D-정책을 갖는 BMAP/G/1 대기행렬 시스템의 일량 및 대기시간분석
Workload and waiting time analysis of BMAP/G/1 queue under *D*-policy

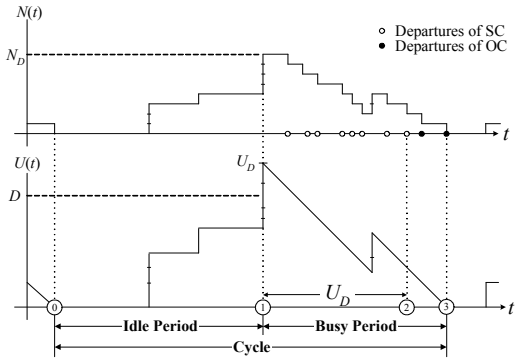
백정우, 이호우, 이세원, 김상안
경기도 수원시 장안구 천천동 300
성균관대학교 시스템경영공학과 OR 연구실 (440-746)
Email : rainbeak@skku.edu
Email : hwlee@skku.edu
Email : swlee94@skku.edu
Email : seine77@skku.edu

abstract

본 연구는 *D*-정책을 갖는 BMAP/G/1 대기행렬 시스템의 일량(workload) 및 대기시간(waiting time)을 분석한다. 유휴한 서버는 도착하는 고객들의 서비스 시간의 총합이 주어진 임계점 D를 넘어야만 서비스를 시작한다. 고객의 도착과정은 집단마코비안도착과정(BMAP, Batch Markovian Arrival Process)을 따른다. 본 논문에서는 이러한 시스템의 일량 및 대기시간에 대한 LST를 구하고, 이로부터 평균일량 및 평균대기시간을 유도한다. 또한 $BMAP/G/1$의 특별한 경우인 $M^X/G/1$인 경우와 대기시간의 비교를 행한다.

1. 서론

D-정책은 Balachandran[3]과 Balachandran and Tijms[4]에 의하여 처음 시작이 되었는데, 이들의 주된 관심은 $M/G/1$ 대기행렬시스템에 단위시간당 평균비용을 최소로 할 수 있는 최적의 D를 결정하는 것이었다. 이들의 연구에 대하여 Boxma[5]는 선형비용구조 하에서, 최적 D^*-정책이 N^*-정책보다 모든 경우에 대하여 더 좋다는 것을 밝혔다. 그러나, 위의 결과는 비용모델이 단위시간당 일량의 유지비용과 서어버의 재가동비용으로 이루어져 있다는 가정 하에서만 성립한다. 이에 대하여Artalejo[1][2]는 비용모델이 단위시간당 고객의 유지비용과 서어버의 재가동비용으로 이루어져 있다는 가정 하에서는 N-정책이 D-정책보다 더 좋을 수도 있음을 밝혔다. D-정책 하의 고객수분포에 대한 분석은 Dshalalow[7]가 최초이다. 그는 D-정책과 휴가를 고려한 대기행렬시스템의 고객수에 대한 분석을 하였는데, 그의 모델은 바쁜기간이 시작됨과 동시에 그 동안 도착한 고객에게 새로운 iid 서비스시간을 할당하는 것이었다. 이렇게 되면 그 동안 도착한 고객들의 서비스시간에 대한 종속성이 깨지게 된다. 이것은 Chae and Park[6]과 Artalejo[1][2]에 의하여 지적되었다. Chae and Park[6]은 이러한 점을 수정하여 D-정책을 갖는 $M/G/1/FCFS$ 시스템에서의 고객수분포를 PGF 형태로 유도하였고, Artalejo[2]는 같은 시스템의 고객수분포를 분포함수 형태로 유도하였다. 또한, Lee et al.[11]은 도착과정이 Markovian인 경우에 대한 고객수, 일량 대기시간에 대한 통합적인 접근방법을 유도하였다. 도착과정이 MAP 및 $BMAP$인 경우에 대한 연구가 된 것은 매우 최근이다. Lee and Song[9]은 D-정책을 갖는 $MAP/G/1$ 대기행렬시스템의 임의시점에서의 고객수분포를 유도하였으며, Lee et al.[10]은 D-정책을 갖는 $MAP/G/1$ 대기행렬시스템의 임의시점에서의 일량 및 대기시간에 대한 분포를 유도하였다. Lee and Baek[8]은 D-정책을 갖는 $BMAP/G/1$ 대기행렬 시스템에서의 고객 수 분포를 유도하였다.



<Figure 1.1> The queue length and workload process under *D*-policy

D-정책 하에서 서어버는 도착하는 고객의 누적일량이 D를 넘기 이전까지 서비스를 제공하지 않다가 서어버의 누적 일량이 D를 넘으면 선입선출(FCFS, First Come First Served)방식으로 서비스를 제공하기 시작하여 시스템 내에 고객이 존재하는 한 서비스를 제공한다(<Figure 1.1> 참조) 임의의 고객의 대기시간을 분석하기 위해

서 고객을 다음과 같이 특별고객(SC)과 보통고객(OC)의 두 가지로 구분하자.

SC : 유휴기간 동안에 도착하는 고객

OC : 바쁜기간 동안에 도착하는 고객

고객을 위와 같이 분류하는 이유는 바쁜기간 시작시점 고객수가 n명이라는 조건하에 각 고객의 서비스시간은 독립이 아니고, 또한 동일한 분포를 따르지도 않기 때문이다. 또한, 이들 각각의 서비스시간은 보통고객의 서비스 시간인 S와도 확률적으로 다르므로, 임의의 보통고객이 서비스 받는 동안 도착하는 고객수는 임의의 특별고객의 서비스 받는 동안 도착하는 고객수와 다르기 때문이다.

2. 기호정의

본 연구를 통하여 사용하게 될 기본적인 기호 및 확률은 다음과 같다.

S : 서비스시간(확률변수),

$S(x), s(x)$: S의 분포함수(DF), 확률밀도함수(pdf),

$S^*(\Theta)$: S의 Laplace-Stieltjes 변환(LST); $S^*(\Theta)=\int_0^\infty e^{-\Theta x}dS(x)$,

$S^{(n)}(x)=Pr(S_1+S_2+\cdots+S_n\le x), (S^{(0)}(x)=1)$: S의 n차 중합의 분포함수,

$s^{(n)}(x)$: $S^{(n)}(x)$의 확률밀도함수,

$E(S)$: S의 평균,

U_D : <Figure 1.1>의 점 ①에서의 일량 ($U_D>D$),

$J(t)$: 시점 t에서의 UMC 상태, $(1\le i\le m)$,

$\{\boldsymbol{D}_n, n\ge 0\}$: BMAP 도착과정의 파라미터 행렬,

$(\boldsymbol{D}_n)_{ij}$: $\boldsymbol{D}_n$의 (i,j)-원소,

$\boldsymbol{D}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \boldsymbol{D}_n$,

