한국정밀공학회 2006년도 춘계학술대회논문집 pp. 113~114

KSPE 06S126

# 불규칙 가진을 받는 비선형계의 확률론적 진동평가

이신영*(군산대학교 기계공학부)

# Vibration Evaluation of Non-linear System under Random Excitations by Probabilistic Method

Sin-Young Lee(School of Mechanical Engineering, Kunsan National Univ.)


## ABSTRACT

Vibration of a non-linear system under random excitations was evaluated by probabilistic methods. The non-linear characteristic terms of a system structure were quasi-linearized and excitation terms were remained as they were. An analytical method where the square mean of error was minimized was used. An alternative method was an energy method where the damping energy and restoring energy of the linearized system were equalized to those of the original non-linear system. The numerical results were compared with those obtained by Monte Carlo simulation. The comparison showed the results obtained by Monte Carlo simulation located between those by the analytical method and those by the energy method.


**Key Words** : Nonlinear system (비선형 시스템), Parametric excitation (변수 가진), Probabilistic method (확률론적 방법), Square mean of error (오차제곱평균), Monte Carlo simulation (몬테칼로 시뮬레이션)

## 1. 서론

변동하는 외부 가진력에 대한 진동 응답을 예측하는 방법은 설계 분야에서 중요성이 증대되어 오고 있다(1). 또한 비선형의 경우에 대한 구조물의 동적 응답 해석과 신뢰성 평가에 대한 필요가 증가하고 있다(2, 3). 통계적 선형화는 비선형 시스템을 그것과 비슷한 거동을 하는 등가 선형 시스템으로 대체한다(4). 일반적으로 사용하는 기준은 오차 과정의 제곱 평균을 최소화하는 것이다. 이것으로부터 선형화 시스템의 매개변수를 구할 수 있다(4, 5).

본 연구에서는 변수 가진이 작용하는 경우에 근사해를 구하는 과정에 대하여 연구한다. 시스템 일부를 선형화 하는 준선형화 방법에 의하여 비선형 감쇠 및 비선형 강성을 선형화 하였다. 변수 가진 항은 선형화 하지 않으며, 통계적 적률에 의하여 진동 문제를 해석하였다. 이토(Ito)의 미분규칙(5)을 사용하여 해석절차를 진행하였으며 스펙트럼 밀도함수를 구하였다. 준선형화 계수를 구하기 위하여 오차제곱의 기댓값을 최소화하는 방법을 사용하였다. 본 방법에 의하여 구한 해와 몬테칼로 법에 의하여 구한 해를 비교하고 검토하였다.

## 2. 비선형 시스템의 준선형화

일반적인 비선형 시스템이 매개변수 가진을 받는 경우의 방정식은 식 (1)과 같다.(5)

$$\ddot{Y}_j(t) + h_j(\mathbf{Y(t)}, \dot{\mathbf{Y}}\mathbf{(t)}) = \xi_j(t) + \sum_{i}^{n} [a_{ij}\dot{Y}_i(t)\eta_i(t) + b_{ij}Y_i(t)\gamma_i(t)] \quad (1)$$

본 연구에서는 다음의 식 (2)와 같은 비선형 감쇠와 강성을 갖는 시스템에 대하여 해석한다.

$$\ddot{Y} + 2\alpha_1 Y + \lambda\dot{Y}^3 + \Omega_1^2 Y + \delta Y^3 = \dot{Y}\eta(t) + Y\gamma(t) + \xi(t) \quad (2)$$

Gauss 백색잡음 $\eta(t)$, $\gamma(t)$ 및 $\xi(t)$의 스펙트럼밀도를 각각 $K_{\eta\eta}$, $K_{\gamma\gamma}$ 및 $K_{\xi\xi}$이고, 세 가지 가진은 편의상 서로 연관되지 않는다고 가정한다. 비선형 시스템 (2)는 다음과 같은 등가 준선형계로 대치할 수 있다.

$$\ddot{Y} + 2\alpha\dot{Y} + \Omega^2 Y = \dot{Y}\eta(t) + Y\gamma(t) + \xi(t) \quad (3)$$

여기에서 Ito 의 통계학적 방정식을 유도하면 2 차 적률 및 4 차 적률에 대한 식을 구할 수 있다. 적률에 대한 식의 정상상태 해는 대수방정식을 풀어서 구할 수 있다. 등가 선형화 계수는

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\lambda m_{04} + \delta m_{31}}{2m_{02}}, \Omega^2 = \Omega_1^2 + \frac{\delta m_{40}}{m_{20}} \quad (4)$$

대안으로 에너지 방법을 제시한다. 원래의 비선형시스템 (2)와 준선형화 시스템(3)의 강성 및 감쇠 에너지의 확률 평균이 동일할 조건으로부터 또 하나의 선형화계수 식을 구할 수 있다.

상관함수의 푸리에 변환으로부터 스펙트럼밀도함수를 구할 수 있다. 이렇게 구한 정상 상태 적률과 스펙트럼밀도는 등가 준선형계에 대하여 엄밀하고, 원래의 비선형 시스템에 대한 근사해이다(5).

