

완변수심 지진해일 전파를 위한 능동적 분산보정 유한차분모형 Self-Adjusting Dispersion-Correction Finite Difference Model for Tsunami Propagation over Slowly Varying Depth

윤성범¹, 임채호², 배재석³

Sung Bum Yoon¹, Chae Ho Lim² and Jae Seok Bac³

1. 서 론

해저지진에 의한 지형 변동으로 발생하는 지진해일은 분산, 굴절, 회절 및 반사 등에 의해 파가 변형되면서 전파하다가 해안에 가까워지면 천수화 및 처오름 현상이 나타나게 된다. 지진해일파는 장파와 단파가 합성되어 있어 먼 거리를 전파하는 경우 물리적인 분산효과가 매우 중요하게 작용한다. 복잡한 지진해일 전파과정을 수치모의하기 위해서는 분산효과 및 파의 변형을 잘 재현할 수 있는 수치모형의 개발이 필요하다.

분산효과를 고려하기 위한 기존의 지진해일 전파 수치모형은 지배방정식으로 천수방정식을 이용하고 leap-frog 수치기법을 주로 사용하였다 (Imamura et al., 1988; Cho, 1995; Yoon, 2002). 이 기법은 격자간격을 적절히 선정하면 분산효과를 옳게 고려할 수는 있으나, 수심이 변하는 실제 지형으로 확장할 경우 사용된 분산보정 수치기법의 특성상 정확한 수치모의가 불가능했다. 이에 윤 등(2004)은 주어진 수심, 시간 및 격자간격에 의해 결정되는 분산보정계수를 도입한 새로운 개념의 능동적 분산보정기법을 개발하고, 이를 이용한 지진해일 전파 유한차분모형을 개발하여 등수심상을 전파하는 가상지진에 대한 수치해와 선형 Boussinesq 방정식의 해석해를 비교하여 좋은 결과를 얻은 바 있다. 이 수치모형은 복잡한

Boussinesq 방정식 대신 간단한 형태의 선형 Boussinesq-type 파동방정식을 이용하면서도 Boussinesq 방정식과 같은 정도의 물리적 분산효과를 고려할 수 있을 뿐만 아니라 순수양해법을 사용하기 때문에 매우 실용적이다.

본 연구에서는 윤 등(2004)의 능동적인 분산보정 유한차분모형을 수심이 변하는 지형에 대한 모형으로 확장한 후 분산보정 능력을 검증하기 위해 1차원 완변수심상을 전파하는 가상지진에 대해 개발된 수치모형을 이용하여 계산된 결과와 FUNWAVE(Wei and Kirby, 1995; Kirby et al., 1998)에 포함되어 있는 선형화된 Nwogu(1993)의 Boussinesq 방정식에 의해 계산된 수치해를 비교하여 개발된 수치모형의 실제 지형에서의 적용 가능성 및 정확성을 검토하고자 한다.

2. 지배방정식

대양을 전파하는 지진해일은 대부분의 해역에서 수심에 비해 수면변위가 미소하므로 비선형성은 무시할 수 있다. 먼 거리를 전파하는 지진해일 전파에 대한 지배방정식인 2차원 선형 Boussinesq 방정식을 수심이 상대적으로 작고 일정한 장파조건($kh < \pi/10$)하에서 합성하면 다음과 같은 2차원 파동방정식(wave equation)이 유도된다.

1 한양대학교 공학대학 토목환경공학과 교수

2 발표자: 한양대학교 공학대학 토목환경공학과 박사 후 과정

3 한양대학교 공학대학 토목환경공학과 석사과정

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_0^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{C_0^2 h^2}{3} \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) = O(k^6 h^6) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 ζ 는 정수면으로부터의 수면변위(m), g 는 중력가속도(m/s²), h 는 정수면으로부터 바닥까지의 수심(m), $C_0(=\sqrt{gh})$ 는 2차원 파동방정식의 전파속도(m/s), k 는 파수(wave number)이며, 3번째항은 물리적인 분산항을 의미한다.

한편 Krenk(2001)는 2차원 파동방정식의 수치 분산오차를 제거하기 위해 인위적인 분산항을 추가하여 선형 Boussinesq 방정식과 유사한 형태의 다음과 같은 선형 Boussinesq-type 파동방정식을 제안한 바 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_0^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ & + \beta C_0^2 \Delta x^2 \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 Krenk(2001)가 제시한 β 는 수치적 분산오차를 제거하기 위한 보정계수이다.