$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{D}_n$

: UMC(underlying Markov chain)의 전이율 행렬,

$\pi_i=\lim_{t\to\infty} Pr[J(t)=i]$, $(1\le i\le m)$,

$\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m)$: UMC의 안정상태 상태확률 벡터,

$U(t)$: 시점 t에서의 일량,

$U_i^{idle}(x,t)=Pr[U(t)\le x, J(t)=i, \xi(t)=0]$,

$U_i^{busy}(x,t)=Pr[U(t)\le x, J(t)=i, \xi(t)=1]$,

$U_i^{idle}(x)=\lim_{t\to\infty} U_i^{idle}(x,t)$,

$U_i^{busy}(x)=\lim_{t\to\infty} U_i^{busy}(x,t)$,

$N_A(t)$: $(0,t]$ 동안 도착한 고객수,

$P_{ij}(k,t)=Pr[N_A(t)=k, J(t)=j \mid J(0)=i]$,

$\boldsymbol{P}(k,t)$: $P_{ij}(k,t)$을 원소로 하는 $(m\times m)$행렬,

$\mathbf{e}$: 모든 원소의 값을 1로 갖는 $(m\times 1)$벡터,

$\lambda_g=\boldsymbol{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{D}_n\mathbf{e}$: 집단의 도착률,

$\lambda=\boldsymbol{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n\boldsymbol{D}_n\mathbf{e}$: 고객의 도착률,

$\rho=\lambda E(S)$: 교통밀도(traffic intensity).

3. 일량분석

본 절에서는 D-정책을 갖는 BMAP/G/1 대기행렬시스템의 임의시점에서의 일량에 대한 벡터 LST (Vector Laplace-Stieltjes Transform)를 유도한다.

다음의 벡터들과 그에 대한 변환을 정의하자.

$\boldsymbol{U}_{idle}(x)=(U_1^{idle}(x), U_2^{idle}(x),\cdots,U_m^{idle}(x)), (x\le D)$,

$\boldsymbol{U}_{busy}(x)=(U_1^{busy}(x), U_2^{busy}(x),\cdots,U_m^{busy}(x)), (x>0)$,

$\boldsymbol{U}(x)=(U_1(x), U_2(x),\cdots,U_m(x)), (x\ge 0)$,

$\boldsymbol{u}_{idle}^*(\Theta)=\int_0^D e^{-\Theta x}d\boldsymbol{U}_{idle}(x)$,

$\boldsymbol{u}_{busy}^*(\Theta)=\int_0^\infty e^{-\Theta x}d\boldsymbol{U}_{busy}(x)$,

$\boldsymbol{u}^*(\Theta)=\int_0^\infty e^{-\Theta x}d\boldsymbol{U}(x)$.

이제, 위의 식들에 대하여 다음의 관계가 성립한다.

$$\boldsymbol{U}(x)=\boldsymbol{U}_{idle}(x)+\boldsymbol{U}_{busy}(x), (x\ge 0) \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{u}(\Theta)=\boldsymbol{u}_{idle}^*(\Theta)+\boldsymbol{u}_{busy}^*(\Theta) \tag{3.2}$$

3.1. 유휴기간의 분석 및 유휴기간의 임의 시점에서의 일량

임의시점에서의 일량과 대기시간을 분석하기 위해서는 유휴기간의 분석이 필요하다. 왜냐하면, 특별시험고객의 대기시간은 그가 도착하면서 보는 일량과 잔여유휴기간의 합인데, 이는 그가 속한 집단(이러한 집단을 **특별시험고객집단**이라고 하자.)이 도착하면서 보는 일량 및 위상에 대하여 종속이기 때문이다. 특별시험고객이 도착하면서 보는 일량과 UMC상태에 대한 결합확률벡터를 구하기 위하여 유휴기간동안의 BMAP 도착과정을 생각하자. $I_{i,j}(k)$를 UMC 상태가 i로 시작한 임의의 유휴기간이 고객수가 k, UMC 상태가 j인 상태를 거치면 1, 아니면 0을 갖는 지시확률변수라고 하자. 그러면, $Pr[I_{i,j}(k)=1]$는 유휴기간의 첫 도착에 조건을 취하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Pr[I_{i,j}(k)=1]. \tag{3.3a}$$
$$=\sum_{l=1}^{k}\sum_{n=1}^{m}[(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_l]_{i,n}Pr[I_{n,j}(k-l)=1]$$

여기서, $I_{n,j}(0)=\begin{cases}0 & (n\ne j)\\ 1 & (n=j)\end{cases}$

$\boldsymbol{I}_k^*$를 (3.3a)의 값들을 원소로 하는 $(m\times m)$ 행렬이라고 하면, 이는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{I}_k^*=\sum_{n=1}^{k}(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_n\boldsymbol{I}_{k-n}^*, (\boldsymbol{I}_0^*=\boldsymbol{I}). \tag{3.3b}$$

(Remark) $\boldsymbol{I}_k^*$는 결국 유휴기간 동안의 BMAP 도착과정이 시스템 내의 고객수가 k가 되는 상태를 거쳐 갈 모든 가능한 조합을 나타낸다. 예를 들어 $\boldsymbol{I}_3^*$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{I}_3^*=[(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_1]^3+(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_1(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_2$$
$$+(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_2(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_1+(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_3$$

$\boldsymbol{I}_0^* = \boldsymbol{I}$인 이유는 임의의 유휴기간은 0명인 상태를 반드시 거쳐지나가기 때문이다.

이제, 유휴기간 시작시점에서의 UMC 상태가 i일 확률을 κ_i라하고, 이를 원소로 하는 $(m\times 1)$ 벡터를 $\boldsymbol{\kappa}=(\kappa_1,\cdots,\kappa_m)$라고 하면, 임의의 유휴기간의 평균길이를 다음과 같이 구할 수 있다.

Theorem 3.1. I_D를 임의의 유휴기간의 길이라고 하면, 그에 대한 평균 $E(I_D)$는 다음과 같다.

$$E(I_D)=\boldsymbol{\kappa}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^D \boldsymbol{I}_k^*(x)(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\mathbf{e}, \qquad (3.4)$$

여기서, $\boldsymbol{I}_k^*(x)=\boldsymbol{I}_k^* s^{(k)}(x)$.

(Proof) $\boldsymbol{I}_k^*(x)$는 유휴기간의 임의의 도착직후의 고객수가 $k(\geq 1)$, 그때의 일량이 $x(>0)$인 상태가 될 확률이다(여기서, $\boldsymbol{I}_0^*(0)=\boldsymbol{I}$인 이유는 유휴기간 시작시점의 고객수가 0명이고, 그때의 일량이 0이기 때문이다.). 이러한 상태가 존재하면 앞으로 다음 도착이 일어날 때까지 $(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}$의 시간을 평균적으로 머문다. 따라서, 가능한 모든 경우의 일량과 고객수에 대하여 더하고, 유휴기간 시작시점의 UMC 상태에 대한 조건을 풀어주면 (3.4)를 얻는다. □

$\boldsymbol{u}_{idle}(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\boldsymbol{u}_{idle}(x)=\frac{d}{dx}\boldsymbol{U}_{idle}(x),\ (0<x\leq D)$$

그러면 다음을 얻는다.

