

부구조물 합성법을 이용한 슬라이딩 모드 해석 Sliding Mode Analysis Using Substructure Synthesis Method

° 김대관*·이민수*·한재흥†·고태환**

Dae-Kwan Kim, Min-Su Lee, Jae-Hung Han and Tae-Hwan Ko

Key Words : Substructure Synthesis(부구조물 합성), Natural Mode(고유 모우드), Structural Nonlinearity(구조 비선형성), Sliding Mode(슬라이딩 모드), Nonlinear Vibration(비선형 진동)

ABSTRACT

A structural coupling method is developed for the dynamic analysis of a nonlinear structure with concentrated nonlinear hinge joints or sliding lines. Component mode synthesis method is extended to couple substructures and the nonlinear models. In order to verify the improved coupling method, a numerical plate model consisting of two substructures and torsional springs, is synthesized by using the proposed method and its model parameters are compared with analysis data. Then the coupling method is applied to a three-substructure-model with the nonlinearity of sliding lines between the substructures. The coupled structural model is verified from its dynamic analysis. The analysis results show that the improved coupling method is adequate for the structural nonlinear analyses with the nonlinear hinge and sliding mode condition.

1. 서론

대부분의 실질적인 공학적 구조물들은 복잡한 구조로 이루어지며 구조적 비선형성을 포함하고 있다. 예를 들면 함재기 및 미사일의 접는 날개 구조와 조종면의 연결부위는 제작상의 어려움 및 자체의 구조 특성으로 인해 유격(freeplay), 이선형성(bilinear), 전하중(preload) 등과 같은 구조적 비선형성을 가지게 된다. 이러한 비선형성은 공탄성 해석시 제한주기진동 및 혼돈거동과 같은 복잡한 비선형 거동을 보이며 항공기 전체의 비행 성능 저하와 더불어 심각한 구조적 문제를 발생시킬 수도 있다⁽¹⁾.

또한 기존의 선로위를 속도감속 없이 운행할 수 있게 개발된 틸팅기차(tilting train)는 차체 상부에 판토티그래프(pantograph)가 고정되어 있는 기존의 기차나 지하철과는 다르게 틸팅 구조물을 수반하게 된다. 이러한 틸팅 구조물은 기저 프레임(base frame), 슬러쥘(sledge) 그리고 판토티그래프로 이루어져 있으며, 기차의 곡선주행 시 가선과의 접촉을 유지하기 위하여 판토티그래프를 지지하고 있는 슬러쥘이 기저 프레임의 곡선 가이드 라인(guide line)을 따라 움직이는 슬라이딩 모드(sliding mode) 조건의 비선형성을 가지게 된다. 이러한 구조적 비선형성은 직접적으로 판토티그래프

집전품질에 영향을 미치게 되며 주행 안정성과 속도 성능을 좌우하는 중요한 요소 중 하나이다. 따라서, 구조물의 엄격한 동적 응답 예측 및 제어를 위하여 이러한 비선형성들을 포함하는 구조물의 정확한 동적 모델 수립이 필수적이다.

그러나 유한요소법을 이용하여 복잡한 구조특성을 가지는 구조물들을 엄밀하게 해석하기 위해서는 구조물을 매우 많은 수의 요소로 나누어야 하며, 구조물을 표현하는 행렬의 크기 또한 매우 커지게 된다. 이러한 큰 행렬식들을 이용한 해석은 많은 계산 시간과 메모리를 필요로 하게 되며, 특히 시간영역의 비선형 플러터(flutter) 해석과 같은 반복적인 해석 등에는 그 영향이 더 크게 작용하게 된다. 따라서 이러한 문제들의 해결 방법으로 모우드 접근법(modal approach)이 많이 사용되고 있다⁽²⁾.

일반적으로 실질적인 공학적 문제들에서 이러한 구조적 비선형성에 대한 정보는 전체 구조물을 선형 및 비선형의 부구조물(substructure)들로 나눌 수 있는 기회를 제공해 준다. 모우드 접근법을 활용하여 부구조물을 표현하는 부구조물 합성법(substructure synthesis)은 상대적으로 복잡한 구조물을 적은 수의 자유도로 표현하는 모델링 기법 중 하나이며, 이러한 부구조물 합성법에 관한 많은 연구가 수행되어왔다⁽³⁻⁷⁾. Hunn⁽⁸⁾은 처음으로 부분 모우드 합성법을 제시하였으며, Craig 와 Bampton⁽⁹⁾은 부구조물의 변위를 고정 구속 모우드와 과잉 구속 모우드의 구분 없이 구속 모우드(constraint mode)와 정규 모우드(normal mode)의 선형조합으로 표현하였다. 김대관 등⁽¹⁰⁾은 Craig-Bampton의 구성 모우드 합

* 한국과학기술원 항공우주공학과 대학원
† 한국과학기술원 항공우주공학과
E-mail : jaehunghan@kaist.ac.kr
Tel : (042) 869-3723, Fax : (042) 869-3710
** 한국철도기술연구원 기존철도기술개발사업단

성법(component mode synthesis method)을 확장하여 비선형 힌지 모델을 고려할 수 있는 부구조물 합성법을 제안하였으며, 접는 미사일 조종날개의 비선형 동적 모델을 수립하였다.

