휴리스틱 방법을 이용한 준비기간을 갖는 휴가형 $Geo^X/G/1$ 모형의 평균대기시간 분석

이성희 · 김성진 · 채경철
(한국과학기술원 산업공학과)

Heuristic Interpretation of the Mean Waiting Time of $Geo^X/G/1$ Vacation Queues with Set-up Time

Sung H. Lee · Sung J. Kim · Kyung C. Chae

Abstract

We present heuristic interpretations of the mean waiting time of $Geo^X/G/1$ vacation queues with set-up time. The heuristic interpretation of the mean waiting time is originally proposed for the continuous-time queues. We demonstrate that the heuristic approach is useful for the discrete-time queues as well.

1. 서론

본 연구의 목적은 준비기간을 갖는 휴가형 $Geo^X/G/1$ 대기행렬 시스템에서의 평균대기시간을 휴리스틱 방법을 이용하여 간단히 구하고자 하는 것이다.

휴리스틱 접근 방법은 Chae and Lee[3]의 연구에서 연속시간 대기행렬시스템에 대하여 처음 제안이 되었는데 이는 이산시간 대기행렬 시스템에서도 역시 유용하게 쓰일 수 있다. 대부분의 대기행렬 모델의 경우 성능척도가 PGF(Probability Generating Function)나 LT(Laplace Transform)형태로 주어지므로 이를 미분하여 성능척도의 평균값을 구하게 되는데, 변환형태가 복잡하여 미분하기가 쉽지 않은 경우도 있으며 변환자체를 구하기가 어려운 경우도 많다. 그러나 휴리스틱 방법은 임의의 도착고객이 바라보는 관점을 이용하여 무변환(Transform-free) 형태의 평균대기시간을 제공한다. 또한 휴리스틱 방법은 변환형태를 이용하여 평균값을 구한 경우 이 값을 확인하는 과정에서도 유용하게 쓰일 수 있다는 장점이 있으며 Medhi[4, pp.416-423]에도 다양한 연속시간 대기행렬시스템의 예를 들어서 그 유용성이 소개된 바 있다.

최근, 디지털 통신시스템으로의 다양한 응용가능성으로 인하여 이산시간 대기행렬모형에 대한 연구가 증대되고 있다. 이는 비트, 셀, 패킷 단위로 운용되는 디지털 시스템을 이산시간 대기행렬모형으로 보다 잘 묘사할 수 있기 때문이다. 휴가형 대기행렬시스템이란 시스템에 고객이 존재함에도 불구하고 서버가 어떤 이유로 서비스를 제공하지 않는 모든 대기행렬시스템을 통칭한다. 휴가형 대기행렬시스템은 60년대에 소개가 되었으나, 70년대와 80년대를 거치면서 통신시스템, 생산시스템들이 발전하기 시작하면서 그 유용성이 증가되었고, 많은 분야에서 이를 사용하기 시작했다. 이산시간 휴가형 대기행렬시스템에 대한 연구는 Takagi[6]에서 찾을 수 있다.

본 연구에서는 시스템에 도착한 모든 고객이 서비스를 받고 나가 시스템에 고객이 없을 때, 서버가 어떤 이유로 고객이 도착하였음에도 불구하고 서비스를 제공하지 않는 휴가기간이 존재하고, 이 휴가기간이 끝난 후에 서버가 임의의 길이의 준비기간을 거쳐 서비스를 시작하게 되는 시스템을 고려한다. Hur and Ahn[5]은 부가변수법을 이용하여 이러한 준비기간을 갖는 연속시간 휴가형 대기행렬시스템에 관하여 연구를 하였다.

본 연구는 Hur and Ahn[5]의 연구를 휴리스틱 방법을 이용하여 이산시간 대기행렬시스템으로 확장을 하고 평균대기시간을 제시하는데 의의가 있으며, 이산시간 대기행렬시스템에도 휴리스틱 방법이 유용하게 쓰일 수 있다는 점을 보인다.