Theorem 3.2. $\boldsymbol{U}_{idle}(0)$와 $\boldsymbol{u}_{idle}(x)$ $(0<x\leq D)$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{U}_{idle}(0)=(1-\rho)\frac{\boldsymbol{\kappa}(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}}{E(I_D)}, \qquad (3.5a)$$

$$\boldsymbol{u}_{idle}(x)=\frac{(1-\rho)\boldsymbol{\kappa}\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{I}_k^*(x)(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}}{E(I_D)}, \qquad (3.5b)$$

(Proof) $T_{x,j}$를 임의의 유휴기간 중의 일량이 $x(>0)$이고, UMC 상태가 j인 상태에 머무르는 시간이라고 하면, 재생보상정리에 의하여 $u_j^{idle}(x)=E(T_{x,j})/E(C)$가 된다. 만일 유휴기간의 임의의 도착 직후에 고객수가 k, 일량이 x인 상태가 되면, 다음 도착이 일어날 때까지 평균적으로 $(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}$ 시간을 동일한 상태에 머무르게 된다. 이제 가능한 모든 고객수에 대하여 더하면, $E(T_{x,j})=\left(\boldsymbol{\kappa}\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{I}_k^*(x)(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\right)_j$가 되고, 이를 이용하면 (3.5a,b)를 얻는다. □

이제 (3.5a), (3.5b)를 이용하면, $\boldsymbol{u}_{idle}^*(\Theta)$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{u}_{idle}^*(\Theta)=\boldsymbol{U}_{idle}(0)+\int_{0+}^{D}e^{-\Theta x}\boldsymbol{u}_{idle}(x)dx \qquad (3.6)$$

다음의 확률을 정의하자.

$$\Psi_{i,j}(n,x)dx$$
$$=Pr(N_D=n,\ x<U_D\leq x+dx,\ J_{busy}=j\mid J_{idle}=i)$$

여기서, N_D, U_D, J_{busy}을 각각 임의의 바쁜기간 시작시점에서의 고객수, 일량, UMC 상태, J_{idle}를 임의의 유휴기간 시작점에서의 UMC 상태이다 $(x>D,\ n\geq 1,\ 1\leq i,j\leq m)$. 이제, $\Psi_{i,j}(n,x)$를 (i,j)원소로 하는 행렬을 $\boldsymbol{\Psi}(n,x)$라고 하면 유휴기간에 도착하는 첫 집단의 크기와 일량에 조건을 취하여 다음과 같이 구할 수 있다.

Theorem 3.3. $\boldsymbol{\Psi}(n,x)$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\Psi}(n,x) \qquad (3.7)$$
$$=(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_n s^{(n)}(x) \qquad ,(n\geq 1,x>D)$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{I}_k^*\cdot(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_{n-k}\int_{y=0}^{D}s^{(k)}(y)s^{(n-k)}(x-y)dy$$

(Proof) $(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_n$는 n명으로 이루어진 집단의 도착직후의 UMC 상태확률을 나타낸다. 따라서, 유휴기간에 도착하는 첫 도착집단의 크기가 n이고 그들의 서비스시간의 총합이 $x(>D)$가 되면, 위 식의 첫 항을 만족한다. 또한, D를 넘기 이전 마지막 도착직후의 총고객수가 $k(<n)$, 그 총일량이 $y(<D)$일 때, 크기가 $(n-k)$, 그들의 서비스시간의 총합이 $(x-y)$인 집단이 도착하게 되면 위 식의 두 번째 항을 만족한다. □

식(3.7)에서 $\boldsymbol{\Psi}(1,x)=(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_1 s(x)$인데, 이는 $\sum_{k=1}^{0}()=0$ 을 이용한 것이다.

Theorem 3.4. $[\boldsymbol{I}_D^*(\Theta)]_{i,j}$를 유휴기간 시작점에서의 UMC 상태가 i라는 조건하에 유휴기간의 끝점에서의 UMC 상태가 j인 유휴기간의 길이에 대한 결합변환이라고 하자. 유휴기간의 첫 도착에 조건을 취하면 $\boldsymbol{I}_D^*(\Theta)$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{I}_D^*(\Theta)=\int_{x=D}^{\infty}(\Theta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{D}_k s^{(k)}(x)dx \qquad (3.8)$$
$$+\int_{x=0}^{D}(\Theta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{D}_k s^{(k)}(x)\boldsymbol{I}_{D-x}^*(\Theta)dx$$

(Proof) $(\Theta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{D}_k$는 임의시점(혹은 임의의 도착 직후)의 UMC 상태가 주어진 조건하에 다음 도착까지의 시간과 그 도착 직후의 위상을 나타내는 결합변환행렬이다. 유휴기간에 첫 집단이 도착하면서 D를 넘게 되면, 유휴기간이 끝나게 되므로 (3.8)의 첫 항과 같다. 유휴기간 중에 도착하는 첫 집단의 총서비스시간이 $x(\leq D)$인 경우 잔여유휴기간의 길이는 $(D-x)$를 새로운 임계점으로 하는 유휴기간의 길이와 같다. 그에 대한 결합변환 행렬은 $\boldsymbol{I}_{D-x}^*(\Theta)$이므로 식 (3.8)의 두 번째 항을 얻는다. □

3.2. 바쁜기간의 임의시점에서의 일량

본 절에서는 바쁜기간의 임의시점에서의 일량에 대한 벡터생성함수를 유도한다. 이를 위하여 $u_i^{busy}(x,t)=\frac{d}{dx}U_i^{busy}(x,t)$라고 하자. 또한 다음의 지시함수(indicator function)을 정의하자.

$$I_{[A]}=\begin{cases}1, (A\text{를 만족하면})\\ 0, (A\text{를 만족하지 않으면})\end{cases}$$

그러면 다음의 순간상태변이방정식(infinitesimal system equation)을 얻는다.

$$u_i^{busy}(x-\Delta t,t+\Delta t) \qquad (3.9)$$

$$= u_i^{busy}(x, t+\Delta t)[1+(\boldsymbol{D}_0)_{i,i}\Delta t]$$
$$+ \sum_{j=1, j\neq i}^{m} u_j^{busy}(x,t)(\boldsymbol{D}_0)_{j,i}\Delta t$$
$$+ \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{y=0}^{x} u_j^{busy}(y,t)(\boldsymbol{D}_k)_{j,i}\Delta t\, s^{(k)}(x-y)dy$$
$$+ I_{[x>D]}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} U_j^{idle}(0)(\boldsymbol{D}_k)_{j,i}\Delta t\, s^{(k)}(x)$$
$$+ I_{[x>D]}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{y=0}^{D} u_j^{idle}(y,t)(\boldsymbol{D}_k)_{j,i}\Delta t\, s^{(k)}(x-y)dy$$

