

액상으로 분사되는 기체의 불안정성 해석

김형준* · 권세진*

Instability analysis of gas injection into liquid

Hyungjun Kim* · Sejin Kwon*

ABSTRACT

The instability analysis of submerged gas flow into liquid is studied, which assumes gas and liquid as viscous and irrotational. At low mass flow rate of gas, injected gas plume is collection of bubbles, and increase of gas flow rate makes plume as a jet. It is well known that the transition from bubbling to jetting occurs in the transonic region. But previous works neglect viscous effect of gas flow into liquid. This paper concerns about an application of viscous potential flow theory in cylindrical gas flow into liquid. The growth rate versus wave number and mach number is compared with various condition including inviscid and viscous flow.

초 록

액상의 환경으로 고속의 기체가 분사될 때 기체-액체 표면에서 일어나는 불안정성에 대해 점성전위 유동의 이론을 이용하여 분석하였다. 기체의 속도가 낮을 경우 액상으로 기포로 형성되지만 속도가 증가하면서 기체는 제트의 형태로 변하게 되는데, 천음속 구간에서 제트로 변하게 되는 것으로 알려져 있다. 본 연구에서는 주로 액체 제트를 해석하는데 사용된 점성전위유동이론을 기체 제트의 불안정성 해석에 응용하였다. 천음속 구간에서 기체 제트의 성장률이 변하는 것을 확인하였다. 초음속 구간으로 가면서 성장률이 감소하는 것을 확인하였다. 그리고 이를 레이놀즈수와 같은 무차원수에 대해 기체 제트의 성장률의 변화에 대해 알아보았다.

Key Words: instability analysis(불안정성 해석), two-phase flow(이상유동), viscous potential flow(점성전위유동)

1. 서 론

이상유동은 고체-액체-기체 중 두 가지 상이 단일 유동장 내부에 존재하는 것을 의미한다. 이

는 공학 전반에 걸쳐 존재하는 유동현상으로, 액상에 존재하는 기체 제트의 경우 액체 금속의 연소, DCC(Direct Contact Condenser)와 같은 열교환 장치 등에 사용되고 있다. 기체-액체 유동에서는 공동화(cavitation)뿐만 아니라 Kelvin-Helmholtz 불안정성 등의 다양한 현상에 대한 연구들이 많이 진행되고 있다.

* 한국과학기술원 기계공학과 항공우주전공
연락처, E-mail: elquin01@kaist.ac.kr

특히 불안정성에 대한 연구에 있어 D. Joseph[1] 등에 의해 최근 연구되고 있는 점성전위유동은 Navier-Stokes 방정식에서 점성응력항을 속도포텐셜의 함수로 정의하여 문제를 해결하는 방법이다. Navier-Stokes 방정식은 전위유동이론(potential flow theory)을 만족하는데, 이는 방정식에서 점성항이 0이지만, 점성응력은 0이 아니라는 것이다. 이는 유체의 속도가 속도포텐셜로 정의될 때, 고체 경계면에서 노슬립(no-slip)조건이나 유체간의 횡방향속도(tangential velocity)와 전단응력보존식을 만족시키기 어렵다는 것을 의미한다. 점성응력항은 표면에서의 수직응력보존식을 통하여 점성전위유동이론을 이용한 자유경계면 해석에 적용된다. 점성전위유동은 경계면에서의 소용돌이도(vorticity)와 마찰을 무시하는 유사 점성유동이론이다.[2] 본 연구에서는 이를 이용하여 원기둥 좌표계를 사용하여 원형으로 액상으로 분사되는 기체의 표면에서 일어나는 불안정성에 대해 연구하였다.

2. 분산관계식(Dispersion relation)

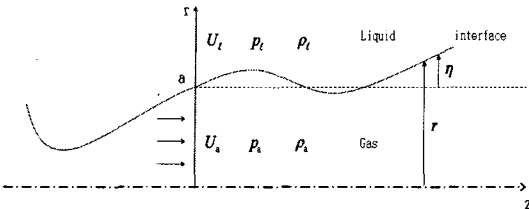


Fig. 1 Schematic of gas injection into liquid

21 지배방정식

본 연구에서는 Fig. 1처럼 액상으로 분사되는 기체 유동을 원기둥 좌표계로 나타낸다. 그리고 점성전위유동이론에 따라 속도포텐셜을 이용하여 지배방정식을 표현한다.

$$\mathbf{v} = \nabla \phi, \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad \text{Eq. 1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \phi \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla^2 \phi = 0 \quad \text{Eq. 2}$$

$$T_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\mu}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \quad \text{Eq. 3}$$

$$= 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{2\mu}{3} (\nabla^2 \phi) \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{T}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} - \frac{4}{3} \nabla^2 \phi = B(t) \quad \text{Eq. 4}$$

여기서 \mathbf{v} 는 속도벡터, ρ 는 밀도, μ 는 점성계수, δ_{ij} 는 크로넬커 델타함수, \mathbf{T} 는 점성응력텐서를 나타낸다. 연속체 방정식은 Eq. 2와 같이 표현되며, 점성응력항은 Eq. 3에서처럼 속도포텐셜을 이용하여 나타낸다. 이를 이용하여 Eq. 4와 같은 운동방정식을 유도하였다.