2. 기본 가정 및 변수 정의

이산시간 대기행렬시스템을 분석하기 위해서는 연속시간 대기행렬시스템과 다른 많은 새로운 가정의 도입이 필요하다[6]. 이산시간 대기행렬시스템에서 시간축은 슬롯(Slot)이라는 기본단위의 등간격으로 나누어진다. 서비스 시간은 기본 슬롯의 정수배이며 서비스의 시작과 종료는 슬롯의 경계와 동기화된다. 고객의 도착은 슬롯의 중앙에서 발생하지만, 실제로는 슬롯의 경계에서만 시스템의 상태가 관찰되므로, 슬롯의 경계에서 도착이 이루어지는 것으로 가정한다. 이 때 한 슬롯동안 일어난 도착이 해당 슬롯의 맨 끝(슬롯 경계 직전)에 도착한 것으로 가정하는 모형을 후도착모형(Late Arrival System)이라 하고, 해당 슬롯의 맨 처음(슬롯 경계 직후)에 도착한 것으로 가정하는 모형을 선도착모형(Early Arrival System)이라 한다. 본 논문에서는 통신시스템에 보다 적합한 후도착모형을 가정하고 논의를 전개한다[2, p.2].

이산 시간 대기행렬시스템을 분석하기 위해 필요한 확률 변수와 생성함수를 다음과 같이 정의한다.

λ = 한 슬롯동안 도착하는 고객 수

$\lambda(k)$ @ $\Pr[\lambda = k], \quad k = 0,1,2,\mathrm{L}$

$\Lambda(z)$ @ $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda(k) z^k$

S = 각 고객의 서비스시간

$s(k)$ @ $\Pr[S = k], \quad k = 1,2,\mathrm{L}$

$S(z)$ @ $\sum_{k=1}^{\infty} s(k) z^k$

V = 각 휴가기간의 길이

$v(k)$ @ $\Pr[V = k], \quad k = 1,2,\mathrm{L}$

$V(z)$ @ $\sum_{k=1}^{\infty} v(k) z^k$

Y = 각 준비기간의 길이

$y(k)$ @ $\Pr[Y = k], \quad k = 1,2,\mathrm{L}$

$Y(z)$ @ $\sum_{k=1}^{\infty} y(k) z^k$

Λ^+ = 슬롯에 최소 1명 이상이 도착했다는 가정하에서의 도착 그룹 고객 수

$\Lambda^+(z) = [\Lambda(z) - \lambda(0)]/[1 - \lambda(0)]$

제공로드(Offered load) $\rho = \lambda E(S)$

여기서 주의해야 할 점은 본 모형은 이산시간 대기행렬시스템이기 때문에 변환형태가 LT가 아니라 PGF로 정의가 된다는 것이다.

3. 복수휴가와 준비기간을 갖는 모형

본 모형에 앞서서 먼저 유휴기간동안 서버가 휴가를 가지 않는 기본 $Geo^X/G/1$ 대기행렬모형을 고려하자. $Geo^X/G/1$ 대기행렬모형에서 평균대기시간을 구하기 위한 heuristic 방정식은 다음과 같다.

$$W_q = [L_q + E(\Lambda_R^+)]E(S) + P(B)E(S_R) \qquad (1)$$

이 때, W_q = 평균대기시간,

L_q = 평균대기고객수,

Λ_R^+ = 슬롯에 최소 1명 이상이 도착했다는 가정하에서의 그룹내 잔여고객수,

S_R = 잔여서비스시간,

$P(B)$ = 서버가 바쁠 확률.

위 식이 의미하는 바는 도착하는 고객은 도착시 서비스 대기중인 고객과 그룹 내 앞선 고객의 총 서비스시간만큼을 '기본적으로' 기다려야 하며, 바쁜 기간에 도착하는 경우에는 진행중인 서비스의 잔여시간만큼을 '추가적으로' 기다려야 한다는 것이다. 이 식을 정리하여 W_q를 얻기 위하여 각 변수들의 기대값은 다음과 같이 새롭게 표현할 수 있다. 그룹 내 잔여고객수의 기대값은 $E(\Lambda_R^+) = E(\Lambda^2)/2[E(\Lambda)-1]$으로, 잔여서비스시간의 기대값은 $E(S_R) = E(S^2)/2[E(S)-1]$으로 표현이 가능하다[7]. 그리고 Little's law에 의해 $L_q = \lambda W_q$임이 잘 알려져 있으며, $P(B) = \rho = \lambda E(S)$ 임을 쉽게 알 수 있다[1]. 이 때, 안정된 시스템을 위해 $P(B) < 1$ 가 유지되어야 한다. 이런 식들을 이용해 식 (1)을 정리하면 다음과 같다.