(3.9)를 Δt로 나누고 $\lim_{\Delta t\to 0}$을 취하면 다음의 미분차등방정식(differential difference equation)을 얻는다.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)u_i^{busy}(x,t) \tag{3.10}$$
$$= \sum_{j=1}^{m} u_j^{busy}(x,t)(\boldsymbol{D}_0)_{j,i}$$
$$+ \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{y=0}^{x} u_j^{busy}(y,t)(\boldsymbol{D}_k)_{j,i}s^{(k)}(x-y)dy$$
$$+ I_{[x>D]}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} U_j^{idle}(0)(\boldsymbol{D}_k)_{j,i}s^{(k)}(x)$$
$$+ I_{[x>D]}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{y=0}^{D} u_j^{idle}(y,t)(\boldsymbol{D}_k)_{j,i}s^{(k)}(x-y)dy$$

이제 위의 식의 양변에 $\lim_{t\to\infty}$를 취하고, 벡터형태로 표현하면 다음과 같다.

$$-\frac{d}{dx}\boldsymbol{u}_{busy}(x) \tag{3.11}$$
$$= \boldsymbol{u}_{busy}(x)\boldsymbol{D}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{y=0}^{x}\boldsymbol{u}_{busy}(y)\boldsymbol{D}_k s^{(k)}(x-y)dy$$
$$+ I_{[x>D]}\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{U}_{idle}(0)\boldsymbol{D}_k s^{(k)}(x)$$
$$+ I_{[x>D]}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{y=0}^{D}\boldsymbol{u}_{idle}(y)\boldsymbol{D}_k s^{(k)}(x-y)dy$$

위 식에 $\boldsymbol{D}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k\boldsymbol{D}_k$를 이용하고 라플라스 변환을 취하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$-[\Theta\boldsymbol{u}^*_{busy}(\Theta)-\boldsymbol{u}_{busy}(0)] \tag{3.12}$$
$$= \boldsymbol{u}^*_{busy}(\Theta)\boldsymbol{D}[S^*(\Theta)]$$
$$+ \int_{x=D}^{\infty} e^{-\Theta x}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{U}_{idle}(0)\boldsymbol{D}_k s^{(k)}(x)\right]dx$$
$$+ \int_{x=D}^{\infty} e^{-\Theta x}\left[\int_{y=0+}^{D}\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{u}_{idle}(y)\boldsymbol{D}_k s^{(k)}(x-y)dy\right]dx$$

$\boldsymbol{r}(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\boldsymbol{r}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{U}_{idle}(0)\boldsymbol{D}_k s^{(k)}(x) \tag{3.13}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\int_{y=0}^{D}\boldsymbol{u}_{idle}(y)\boldsymbol{D}_k s^{(k)}(x-y)dy,\ (x>D)$$

$\boldsymbol{r}(x)$에 대한 변환을 $\boldsymbol{r}^*(\Theta)=\int_D^{\infty} e^{-\Theta x}\boldsymbol{r}(x)dx$라고 정의하고, (3.12)를 정리하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{u}^*_{busy}(\Theta)[\Theta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}[S^*(\Theta)]] = \boldsymbol{u}_{busy}(0)-\boldsymbol{r}^*(\Theta) \tag{3.14}$$

위의 식에서 $\boldsymbol{u}_{busy}(0)$는 단위시간당 바쁜기간이 끝나는 평균횟수 및 그때의 UMC 상태를 나타내는 벡터다. 이는 다음의 두 가지 관찰을 고려하여 구할 수 있다.

(관찰 1) $\boldsymbol{\kappa}=(\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_m)$는 임의의 바쁜기간의 끝점에서의 UMC 상태를 나타내는 확률벡터다.

(관찰 2) 바쁜기간 끝점은 사이클당 한번만 존재하므로, 단위시간당 사이클이 끝나는 횟수는 재생보상정리에 의하여 $1/E(C)$가 된다.

위의 두 가지 관찰을 이용하면, $\boldsymbol{u}_{busy}(0)$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{u}_{busy}(0) = \frac{1}{E(C)}\boldsymbol{\kappa} = \frac{1-\rho}{E(I_D)}\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{x}_0 \tag{3.15}$$

이제 $U^D_{i,j}(x)$를 유휴기간의 시작시점의 UMC 상태가 i라는 조건하에 바쁜기간 시작시점의 일량이 x이하이고, 그때의 UMC 상태가 j일 확률이라고 하고 이를 (i,j) 원소로 하는 $(m\times m)$ 행렬을 $\boldsymbol{U}_D(x)$라고 하자. 그러면 (3.7)을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\boldsymbol{u}_D(x) = \frac{d}{dx}\boldsymbol{U}_D(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}(n,x) \tag{3.16}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_n s^{(n)}(x) \qquad ,(x>D)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{I}^*_k(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{D}_{n-k}$$
$$\times\int_{y=0}^{D} s^{(k)}(y)s^{(n-k)}(x-y)dy$$

여기서, $\boldsymbol{u}_D(x)dx$는 결국 바쁜기간 시작시점의 일량이 $(x, x+dx]$일 확률을 의미한다. 이제 $\boldsymbol{U}^*_D(\Theta)=\int_D^{\infty} e^{-\Theta x}\boldsymbol{u}_D(x)dx$를 정의하고 이를 이용하여 (3.14)를 정리하면 다음을 얻는다.

$$\boldsymbol{u}^*_{busy}(\Theta) \tag{3.17}$$
$$= \boldsymbol{u}_{busy}(0)[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U}^*_D(\Theta)]\cdot[\Theta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}[S^*(\Theta)]]^{-1}$$

따라서, 임의시점에서의 일량에 대한 벡터LST $\boldsymbol{u}^*(\Theta)$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{u}^*(\Theta) = \boldsymbol{u}^*_{idle}(\Theta)+\boldsymbol{u}^*_{busy}(\Theta) \tag{3.18}$$

3.3. 임의시점에서의 평균일량

본 절에서는 임의시점에서의 일량에 대한 평균을 유도한다. 임의의 행렬LST $\boldsymbol{M}^*(\Theta)$에 대하여 다음을 정의하자.

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}^*(\Theta)|_{\Theta=0},\quad \boldsymbol{M}^{(n)}=(-1)^n\frac{d^n}{d\Theta^n}\boldsymbol{M}^*(\Theta)\Big|_{\Theta=0}$$

$E(U_{idle})$을 유휴기간을 관찰할 확률을 포함한 유휴기간의 임의시점에서의 시스템 내의 평균일량라고 정의하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$E(U_{idle}) = \left[-\frac{d}{d\Theta}\boldsymbol{u}^*_{idle}(\Theta)\Big|_{\Theta=0}\right]\mathbf{e} \tag{3.19}$$
$$= \boldsymbol{x}_0\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{I}^*_k(-\boldsymbol{D}_0)^{-1}\int_{x=0}^{D} x s^{(k)}(x)dx\,\mathbf{e}$$

$E(U_{busy})$를 바쁜기간을 관찰할 확률을 포함한 바쁜기간의 임의시점에서의 시스템 내의 평균일량이라고 정의하면, 이는 다음과 같다.

$$E(U_{busy}) = -\frac{d}{d\Theta}\boldsymbol{u}^*_{busy}(\Theta)\Big|_{\Theta=0}\mathbf{e}$$

h_i를 유휴기간을 관찰할 확률을 포함한 유휴기간의 임의시점에서의 UMC 위상이 i일 확률이라고 하고 $\boldsymbol{h}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\boldsymbol{h}=(h_1, h_1, \cdots, h_m)$$