등수심을 전제로 제안된 선형 Boussinesq-type 파동방정식 (2)는 수심이 완만히 변한다는 가정하에 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] \\ & + \gamma \Delta x^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right\} \right] \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 γ 는 수치분산오차는 제거하고, 물리적 분산효과를 정도 높게 고려하기 위해 도입한 분산보정계수이다. 식(3)에 포함된 4차 공간미분항을 시간에 대하여 2단계로 나누어 2차 공간미분항으로 줄이면 식(4)와 (5)로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + C_0^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v - \gamma \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

여기서 v 는 임시변수이다.

본 연구에서 완변수심상을 전파하는 지진해일을 수치모의하기 위해 식(4)와 (5)를 지배방정식으

로 사용하였다.

3. 능동적 분산보정기법

완변수심에 대한 식(3)을 시간에 대하여 2단계로 나누어 정리한 식(4)와 (5)에 대한 유한차분식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j}^{n+1/2} - v_{i,j}^{n-1/2}}{\Delta t} \\ & - g \left[\left(\frac{h_{i+1,j}^n - h_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{h_{i,j+1}^n - h_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \left(\frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \right] \\ & - C_0^2 \left[(1-a) \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \\ & + \frac{a}{2} \left(\frac{\zeta_{i+1,j-1}^n - 2\zeta_{i,j-1}^n + \zeta_{i-1,j-1}^n}{\Delta x^2} \right. \\ & \left. + \frac{\zeta_{i+1,j+1}^n - 2\zeta_{i,j+1}^n + \zeta_{i-1,j+1}^n}{\Delta x^2} \right) \\ & \left. + \frac{a}{2} \left(\frac{\zeta_{i-1,j+1}^n - 2\zeta_{i-1,j}^n + \zeta_{i-1,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\zeta_{i+1,j+1}^n - 2\zeta_{i,j+1}^n + \zeta_{i+1,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} - v_{i,j}^{n+1/2} \\ & + \gamma \Delta x^2 \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1/2} - 2v_{i,j}^{n+1/2} + v_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} \right) \\ & + \frac{v_{i,j+1}^{n+1/2} - 2v_{i,j}^{n+1/2} + v_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y^2} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 a 는 대각선 방향 분산오차를 제거하기 위해 도입된 가중치(weighting factor)이고, ζ 와 v 는 시간단계가 엇갈려 배치된다. 이 유한차분식에 대한 분산오차를 분석하기 위해 수심 h 가 일정하고, 격자간격 Δx 와 Δy 가 동일하다는 가정하에 식(6)과 식(7)에 대한 변형방정식(modified equation)은 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_0^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{12} C_0^2 \Delta x^2 \cdot \\ & (1-12\gamma - C_0^2) \cdot \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) \\ & - C_0^2 \Delta x^2 \left(a - \frac{1}{6} \right) \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & = O(\Delta x^3, \Delta x^2 \Delta t, \Delta x \Delta t^2, \Delta t^3) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $C_r (= C_o \Delta t / \Delta x)$ 은 Courant number이다. 만약 가중치 $\alpha=1/6$ 이면, 대각선 방향에 대한 분산오차항인 식(8)의 4번째항이 제거된다. 또한 식(1)의 물리적 분산항이 식(8)의 3번째항과 같아지도록 놓고 정리하면 분산보정계수 γ 는 다음과 같이 수심, 격자간격 및 시간간격의 함수로 정리할 수 있다(윤 등, 2004).

$$\gamma = \frac{1}{12} \left\{ 1 - \left(\frac{\sqrt{4h^2 + g h \Delta t^2}}{\Delta x} \right)^2 \right\} \quad (9)$$

윤 등(2004)은 주어진 수심과 격자 및 시간간격에 의해 계산된 분산보정계수 γ 를 이용하여 등수심을 전파하는 2차원 Gaussian 분포의 초기파형에 대한 수치해를 구하고 해석해와 비교하여, 개발된 능동적 분산보정기법이 상당히 정확함을 보인다. 하지만 이 분산보정기법은 수심이 일정하다는 가정하에 유도 되었기 때문에 완변수심에 대한 검증이 이루어져야 할 것이다. 그러나 완변수심에 대한 해석해가 없어 본 연구에서 사용한 선형 Boussinesq-type 파동방정식(BTWE)과 Boussinesq model로 우수함이 입증된 바 있는 FUNWAVE(Wei and Kirby, 1995; Kirby et al., 1998)에 포함되어 있는 선형화된 Nwogu(1993)의 Boussinesq 방정식에 의해 계산된 수치해를 각각 비교해 보고자 한다.

