 증거로 대수적 전개(algebraic derivation)를 간주하는 것이 의미 있다. 예를 들어, 전개식 $3x^2-27=3x^2-3\cdot9=3(x^2-9)=3(x^2-3^2)=3(x-3)(x+3)$은 $3x^2-27$과 $3(x-3)(x+3)$이 동치라는 것을 증명한다. 그러나 논리적 구조에서 그러한 전개는 조건(conditional) 추론보다는 상호조건적인(biconditional) 추론에 의존한다: $3x^2-27$은 $3(x-3)(x+3)$이 참이라면, 그리고 오로지 참일 때만 참이다; 그리고 이 전개식의 각 단계는 논리적으로 역행할 수 있다. 상호조건적인 추론은 한 항의 참 또는 거짓이 각각 다른 것의 참 또는 거짓을 타당하게 내포하므로, 성인과 아동들에게 쉽다. 위에서 제시된 모든 네 가지 추론적 가능성은 타당하다. 따라서 LSS 교육과정은 제한되지만 성취 가능한 구조적 목적을 제시하는 것으로 시작한다. 이는 중등학교에 적절한 구조적 대수에 대한 소개인데, 학생들이 학교 경험을 쌓아가게 됨에 따라 많은 학생들이 수학 문화의 영역에 더 들어가게 하기 위한 기초를 제공할 수 있는 것이다.

새수학 교육과정은 실패한 것으로 인식되고, 기초 대수에서 분별없는 기호 조작이 지속되고 있다는 점을 감안하면, 현대의 수학 교육자들이 구조적 목적을 추구하는 것에 대해서 주춤하고, 심지어는 대수의 형식적 작업이 학생들에게 의미 충실할 수 있다는 가능성마저 부인하는 것은 그다지 놀라운 일이 아니다:

> 일반화라는 행동과 구성된 일반화의 점차적인 형식화는 형식주의에 선행되어야 한다. 그렇지 않으면 형식주의는 학생 경험에 어떠한 원천도 되지 못한다. 현재 학교 대수의 커다란 실패는 형식주의가 제시된 이후에 학생들의 경험과 형식주의를 묶으려는 시도가 부적절하다는 것을 보여준다. "한 번 무의미하게 되면 항상 무의미할 것 같다"(Kaput, 1995, pp. 74-75)

NCTM(2000)의 *학교 수학을 위한 원리와 규준(Principles and Standards for School Mathematics)*은 이러한 생각을 반복하고 있으며, 대수 수업을 위한 유일한 아젠다로써 경험적 대수를 정당하다고 인정한다:

> 일반적으로, 학생들이 자신들이 공부하는 것에 대한 견고한 개념적 기초를 발달시키기 전에 과도하게 기호 조작에 몰두하면, 학생들은 기계적인 조작 이상의 것을 할 수 없게 될 것이다(NRC, 1998). 기호적 표기와 관련된 의미 있는 공부를 위한 기초는 오랜 시간에 걸쳐 전개되어야 한다. (p.39)

이러한 역사를 재분석함으로써, 우리는 성공적인 구조적 교육과정을 통해, 기호·그래프·표를 실세계 자료와 바로 연결가능하게 하는 새로운 테크놀로지에 의해서 야기되는 경험적 대수에 대한 급증하는 관심을 보완하기 위한 새로운 가능성을 볼 수 있다. 경험적 대수는 그 자체로 충분하지 않다. 대수라는 새는 상승하기 위해 양쪽 날개 모두 필요하다.