위의 확률벡터는 식 (3.6)를 이용하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{U}_{idle}(0) + \boldsymbol{u}^*_{idle}(\Theta)\big|_{\Theta=0} \tag{3.20}$$
$$= \boldsymbol{x}_0\left[(-\boldsymbol{D}_0)^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{I}^*_k(-\boldsymbol{D}_0)^{-1} S^{(k)}(D)\right]$$

위의 식으로부터 다음의 등식이 성립한다.

$$\boldsymbol{u}^*_{busy}(\Theta)\big|_{\Theta=0} = \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{h} \tag{3.21}$$

$E(U_{busy})$는 위해 식 (3.17)과 (3.21)로부터 다음과 같다.

$$E(U_{busy}) = -\frac{d}{d\Theta}\boldsymbol{u}^*_{busy}(\Theta)\Big|_{\Theta=0}\mathbf{e} \tag{3.22}$$
$$= \frac{1}{1-\rho}\{\rho - A + B\}$$

여기서 A, B는 각각 다음과 같다.

$$A = \Big[\boldsymbol{h}\Big(\boldsymbol{I} - \sum_{k=1}^{\infty} k\boldsymbol{D}_k E(S)\Big) + \boldsymbol{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k\boldsymbol{D}_k E(S)$$
$$+ \frac{(1-\rho)\boldsymbol{\kappa}}{E(I_D)}\int_{x=D}^{\infty} x\,\boldsymbol{U}_D(x)\,dx\Big]$$
$$\times(\boldsymbol{D} + \mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} k\boldsymbol{D}_k E(S)\mathbf{e}$$

$$B = \frac{1}{2}\Big[\frac{(1-\rho)\boldsymbol{\kappa}}{E(I_D)}\int_{x=D}^{\infty} x^2\,\boldsymbol{U}_D(x)\,dx + (\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{h})$$
$$\times\Big[\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\boldsymbol{D}_k E^2(S) + \sum_{k=1}^{\infty} k\boldsymbol{D}_k E(S^2)\Big]\Big]\mathbf{e}$$

4. 대기시간분석

본 절에서는 임의의 고객의 대기시간에 대한 벡터LST $\boldsymbol{w}^*(\Theta)$ 및 임의의 고객의 대기시간에 대한 LST $W^*_q(\Theta)$ 및 평균대기시간 W_q를 유도한다. 임의의 고객의 대기시간에 대하여 다음의 확률을 정의하자.

$W_i(x) = Pr$(임의의 고객의 대기시간이 x 이하이고, 도착직후의 UMC 상태가 i), $(x \geq 0)$

$W^{SC}_i(x) = Pr$(도착하는 임의의 고객이 특별고객이고, 그의 대기시간이 x이하, 도착직후의 UMC 상태가 i), $(x \geq 0)$,

$W^{OC}_i(x) = Pr$(도착하는 임의의 고객이 보통고객이고, 그의 대기시간이 x이하, 도착직후의 UMC 상태가 i), $(x > 0)$,

이제, 다음의 벡터 및 벡터LST들을 정의하자,

$$\boldsymbol{W}(x) = (W_1(x), W_2(x), \cdots, W_m(x)),$$
$$\boldsymbol{w}^*(\Theta) = \int_0^{\infty} e^{-\Theta x} d\boldsymbol{W}(x),$$
$$\boldsymbol{W}_{SC}(x) = (W^{SC}_1(x), W^{SC}_2(x), \cdots, W^{SC}_m(x)),$$
$$\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta) = \int_0^{\infty} e^{-\Theta x} d\boldsymbol{W}_{SC}(x),$$
$$\boldsymbol{W}_{OC}(x) = (W^{OC}_1(x), W^{OC}_2(x), \cdots, W^{OC}_m(x)),$$
$$\boldsymbol{w}^*_{OC}(\Theta) = \int_0^{\infty} e^{-\Theta x} d\boldsymbol{W}_{OC}(x),$$

그러면, 다음의 관계를 얻는다.

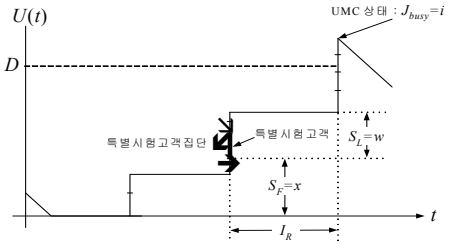
$$\boldsymbol{W}(x) = \boldsymbol{W}_{SC}(x) + \boldsymbol{W}_{OC}(x), \ (x \geq 0) \tag{4.1}$$
$$\boldsymbol{w}^*(\Theta) = \boldsymbol{w}_{SC}(\Theta) + \boldsymbol{w}_{OC}(\Theta). \tag{4.2}$$

4.1. 임의의 특별고객의 대기시간

임의의 특별고객의 대기시간은 다음 두 가지의 합이다 (Figure 4.1 참조.).

(1) 도착하면서 보는 시스템내의 일량 S_F(여기에는 동일집단 내의 자신의 앞에 있는 고객들의 총 서비스시간 포함된다.),

(2) 특별시험고객집단의 도착직후부터 바쁜기간이 시작될 때까지의 잔여유휴기간(I_R). 이때, $S_F + S_L \geq D$이면 I_R은 존재하지 않는다(여기서 S_L은 특별시험고객의 일량과 동일집단 내의 특별시험고객의 뒤에 있는 고객들의 서비스시간의 합이다.).



<Figure 4.1> *D*-정책을 갖는 *BMAP/G/1*의 유휴기간 동안의 일량과정

여기서, S_F와 I_R은 독립이 아니다. 임의의 시험고객의 대기시간에 대한 결합변환 벡터를 구하기 위해 $w^*_{SC}(\Theta, x, w, i)$를 $S_F = x$, $S_L = w$, 도착직후 위상이 i인 특별고객의 대기시간에 대한 결합변환이라고 하고 $w^*_{SC}(\Theta, x, w, i)$를 i번째 원소로 하는 벡터를 $\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta, x, w)$라고 정의하자. 이 결합변환벡터는 다음과 같은 3가지의 상황에 따라 나누어 구할 수 있다.

Case(a) 특별시험고객집단으로 D를 넘지 못한 경우 (<Figure 4.2(a)>).

Case(b) 특별시험고객 직전 고객까지의 총일량(S_F)으로 D를 넘은 경우(<Figure 4.2(b)>).

Case(c) 특별시험고객 직전 고객까지의 총일량(S_F)으로 D넘지는 못하였으나, 특별시험고객까지 혹은 동일집단 내의 특별시험고객 이후의 고객들로 D를 넘은 경우 (<Figure 4.2(c)>).

(3.5a,b)는 유휴기간 중의 임의시점을 관찰했을 때에 대한 일량과 UMC상태에 대한 확률을 나타낸다. 이로부터 임의의 특별고객의 대기시간을 구하기 위해서는 특별시험고객의 도착직후의 UMC상태를 알아야만 한다.