4. 완변수심 분산보정기법의 검증

Fig. 1은 수심 1500m에서 500m까지 완만히 변하는 계산영역에 대한 개념도로써 사용된 초기조건과 시간에 대한 수면변위를 비교하기 위해 설치한 wave gages의 위치를 보여주고 있다. 초기조건으로 사용된 Gaussian 형상의 수면변위에 의한 선단파의 주기는 대략 360sec가 되도록 특성반경을 7500m로 사용하였다. wave gage ①은 수심 1500m의 등수심상에 위치하며, ②는 완변수심상 1000m, 그리고 ③은 500m의 등수심상에 위치하고 있다.

FUNWAVE와 같은 Boussinesq 방정식을 이용한 수치모형은 물리적 분산항을 포함하고 있기 때문에 수치분산오차를 최소화하기 위해서는 매우 작은 격자간격을 사용해야 한다. 따라서 2000m와

500m 격자간격에 대해 각각 수치모의를 수행하였으며, 본 연구에서 개발한 능동적 분산보정 유한차분모형은 상대적으로 큰 격자의 사용이 가능한 장점이 있어 2000m 격자간격만을 사용하였다.

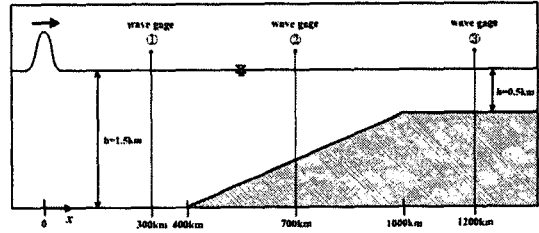
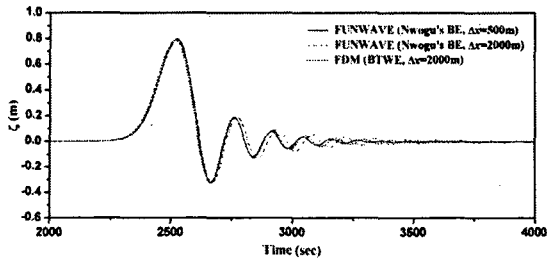


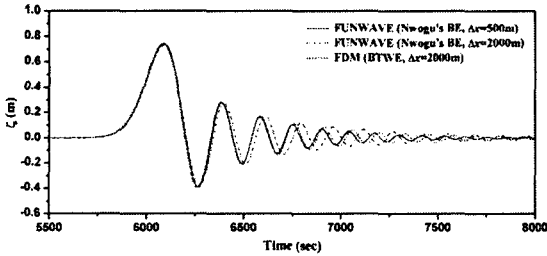
Fig. 1 Schematic diagram of a slowly varying topography, wave gages and initial condition

Fig. 2는 1차원 완변수심상을 전파하는 가상지진에 대해 분산보정 유한차분모형과 FUNWAVE를 이용하여 Fig. 1에 제시한 3개의 wave gages에서 계산된 time series를 각각 비교한 결과이다. Fig. 2(a)-(c)에 나타낸 바와 같이 2000m 격자간격과 개발된 완변수심 분산보정 유한차분모형(FDM)을 이용하여 수치모의한 결과와 500m 격자간격을 사용한 FUNWAVE의 결과가 매우 잘 일치하는 좋은 결과를 보이고 있다. 이에 반해 FUNWAVE ($\Delta x=2000m$)의 결과는 수심이 알아질수록 즉, Fig. 2(a)에서 Fig. 2(c)로 갈수록 FUNWAVE ($\Delta x=500m$)에 비해 분산이 과대산정 되는 경향을 보이고 있다. 이는 앞에서 언급한 바와 같이 FUNWAVE와 같은 Boussinesq model을 사용하는 경우 수심에 비해 사용된 격자간격이 큰 경우 수치적인 분산오차가 발생하기 때문이다. 또한 2000m 격자간격을 사용하는 경우에는 두 모형 모두 짧은 파에 대해서는 FUNWAVE ($\Delta x=500m$) 보다 약간 크게 산정되고 있다. 이는 2000m 격자가 수심 500m에 비해 상대적으로 크기 때문에 격자 해상도가 좋지 않아 나타나는 오차로 낮은 격자 해상도를 높이기 위해서 격자적속기법을 도입하면 해결이 가능하다.