$$W_q = \frac{E(S)}{1-\rho}E(\Lambda_R^+) + \frac{\rho}{1-\rho}E(S_R)$$

$$= \frac{E(S)}{1-\rho}\frac{\mathrm{E}[\Lambda(\Lambda-1)]}{2\mathrm{E}(\Lambda)} + \frac{\rho}{1-\rho}\frac{E[S(S-1)]}{2E(S)}. \qquad (2)$$

Heuristic 방법을 이용하여 얻은 식 (2)는 부가변수법을 이용한 Takagi[6, p.18]에 제시된 식과 일치함을 알 수 있다.

복수휴가와 준비기간을 갖는 모형에서는 시스템에 있는 모든 고객이 서비스를 받아 바쁜 기간이 끝나게 되면 서버는 V 시간 동안 휴가를 떠난다. 휴가 후 돌아와서 시스템에 기다리고 있는 고객이 없으면 다시 V 시간의 휴가를 떠나고, 고객이 있으면 즉시 Y 시간 동안의 준비기간을 거쳐 바쁜 기간이 시작된다. 먼저, W_q를 구하기 위한 heuristic 방정식은 다음과 같다.

$$W_q = [L_q + E(\Lambda_R^+)]E(S) + P(B)E(S_R)$$

$$+ P(V)[E(V_R) + E(Y)] + P(Y)E(Y_R). \qquad (3)$$

위 식이 의미하는 바는 도착하는 고객은 '기본적으로' 휴가가 없는 기본 $Geo^X/G/1$의 평균대기시간만큼(1)을 기다려야 하며, 휴가기간 동안 도착하는 경우에는 진행중인 휴가기간의 잔여시간과 준비기간만큼, 준비기간 동안 도착하는 경우에는 진행중인 준비기간의 잔여시간만큼을 '추가적으로' 기다려야 함을 나타낸다. 잔여휴가기간의 기대값은 $E(V_R) = E(V^2)/2[E(V)-1]$, 잔여준비기간의 기대값은 $E(Y_R) = E(Y^2)/2[E(Y)-1]$로 표현이 가능하다. 식 (3)을 W_q에 관하여 나타내기 위해서는 $P(B)$와 서버가 휴가중일 확률 $P(V)$ 그리고 서버가 준비기간 중에 있을 확률 $P(Y)$ 값이 필요한데 이는 cycle분석을 통하여 얻어낸다.

본 모형의 유휴기간 I는 복수 휴가기간(Vacation Period)과 준비기간의 합으로 이루어지며 평균유휴기간은 다음과 같다.

$$E(I) = E(V)/[1-V[\lambda(0)]] + E(Y).$$

이 때, $V[\lambda(0)]$은 한 번의 휴가기간 동안 한 명의 고객도 도착하지 않을 확률이며, $1/[1-V[\lambda(0)]]$은 복수 휴가기간동안의 평균 휴가횟수를 나타낸다. 서버가 한 개 이므로 $P(B) = \lambda E(S) = \rho$의 관계가 성립하며 평균사이클 길이를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E(C) = \frac{E(I)}{1-\rho} = \frac{E(V) + [1-V[\lambda(0)]]E(Y)}{(1-\rho)[1-V[\lambda(0)]]}.$$