Theorem 4.1. $\mathrm{B}(y, i, k, j)$를 특별시험고객집단이 도착하면서 보는 시스템내의 총일량이 y이하, 도착직후 UMC 상태가 j이고, 특별시험고객이 집단 내에서 i번째이며, 동일집단 내에 자신의 뒤에 k명이 있을 결합확률이라고 하자. 이는 다음과 같다.

$$\mathrm{B}(0, i, k, j) = \left(\boldsymbol{U}_{idle}(0)\frac{\boldsymbol{D}_{i+k}}{\lambda}\right)_j, \tag{4.3a}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{B}(y,i,k,j)=\beta(y,i,k,j)=\left(\boldsymbol{u}_{idle}(y)\frac{\boldsymbol{D}_{i+k}}{\lambda}\right)_j. \tag{4.3b}$$

(Proof) 확률변수 G를 임의의 집단의 크기라고 하면, 다음이 성립한다..

$$Pr(G=i+k)=\frac{\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{D}_{i+k}\mathbf{e}}{\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{D}_n\mathbf{e}}=\frac{\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{D}_{i+k}\mathbf{e}}{\lambda_g}.$$

임의의 시험고객이 크기가 $(i+k)$인 집단에 속할 확률 a_{i+k}는 다음과 같다.

$$a_{i+k}=\frac{(i+k)Pr(G=i+k)}{E(G)}=\frac{(i+k)\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{D}_{i+k}\mathbf{e}}{\lambda}.$$

이때, 시험고객이 이러한 집단 내에서 i번째 고객일 확률은 $1/(i+k)$이므로, 특별시험고객이 크기가 $(i+k)$집단의 i번째, 도착하면서 보는 시스템 내의 일량과 UMC 상태의 결합확률벡터는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{U}_{idle}(y)\cdot a_{i+k}\cdot\frac{1}{i+k}=\boldsymbol{U}_{idle}(y)\frac{\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{D}_{i+k}\mathbf{e}}{\lambda}.$$

이제, 이를 도착직후의 위상으로 확률로 바꾸려면 $\frac{\boldsymbol{D}_{i+k}}{\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{D}_{i+k}\mathbf{e}}$를 위의 식의 우변에 곱하면 된다. 이로부터 (4.3a,b)를 얻는다. □

(4.3a,b)를 이용하면 $\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta,x,w)$를 각 경우에 대하여 다음과 같이 구할 수 있다.

(Case(a))의 경우

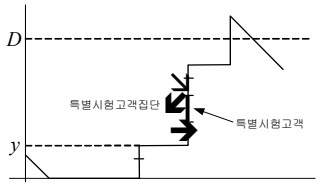
$$\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta,x,w)\left[\boldsymbol{I}^*_{D-x-w}(\Theta)\right]_{\Theta=0}$$
$$=e^{-\Theta x}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_{y=0}^{x}\boldsymbol{u}_{idle}(y)\frac{\boldsymbol{D}_{i+k}}{\lambda}s^{(i-1)}(x-y)dy\right]\times s^{(k+1)}(w)\boldsymbol{I}^*_{D-x-w}(\Theta)$$

위 식의 우변의 i번째 원소는 $S_F=x$, $S_L=w$, $J_{busy}=i$인 특별고객의 대기시간에 대한 결합변환이다. 이로부터, 좌변의 $\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta,x,w)$ 우측에 $\left[\boldsymbol{I}^*_{D-x-w}(\Theta)\right]_{\Theta=0}$를 곱하면 좌변과 우변의 결과는 서로 같음을 알 수 있다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta,x,w) \tag{4.4a}$$
$$=e^{-\Theta x}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_{y=0}^{x}\boldsymbol{u}_{idle}(y)\frac{\boldsymbol{D}_{i+k}}{\lambda}s^{(i-1)}(x-y)dy\right]\times s^{(k+1)}(w)\boldsymbol{I}^*_{D-x-w}(\Theta)\left[\boldsymbol{I}^*_{D-x-w}(\Theta)|_{\Theta=0}\right]^{-1}$$

또한, 특별시험고객집단이 도착하면서 보는 시스템 내의 총일량이 0인 경우에 대한 $\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta,x,w)$는 (4.4a)에서와 동일한 방법으로 다음과 같이 구할 수 있다.

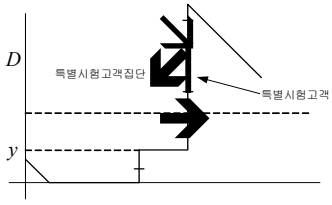
$$\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta,x,w) \tag{4.4b}$$
$$=e^{-\Theta x}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{U}_{idle}(0)\frac{\boldsymbol{D}_{i+k}}{\lambda}s^{(i-1)}(x)\times s^{(k+1)}(w)\boldsymbol{I}^*_{D-x-w}(\Theta)\left[\boldsymbol{I}^*_{D-x-w}(\Theta)|_{\Theta=0}\right]^{-1}$$
$$(0\le x\le D,\ w\le D-x)$$



<Figure 4.2(a)> Case (a)

(Case(b))의 경우

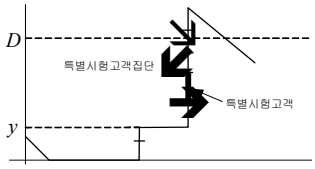
$$\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta,x,w) \tag{4.5}$$
$$=\begin{cases} e^{-\Theta x}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty}\boldsymbol{U}_{idle}(0)\frac{\boldsymbol{D}_{i+n}}{\lambda}s^{(i-1)}(x)s^{(k+1)}(w), & (x>D,\ w\ge 0)\\ e^{-\Theta x}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty}\left[\int_{y=0}^{D}\boldsymbol{u}_{idle}(y)\frac{\boldsymbol{D}_{i+n}}{\lambda}s^{(i-1)}(x-y)dy\right]\times s^{(k+1)}(w), & (x>D,\ w\ge 0)\end{cases}$$



<Figure 4.2(b)> Case (b)

(Case (c))의 경우

$$\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta,x,w) \tag{4.6}$$
$$=\begin{cases} e^{-\Theta x}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{U}_{idle}(0)\frac{\boldsymbol{D}_{i+n}}{\lambda}s^{(i-1)}(x)s^{(n+1)}(w), & (0\le x\le D,\ w>D-x)\\ e^{-\Theta x}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_{y=0}^{x}\boldsymbol{u}_{idle}(y)\frac{\boldsymbol{D}_{i+n}}{\lambda}s^{(i-1)}(x-y)dy\right]\times s^{(n+1)}(w), & (0<x\le D,\ w>D-x)\end{cases}$$



<Figure 4.2(c)> Case (c)