22 기체의 운동방정식

2.1장에서 지배방정식으로 기체에 대한 방정식을 유도한다.

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + (\nabla \phi_a \cdot \nabla) \rho_a + \rho_a \nabla^2 \phi_a = 0 \quad \text{Eq. 5}$$

$$T_{ij}^{(a)} = 2\mu_a \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{2\mu_a}{3} (\nabla^2 \phi_a) \delta_{ij} \quad \text{Eq. 6}$$

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi_a|^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_a}{\rho_a} - \frac{4}{3} \frac{\mu_a}{\rho_a} \nabla^2 \phi_a = B_a(t) \quad \text{Eq. 7}$$

23 액체의 운동방정식

액체의 경우, 비압축성 유체로 가정한다.

$$\nabla^2 \phi_l = 0, \quad T_{ij}^l = 2\mu_l \frac{\partial^2 \phi_l}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{Eq. 8}$$

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi_l|^2 + \frac{p_l}{\rho_l} = B_l(t) \quad \text{Eq. 9}$$

24 경계조건

운동조건(kinematic condition, Eq. 10)과 수직응력보존조건(normal stress balance, Eq. 11)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\nabla \phi_a \cdot \nabla) \eta = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_a \quad \text{Eq. 10}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\nabla \phi_l \cdot \nabla) \eta &= \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_l \\ p_a - p_l + (n_i T_{ij}^{(l)} n_j) - (n_i T_{ij}^{(a)} n_j) & \\ = \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} & \end{aligned} \quad \text{Eq. 11}$$

여기서 \mathbf{n} 은 두 유체의 경계면에서의 법벡터(normal vector)이다.

25 무차원화된 분산관계식

기체와 액체의 성질을 정규항과 미소교란항으로 나누고 위에서 주어진 방정식과 등엔트로피 조건을 이용하여 경계조건에 대입시킨 뒤, 이를 정규모드(standard normal mode)로 방정식을 나타낸 뒤 각 항을 무차원화시킨다. 일단 정규모드로 각 상에서의 속도포텐셜을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_a &= -i \frac{\omega - kM_a}{\kappa \hat{I}_n(\kappa/2)} \hat{H}I_n(\kappa r) E \\ \hat{\phi}_l &= -i \frac{\omega - kM_l}{k \hat{K}_n(k/2)} \hat{H}K_n(kr) E \\ \hat{\eta} &= \hat{H}E \\ E &= \exp(ikz + in\theta - i\omega t) \end{aligned} \quad \text{Eq. 12}$$

여기서 k 는 파수(wave number), n 은 방위각(azimuthal angle), ω 는 주파수(frequency)를 나타낸다. 그리고 이를 통하여 얻어지는 분산관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left[\pi_a \frac{2i}{\text{Re}} (\kappa^2 - k^2) - \pi_a^2 \right] \frac{1}{\kappa} \frac{I_n}{I_n} \\ - \frac{2i\pi_a \kappa}{\text{Re}} \frac{\ddot{I}_n}{I_n} + \frac{h\pi_l^2}{k} \frac{K_n}{K_n} \\ + \frac{2i\pi_l k m}{\text{Re}} \frac{\ddot{K}_n}{K_n} = h\text{We}(1 - n^2 - k^2) \end{aligned} \quad \text{Eq. 13}$$

여기서 I_n , K_n 은 수정베셀함수(modified bessel function)를 나타낸다. 그리고 사용된 무차원

수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h &= \frac{\rho_{l1}}{\rho_{a1}}, \quad m = \frac{\mu_l}{\mu_a}, \quad M_a = \frac{U_a}{c_a}, \quad M_l = \frac{U_l}{c_a} \\ \text{Re} &= \frac{\rho_a c_a d}{\mu_a}, \quad \text{We} = \frac{\sigma}{\rho_{l1} c_a^2 d} \end{aligned} \quad \text{Eq. 14}$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{k^2 - \frac{\pi_a^2}{1 - \frac{4i}{3\text{Re}} \pi_a}} \\ \pi_a &= \omega - kM_a, \quad \pi_l = \omega - kM_l \end{aligned}$$

3. 시간 안정성(Temporal stability)