이를 이용하여 추가로 얻어야 할 미지수인 $P(V)$, $P(Y)$를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(Y) = \frac{E(Y)}{E(C)} = \frac{(1-\rho)[1-V[\lambda(0)]]E(Y)}{E[V] + [1-V[\lambda(0)]]E(Y)},$$

$$P(V) = P[I] - P[Y] = \frac{(1-\rho)E(V)}{E[V] + [1-V[\lambda(0)]]E(Y)}.$$

지금까지 얻어낸 미지수를 모두 이용하여 식 (3)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{E(S)}{1-\rho}E(\Lambda_R^+) + \frac{\rho}{1-\rho}E(S_R) \\ &+ \frac{P(V)}{1-\rho}[E(V_R) + E(Y)] + \frac{P(Y)}{1-\rho}E(Y_R) \\ &= \frac{E(S)}{1-\rho}\frac{E[\Lambda(\Lambda-1)]}{2E(\Lambda)} + \frac{\rho}{1-\rho}\frac{E[S(S-1)]}{2E(S)} \\ &+ \frac{E[V(V-1)] + 2E[V]E[Y] + [1-V[\lambda(0)]]E[Y(Y-1)]}{2\{E(V) + [1-V[\lambda(0)]]E(Y)\}}. \quad (4) \end{aligned}$$

식 (4)에 대한 연속시간 대기행렬 버전은 Hur and Ahn[5]에 제시되어 있으며 두 식을 비교해 보면 이산시간의 특성이 반영된 몇 가지 부분만 제외하면 매우 유사함을 알 수 있다. 또한, 식 (4)에서 $V=1$이라 하면 W_q는 복수 휴가기간이 없고 준비기간만을 가진 $Geo^X/G/1$ 대기행렬 모형의 평균대기시간[6, p.155]과 일치함을 알 수 있다. 그리고 식 (4)에서 $Y=0$이라 하면 W_q는 준비기간이 없고 복수 휴가기간만을 가진 $Geo^X/G/1$ 대기행렬 모형의 평균대기시간[6, p.102]과 일치함을 알 수 있다.

4. 단수휴가와 준비기간을 갖는 모형

단수휴가와 준비기간을 갖는 모형에서는 시스템에 있는 모든 고객이 서비스를 받아 바쁜 기간이 끝나게 되면 서버는 V시간 동안 휴가를 떠난다. 휴가 후 돌아와서 시스템에 기다리고 있는 고객이 없으면 첫 고객이 올 때까지 기다리게 되며, 첫 고객이 오자마자 즉시 Y시간 동안의 준비기간을 거쳐 바쁜 기간이 시작되고, 기다리고 있는 고객이 있으면 즉시 Y시간 동안의 준비기간을 거쳐 바쁜 기간이 시작된다. 유휴기간은 단수휴가기간, 휴지기간, 준비기간의 합으로 이루어 진다. 휴지기간(Dormant Period)이란 서버가 휴가를 마치고 시스템에 돌아왔을 때 고객이 없을 경우 첫 고객이 올 때까지 기다리는 기간을 말한다. 먼저, W_q를 구하기 위한 heuristic 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_q &= [L_q + E(\Lambda_R^+)]E(S) + P(B)E(S_R) \\ &+ P(V)\{E(V_R)+E(Y)\} + P(Y)E(Y_R) + P(D)E(Y). \quad (5) \end{aligned}$$

이 때, $P(D)$는 서버가 휴지기간중에 있을 확률을 의미한다. 위 식이 의미하는 바는 도착하는 고객은 '기본적으로' 휴가가 없는 기본 $Geo^X/G/1$의 평균대기시간만큼(1)을 기다려야 하며, 단수휴가기간 동안 도착하는 경우에는 진행중인 휴가기간의 잔여시간과 준비기간만큼, 준비기간 동안 도착하는 경우에는 진행중인 준비기간의 잔여시간만큼, 그리고 휴지기간 동안 도착하는 경우에는 준비기간만큼을 '추가적으로' 기다려야 함을 나타낸다. 식 (5)를 W_q에 관하여 나타내기 위해서는 $P(V)$, $P(Y)$, $P(D)$ 값이 필요한데 이는 cycle분석을 통하여 얻어낸다.