이제, $\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta)$는 (4.4)~(4.6)을 가능한 x,w에 대해 모두 더한 후 각 식을 더하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta) \tag{4.7}$$
$$=\int_{x=0}^{D}\int_{w=0}^{D-x}e^{-\Theta x}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{U}_{idle}(0)\frac{\boldsymbol{D}_{i+k}}{\lambda}s^{(i-1)}(x)\times s^{(k+1)}(w)\boldsymbol{I}^*_{D-x-w}(\Theta)\left[\boldsymbol{I}^*_{D-x-w}(\Theta)|_{\Theta=0}\right]^{-1}dwdx$$
$$+\int_{x=D}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty}e^{-\Theta x}\boldsymbol{U}_{idle}(0)\frac{\boldsymbol{D}_{i+n}}{\lambda}s^{(i-1)}(x)dx$$
$$+\int_{x=0}^{D}\int_{w=D-x}^{\infty}e^{-\Theta x}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{U}_{idle}(0)\frac{\boldsymbol{D}_{i+n}}{\lambda}\times s^{(i-1)}(x)s^{(n+1)}(w)dwdx$$
$$+\int_{x=0}^{D}\int_{w=0}^{D-x}e^{-\Theta x}\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_{y=0}^{x}\boldsymbol{u}_{idle}(y)\frac{\boldsymbol{D}_{i+k}}{\lambda}s^{(i-1)}(x-y)dy\right]\times s^{(k+1)}(w)\boldsymbol{I}^*_{D-x-w}(\Theta)\left[\boldsymbol{I}^*_{D-x-w}(\Theta)|_{\Theta=0}\right]^{-1}dwdx$$
$$+\int_{x=D}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty}e^{-\Theta x}\times\left[\int_{y=0}^{D}\boldsymbol{u}_{idle}(y)\frac{\boldsymbol{D}_{i+n}}{\lambda}s^{(i-1)}(x-y)dy\right]dx$$

$$+\int_{x=0}^{D}\int_{w=D-x}^{\infty} e^{-\Theta x} \times \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_{y=0}^{x} \boldsymbol{u}_{idle}(y)\frac{\boldsymbol{D}_{i+n}}{\lambda} s^{(i-1)}(x-y)\,dy\right] \times s^{(n+1)}(w)\,dw\,dx$$

4.2. 임의의 보통고객의 대기시간

본 절에서는 보통시험고객의 대기시간에 대한 벡터LST $\boldsymbol{w}^*_{OC}(\Theta)$를 유도한다. $\boldsymbol{w}^*_{OC}(\Theta)$는 다음의 관계로부터 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{w}^*_{OC}(\Theta) = \boldsymbol{w}^*_{OC,V}(\Theta)\frac{\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}[S(\Theta)]}{\lambda(1-S^*(\Theta))} \tag{4.8}$$

위의 식에서 $\boldsymbol{w}^*_{OC,V}(\Theta)$는 바쁜기간에 도착한 가상고객의 대기시간에 대한 벡터생성함수인데, 이는 바쁜기간의 임의시점에서의 일량과 같으므로 $\boldsymbol{w}^*_{OC,V}(\Theta)$는 $\boldsymbol{u}^*_{busy}(\Theta)$와 같다. 따라서 $\boldsymbol{w}^*_{OC}(\Theta)$는 다음과 같다 Lucantoni[12].

$$\boldsymbol{w}^*_{OC}(\Theta) = \boldsymbol{u}^*_{busy}(\Theta)\frac{\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}[S(\Theta)]}{\lambda(1-S^*(\Theta))} \tag{4.9}$$

$$= \boldsymbol{u}_{busy}(0)[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U}^*_D(\Theta)] \times [\Theta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}[S^*(\Theta)]]^{-1}\frac{\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}[S(\Theta)]}{\lambda(1-S^*(\Theta))}$$

임의의 시험고객의 대기시간에 대한 LST $W^*_q(\Theta)$는 (4.7)과 (4.9)를 이용하면 다음과 같다.

$$W^*_q(\Theta) = \boldsymbol{w}^*(\Theta)\mathbf{e} = [\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta)+\boldsymbol{w}^*_{OC,A}(\Theta)]\mathbf{e} \tag{4.10}$$

4.3. 임의의 고객의 평균대기시간

본 절에서는 임의의 시험고객의 평균대기시간을 유도한다. (4.10)으로부터 대기시간에 대한 평균은 다음과 같다.

$$W_q = -\frac{d}{d\Theta}W^*_q(\Theta)\Big|_{\Theta=0} \tag{4.11}$$

$$= \left[-\frac{d}{d\Theta}\boldsymbol{w}^*_{SC}(\Theta)\Big|_{\Theta=0}\right]\mathbf{e} + \left[-\frac{d}{d\Theta}\boldsymbol{w}^*_{OC,A}(\Theta)\Big|_{\Theta=0}\right]\mathbf{e}$$

위의 식에서 $-\frac{d}{d\Theta}\boldsymbol{w}^*_{SC,A}(\Theta)\Big|_{\Theta=0}\mathbf{e}$는 (4.7)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$-\frac{d}{d\Theta}\boldsymbol{w}^*_{SC,A}(\Theta)\Big|_{\Theta=0}\mathbf{e} \tag{4.12}$$

$$= (1-\rho)\left\{\int_{y=0}^{D}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} y\,\boldsymbol{u}_{idle}(y)\frac{\boldsymbol{D}_{i+n}}{\lambda}dy \right.$$

$$+\int_{y=0}^{D}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} i\,\boldsymbol{u}_{idle}(y)\frac{\boldsymbol{D}_{i+n+1}}{\lambda}E(S)\,dy$$

$$+\int_{x=0}^{D}\int_{w=0}^{D-x}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{U}_{idle}(0)\frac{\boldsymbol{D}_{i+k}}{\lambda}s^{(i-1)}(x) \times s^{(k+1)}(w)\left[-\frac{d}{d\Theta}\boldsymbol{\Gamma}_{D-x-w}(\Theta)\right]_{\Theta=0}dw\,dx$$

$$+\int_{x=0}^{D}\int_{w=0}^{D-x}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_{y=0+}^{x}\boldsymbol{u}_{idle}(y)\frac{\boldsymbol{D}_{i+k}}{\lambda} \times s^{(i-1)}(x-y)\,dy\right] \times s^{(k+1)}(w)\left[-\frac{d}{d\Theta}\boldsymbol{\Gamma}_{D-x-w}(\Theta)\right]_{\Theta=0}dw\,dx\Bigg\}\mathbf{e}$$

또한 $-\frac{d}{d\Theta}\boldsymbol{w}^*_{OC,A}(\Theta)\Big|_{\Theta=0}$는 (4.9)의 양변을 미분한 후 정리하면 다음과 같다.

$$-\frac{d}{d\Theta}\boldsymbol{w}^*_{OC,A}(\Theta)\Big|_{\Theta=0}\mathbf{e} \tag{4.13}$$

$$= E(U_{busy}) + 1 + \lambda^{-1}(\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{h})\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\boldsymbol{D}_k E(S)\mathbf{e}$$

$$-\lambda^{-1}\left[\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{I}-\sum_{k=1}^{\infty}k\boldsymbol{D}_k E(S)\right)+\boldsymbol{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}k\boldsymbol{D}_k E(S)\mathbf{e} - \frac{(1-\rho)\boldsymbol{\kappa}}{E(I_D)}\int_D^{\infty}x\boldsymbol{U}_D(x)\,dx\right] \times(\boldsymbol{D}+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}k\boldsymbol{D}_k\mathbf{e}$$

5. 수치예($M^X/G/1$과의 비교)

본 절에서는 다음과 같은 두 가지 시스템에 대하여 평균대기시간을 비교한다.