3.1 비점성유동

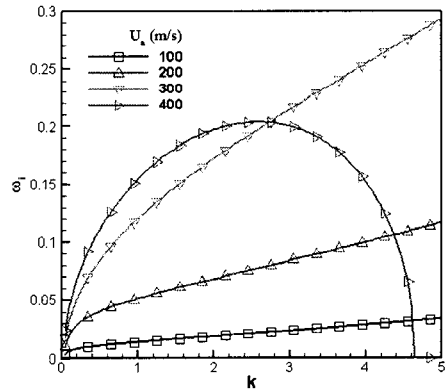


Fig. 2 Growth rate versus k

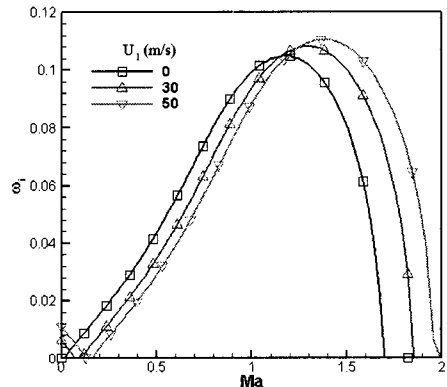


Fig. 3 Growth rate versus mach number

Fig. 2.3 에서 비점성유동에 대해서 시간안정성 해석을 수행하였다. Fig. 2 에서처럼 유입되는 기체의 속도가 음속 이하일 경우 속도가 증가하면서 불안정성이 증가하는 것을 확인할 수 있다. 그러나 마하수가 1 이상으로 증가하면서 아음속 영역에 비해 안정화되는 구간이 나타나는 것을 볼 수 있다.

Fig. 3 에서는 기체의 마하수에 따른 제트의 성장률을 알아보았는데, 이는 K.Chen[3]의 결과와 유사한 것으로 천음속 구간까지 성장률이 증가하다가 음속을 지나면서 제트가 안정화되는 것을 알 수 있다. 그리고 액상의 속도가 증가할수록 안정화되는 마하수가 증가하는데, 이는 절대속도로 비교해 보면 액상의 속도가 0인 경우와 같다는 것을 알 수 있다.

3.2 점성유동

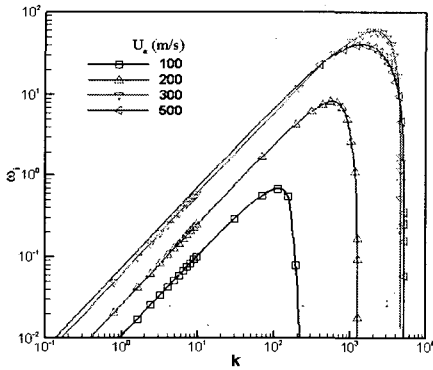


Fig. 4 Growth rate versus k

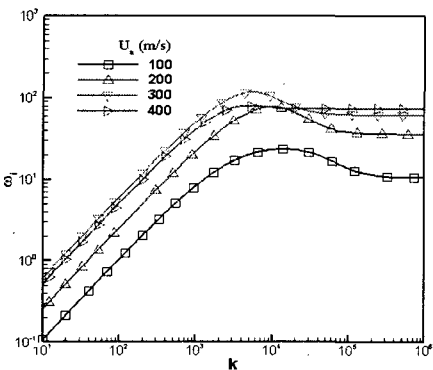


Fig. 5. Growth rate versus k
(pure Kelvin-Helmholtz instability, $We=0$)

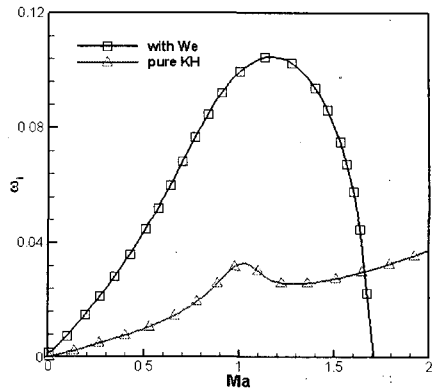


Fig. 6 Growth rate versus mach number

Fig. 4,5,6 에서 점성전위유동이론을 이용하여 제트의 성장률에 대해 알아보았다. Fig. 5에서는 We 가 0인 경우, 즉 순수한 Kelvin-Helmholtz instability에 의한 성장률을 나타낸 것이다. 그러므로 이상유동의 경우 기체 제트의 안정화에 표면장력이 영향을 주는 것을 확인할 수 있다. 이는 Fig. 6 에서도 확인할 수 있는데 표면장력의 효과를 무시한 경우 제트가 안정화되지 못하고 불안정해지는 것을 알 수 있다.

참고문헌

1. Joseph, D.D., 2003. Viscous potential flow. *J. Fluid Mech.* Vol. 479, pp.191-197
2. Funada, T., Joseph, D.D., Saitoh, M., and Yamashita, S., 2006. Liquid jet in a high Mach number air stream. *Int. J. Multiphase Flow.* Vol. 32, pp.20-50
3. Chen, K. and Richter, H.J., 1997. Instability analysis of the transition from bubbling to jetting in a gas injected into a liquid. Vol. 23, No. 4. pp.699-712.