본 모형의 유휴기간은 위에서 언급한 세 부분으로 이루어 지며 평균유휴기간은 다음과 같다.

$$E(I) = E(V) + V[\lambda(0)]/[1-\lambda(0)] + E(Y).$$

이 때, $1/[1-\lambda(0)]$ 은 평균 고객도착간 시간을 나타내며, 평균사이클 길이는 다음과 같다.

$$E(C) = \frac{E(I)}{1-\rho} = \frac{[1-\lambda(0)][E(V)+E(Y)] + V[\lambda(0)]}{(1-\rho)[1-\lambda(0)]}.$$

평균사이클 길이와 평균유휴기간의 길이를 이용하여 미지수인 $P(V)$, $P(Y)$, $P(D)$ 를 구할 수 있다.

$$P(V) = \frac{E[V]}{E[C]} = \frac{(1-\rho)[1-\lambda(0)]E(V)}{V[\lambda(0)] + [1-\lambda(0)][E(V)+E(Y)]},$$

$$P(Y) = \frac{E(Y)}{E(C)} = \frac{(1-\rho)[1-\lambda(0)]E(Y)}{V[\lambda(0)] + [1-\lambda(0)][E(V)+E(Y)]},$$

$$P(D) = \frac{E(D)}{E(C)} = \frac{(1-\rho)V[\lambda(0)]}{V[\lambda(0)] + [1-\lambda(0)][E(V)+E(Y)]}.$$

지금까지 얻어낸 미지수를 모두 이용하여 식 (5)를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{E(S)}{1-\rho}E(\Lambda_R^+) + \frac{\rho}{1-\rho}E(S_R) \\ &+ \frac{P(V)}{1-\rho}[E(V_R)+E(Y)] + \frac{P(Y)}{1-\rho}E(Y_R) + \frac{P(D)}{1-\rho}E(Y) \\ &= \frac{E(S)}{1-\rho}\frac{E[\Lambda(\Lambda-1)]}{2E(\Lambda)} + \frac{\rho}{1-\rho}\frac{E[S(S-1)]}{2E(S)} \\ &+ \frac{[1-\lambda(0)]\{E[Y(Y-1)+E[V(V-1)]\}}{2\{[1-\lambda(0)]E(Y)+[1-\lambda(0)]E(V)+V[\lambda(0)]\}} \\ &+ \frac{2E[Y]\{[1-\lambda(0)]E(V)+V[\lambda(0)]\}}{2\{[1-\lambda(0)]E(Y)+[1-\lambda(0)]E(V)+V[\lambda(0)]\}}. \end{aligned} \quad (6)$$

위 식 (6)에 대한 연속시간 대기행렬 버전은 Hur and Ahn[5]에 제시되어 있다. 또한, 식 (6)에서 $V=1$ 이라 하면 W_q 는 단수 휴가기간이 없고 준비기간만을 가진 $Geo^X/G/1$ 대기행렬 모형의 평균대기시간[6, p.155]과 일치함을 알 수 있다. 그리고 식 (6)에서 $Y=0$ 이라 하면 W_q 는 준비기간이 없고 단수 휴가기간만을 가진 $Geo^X/G/1$ 대기행렬 모형의 평균대기시간[6, p.134]과 일치함을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 휴리스틱 방법을 이용하여 준비기간을 갖는 휴가형 $Geo^X/G/1$ 대기행렬 시스템의 평균대기시간을 간단하게 구할 수 있음을 보였다. 이는 Chae and Lee[3]가 제안한 휴리스틱 방법이 이산시간 대기행렬시스템에도 성립함을 보인 것이다.

참고문헌

[1] 이호우, [대기행렬이론], 개정판, 시그마프레스, 1998.

[2] Bruneel, H. and B. G. Kim, *Discrete-Time Models for Communication System Including ATM*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.

[3] K. C. Chae and H. W. Lee, "$M^X/G/1$ Vacation Models with N-Policy: Heuristic Interpretation of the Mean Waiting Time", *Journal of the Operational Research Society*, Vol.46, No.2(1995), pp.258-264.

[4] Medhi, *Stochastic Models in queueing theory*, second edition, Academic Press, 2003.

[5] Sun Hur and Suneung Ahn, "Batch arrival queues with vacations and server setup", *Applied mathematical modeling*, 29 (2005), pp.1164-1181.

[6] Takagi, H., *Queueing Analysis, Vol 3 : Discrete-Time Systems*, North-Holland, Amsterdam, 1993.