(System-1) D-정책을 갖는 $BMAP/G/1$ 대기행렬시스템

(System-2) D-정책을 갖는 $M^X/G/1$ 대기행렬시스템

위의 두 가지 시스템의 비교를 통하여 BMAP 도착과정의 도착간격간의 상관관계가 평균대기시간에 영향을 미치는 정도를 알 수 있다. 본 수치예에서는 제공로드를 변화시키기 위하여 평균 서비스시간을 변화시켰다(예를 들어 $\rho=0.1$일 경우에는 평균 서비스시간이 2/110이 되게 하였다.) 시스템간의 비교를 위하여 다음과 같은 BMAP 도착과정의 파라미터 행렬을 사용하였다.

$$\boldsymbol{D}_0 = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 0.4 & -0.8 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_k = \begin{pmatrix} 9p(1-p)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0.4r(1-r)^{k-1} \end{pmatrix},\ (k=1,2,\cdots).$$

여기서, $p=0.5$, $r=0.8$이다.

$$\boldsymbol{D} = \sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{D}_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2/5 & -2/5 \end{pmatrix}.$$

위의 결과와 $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{D}=0$, $\boldsymbol{\pi}\mathbf{e}=1$를 이용하면 UMC 상태의 안정상태 확률벡터 $\boldsymbol{\pi}$는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\boldsymbol{\pi} = \{\pi_1, \pi_2\} = (2/7, 5/7).$$

임의의 집단의 도착률 λ_g와 고객의 도착률 λ는 다음과 같다.

$$\lambda_g = \boldsymbol{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{D}_k\mathbf{e} = \frac{20}{7},\quad \lambda = \boldsymbol{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}k\boldsymbol{D}_k\mathbf{e} = \frac{11}{2}$$

또한, 임의의 집단의 크기가 k일 확률 g_k는 다음과 같다.

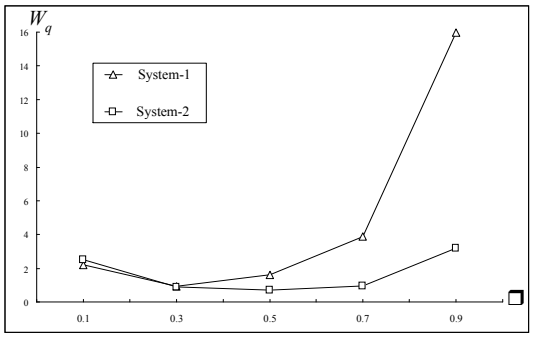
$$g_k = 0.9(0.5)^k + 0.4(0.2)^k, (k\geq 1).$$

System-2는 위의 λ, λ_g및 g_k와 동일한 파라미터를 갖는다. 또한, 각 시스템의 서비스시간은 동일한 지수분포를 가정하였다. 임계값인 D는 모든 경우에 대하여 0.5로 가정하였다. 또한, 서비스시간의 분포는 공히 지수분포(exponential distribution)를 따른다고 가정하였다. <Table 5.1>은 각 시스템에 대한 평균대기시간을 나타내며, 마지막 열의 $\frac{W_q(BMAP)}{W_q(Poisson)}$은 System-2의 평균대기시

간에 대한 System-1의 평균 대기시간의 비율을 보여준다. <Table 5.1>의 마지막 열과 <Figure 5.1>을 보면, ρ가 높아짐에 따라 System-2에 대한 System-1의 대기시간에 대한 비율 $\frac{W_q(BMAP)}{W_q(Poisson)}$이 더 커지게 된다. 이는 BMAP으로 도착하는 고객들의 도착간격이 상관성을 띄고 있기 때문이다. 따라서, BMAP 도착과정과 같이 도착과정에 상관관계가 있는 대기행렬시스템을 분석할 때, 각 도착간격들의 상관관계를 무시한 채 시스템을 분석하면 임의의 고객의 평균대기시간을 과소추정하게 될 수도 있다는 것을 알 수 있다.

ρ	$W_q(BMAP)$	$W_q(Poisson)$	$\frac{W_q(BMAP)}{W_q(Poisson)}$
0.1	2.1984	2.5086	0.8770
0.3	0.9433	0.8901	1.0596
0.5	1.6184	0.7008	2.3099
0.7	3.8852	0.9766	3.9858
0.9	15.9724	3.2109	4.9428

<Table 5.1> 세 시스템에 대한 평균대기시간의 비교 (D=0.5)



<Figure 5.1> D=0.5일 때의 각 시스템에 따른 평균대기시간의 비교

참고문헌

[1]. Artalejo, J.R., "A note on the optimality of the N- and D-policies for the M/G/1 queue", ***Operations Research Letters***, 30, 375-376, 2002

[2]. Artalejo, J.R., "On the M/G/1 queue with D-policy", ***Applied Mathematical Modelling***, 25, 1055-1069, 2001.

[3]. Balachandran, K.R., "Control policies for a single server system", ***Management Science***, 19, 1013-1018, 1973.

[4]. Balachandran, K.R., and Tijms, H., "On the D-Policy for the M/G/1 queue", ***Management Science***, 21, 1073-1076, 1975.

[5]. Boxma, O.J. "Note on a control problem of Balachandran and Tijms", ***Management Science***, 22(8), 916-917, 1976.

[6]. Chae, K.C., and Park, Y.I., "The queue length distribution for the M/G/1 queue under the D-policy", ***J. Appl. Prob***., 38, 278-279, 2001

[7]. Dshalalow, J.H., "Queueing processes in bulk systems under D-policy", ***J. Appl. Prob.***, 35(4), 976-989, 1998.

[8]. Lee, H.W., Baek, J.W., "BMAP/G/1 queue under D-policy: queue length analysis", ***Stochastic Models***, 21(2-3), 484-505, 2005

[9]. Lee, H.W., and Song, K.S., "Queue length analysis of MAP/G/1 queue under D-policy", ***Stochastic Models***, 20(3), 363-380, 2004.

[10]. Lee, H.W., Cheon, S.H., Lee, E.Y., Chae, K.C., "Workload and waiting time analysis of MAP/G/1 queue under D-policy", ***Queueing Systems***, 421-443, 2004.

[11]. Lee, H.W., Lee, S.W., Seo, W.J., Cheon, S.H., "A unified framework for the analysis of the M/G/1 queues controlled by workload", accepted in ***Lecture Note in Computer Science*** (LNCS), 2006

[12] Lucantoni, D.M., "The BMAP/G/1 Queue: A Tutorial", ***Models and Techniques for performance Evaluation of Computer and Communications Systems,*** L. Donatiello and R. Nelson Editors, Springer Verlag, 330-358, 1993