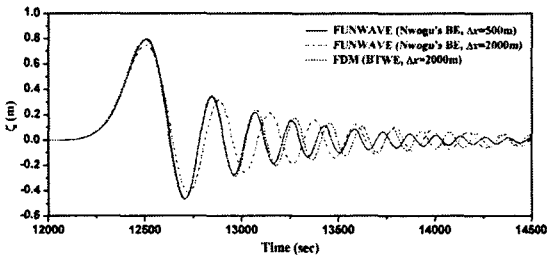
이상의 결과를 종합해 보면 수심이 완만하게 변하는 경우에 개발된 능동적 분산보정 수치모형을 이용하면 사용된 격자간격에 무관하게 FUNWAVE와 유사한 결과를 주고 있음을 보였으므로 실무에 적용함에 있어서 큰 무리가 없을 것으로 판단된다.



(a) Time series at location ① ($h=1500\text{m}$)



(b) Time series at the location ② ($h=1000\text{m}$)



(c) Time series at location ③ ($h=500\text{m}$)

Fig. 2 Comparison of time series computed by FUNWAVE and the present model

5. 결 론

본 연구에서 개발한 완변수심에 대한 지진해일 전파 유한차분모형은 선형 Boussinesq-type 파동 방정식을 지배방정식으로 사용한다. 또한 수치분산오차는 제거하고, 물리적 분산효과를 고려할 수 있는 능동적 분산보정기법을 도입하였다. 완변수심상을 전파하는 Gaussian 형상의 초기 수면변위에 대하여 개발된 수치모형을 이용하여 수치모의한 결과와 FUNWAVE의 선형화된 Nwogu의 Boussinesq 방정식에 의해 계산된 수치해를 비교하였다. 그 결과 개발된 능동적 분산보정 유한차분모형이 큰 격자간격을 사용함에도 불구하고 작은 격자를 사용한 FUNWAVE(Boussinesq model)의 결과와 같은 정도의 정확성을 주고 있음이 검증되었다. 특히 순수양해법을 적용하고 상대적으로 큰 격자의 사용이 가능하므로 실제 지형에 적용함에

있어 FUNWAVE에 비해 매우 경제적인 뿐만 아니라 효율적이다.

감사의 글

본 연구의 수행은 한국전력공사 전력연구원의 연구용역 '한반도 해안 지진해일 전산해석'의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- 윤성범, 임채호, 이종인 (2004). 지진해일 전파 모의를 위한 2차원 유한차분모형의 능동적 분산보정기법. 대한토목학회논문집, 24(6B), 577-583.
- Cho, Y.S. (1995). Numerical simulations of tsunami propagation and run-up. Ph.D. Thesis, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, NY.
- Imamura, F., Shuto, N. and Goto, C. (1988). Numerical simulation of the transoceanic propagation of tsunamis. Proc. of 6th Congress Asian and Pacific Regional Division, IAHR, Japan, 265-271.
- Kirby, J.T., Wei, G., Chen, Q., Kennedy, A.B. and Dalrymple, R.A. (1998). Fully nonlinear Boussinesq wave model. User Manual. Rep. No. CACR-98-06, Univ. of Delaware.
- Krenk, S. (2001). Dispersion-corrected explicit integration of the wave equation. Computer methods in applied mechanics and engineering, 191, 975-987.
- Nwogu, O. (1993). An alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation. J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng., 119(6), 618-638.
- Wei, G. and Kirby, J.T. (1995). A time-dependent numerical code for the extended Boussinesq equations. J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng., 121(5), 251-261.
- Yoon, S.B. (2002). Propagation of distant tsunamis over slowly varying topography. J. Geophys. Res., AGU, 107(C10), 4(1)-4(11).