## 3. 수치결과 및 고찰

시스템 (2)에 대한 수치계산을 하기 위하여 $\alpha_1$ =0.4, $\Omega_1$ =6.0 인 경우에 해석을 실시하고 MCS(몬테칼로 시뮬레이션)의 결과와 비교하였다. Fig. 1 은 $K_{\gamma\gamma}$=0.5, $K_{\eta\eta}$=0.05 인 경우 $K_{\xi\xi}$ 에 따른 $E[Y_1^2]$을 나타내고, Fig. 2는 그 중 $K_{\xi\xi}$=1.5 인 경우의 스펙트럼밀도 $\phi_{11}(\omega)$ 를 나타낸다. Fig. 3은 $\alpha_1$ =0.8, $\Omega_1$ =12., $K_{\gamma\gamma}$ =1.0, $K_{\eta\eta}$ =0.1 인 경우 $K_{\xi\xi}$에 따른 $E[Y_1^2]$을 나타낸다.

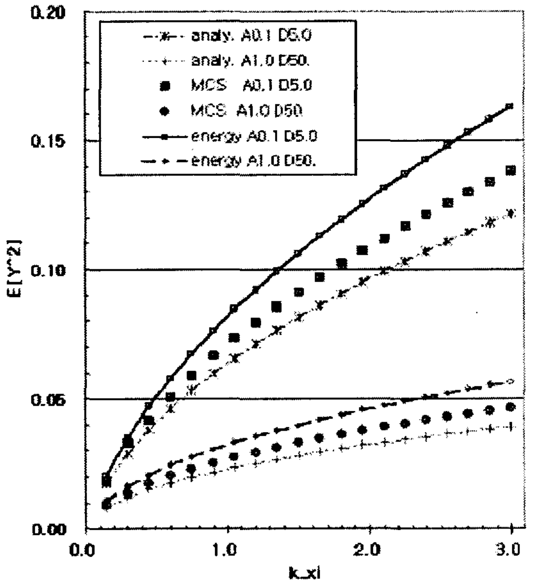


Fig. 1 Stationary mean square values of response $Y_1$

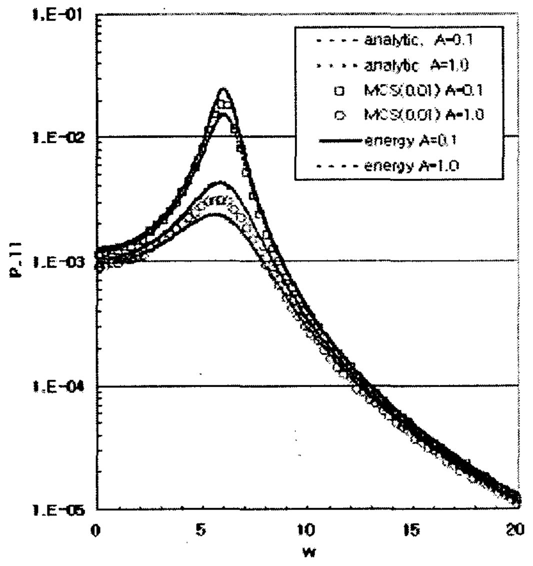


Fig. 2 Spectral density for $K_{\xi\xi}$ =1.5

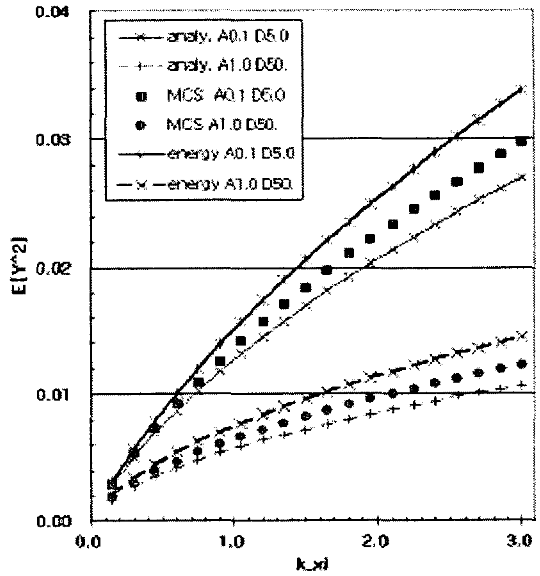


Fig. 3 Stationary mean square values of response $Y_1$

## 4. 결론

비선형 진동 시스템이 불규칙 가진을 받고 매개변수 가진을 포함하는 경우를 해석하기 위하여 통계적 방법을 사용하였고, 비선형성만을 선형화하는 준선형화 방법을 사용하였다. 오차제곱의 기댓값을 최소화하는 해석적 방법, 원래의 비선형 시스템과 준선형화된 시스템의 에너지의 기댓값을 같도록 하는 방법에 의한 해석을 실시하고 그 결과들을 MCS 의 결과와 비교하였다. 해석적인 방법은 아래 한계값을 나타내고 에너지 방법은 위 한계값을 나타내었다. 따라서 구하는 해는 이 두 가지 방법으로 얻어진 해의 중간에 위치한다고 할 수 있다.

## 참고문헌


1. Roberts, J. B., and Spanos, P. D., Random Vibration and Statistical Linearization, Dover Publications, Inc., 1999.
2. Chen, J. B. and Li, J., "Dynamic response and reliability analysis of non-linear stochastic structure," Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 20, pp. 33-44, 2005.
3. Deodatis, G., and Shinozuka, M., "Stochastic FEM Analysis of Non-linear Dynamic Problems," Stochastic Mechanics, Vol. III, 1988.
4. To, C. H. S., Nonlinear Random Vibration, Swets & Zeitlinger B.V., 2000.
5. Lin, Y. K., and Cai, G. Q., Probabilistic Structural Dynamics, Mc-Graw-Hill, 2004.