본 연구에서는 집중된 비선형 힌지 모델 뿐만 아니라 슬라이딩 모드 조건 또한 고려할 수 있는 개선된 부구조물 합성법을 제시하였다. 집중된 힌지 모델을 고려하기 위해 확장된 부구조물 합성법의 검증을 위하여 비틀림 스프링이 있는 평판모델의 자유 진동 해석을 수행하였다. 또한, 슬라이딩 모드 조건을 고려하기 위하여 확장된 부구조물 합성법을 개선하였으며, 슬라이딩 모드 조건이 있는 수치적 평판모델에 대한 적용을 통하여 동적응답 해석을 수행하였다.

2. 힌지 모델을 위한 부구조물 합성법

2.1 확장된 부구조물 합성법

부구조물 합성법을 이용하여 복잡한 구조물의 동적 모델을 수립하기 위해서는 전체구조물을 여러 개의 선형 및 비선형 부구조물들로 나누어야 한다. Fig. 1 과 같이 각각의 부구조물들은 적어도 하나의 다른 부구조물들과 연결되어 있으며, 임의의 선형 비감쇠 부구조물의 운동방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{RR} & M_{RI} \\ M_{RI}^T & M_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_R \\ \ddot{u}_I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{RR} & K_{RI} \\ K_{RI}^T & K_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_R \\ u_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_R \\ F_I \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서, 질량행렬, 강성행렬, 변위벡터, 외력벡터들은 각각 내부좌표 R 과 경계좌표 I 로 분할되었으며, F_R 와 F_I 는 내부좌표 및 경계좌표에 부과되는 외력벡터이다.

Craig-Bampton 의 구성 모드 합성법의 기본 가정은 각 부구조물들의 변위를 정규모우드 $[\Psi_N]$ 와 구속모우드 $[\Psi_C]$ 의 조합으로 표현할 수 있다는 것이다. 이러한 구성 모드들은 고정 경계조건의 고유치 문제와 정적 평형방정식으로부터 구할 수 있다.

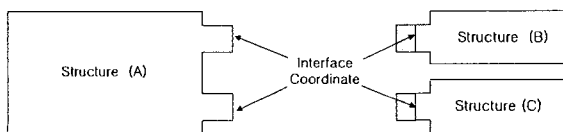


Fig. 1 A scheme of separate structure analysis

본 연구에서는 문제의 단순화를 위하여 내부좌표에 외력벡터가 부과되지 않는 두 개의 부구조물 (Sub-A, Sub-B)로 이루어진 구조물을 고려하였다. 만약 두 개의 부구조물들이 경계좌표에 존재하는 비틀림 스프링으로 구속되어 있다면, 경계좌표를 스프링이 존재하는 자유도 (I_p) 와 존재하지 않는 자유도 (I_n) 으로 나눌 수 있다. 따라서 각 부구조물의 정규모우드 및 구속모우드를 이용하면 다음과 같은 Sub-A 와 Sub-B 의 일반화된 (generalized) 운동방정식을 얻을 수 있다⁽¹⁰⁾.

$$\begin{bmatrix} m_{RR}^{(A)} & m_{RI_n}^{(A)} & m_{RI_p}^{(A)} \\ m_{RI_n}^{(A)T} & m_{I_n I_n}^{(A)} & m_{I_n I_p}^{(A)} \\ m_{RI_p}^{(A)T} & m_{I_p I_n}^{(A)} & m_{I_p I_p}^{(A)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_R^{(A)} \\ \xi_{I_n}^{(A)} \\ \xi_{I_p}^{(A)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_R^{2(A)} & 0 & 0 \\ 0 & k_{I_n I_n}^{(A)} & k_{I_n I_p}^{(A)} \\ 0 & k_{I_p I_n}^{(A)T} & k_{I_p I_p}^{(A)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_R^{(A)} \\ \xi_{I_n}^{(A)} \\ \xi_{I_p}^{(A)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{I_n}^{(A)} \\ F_{I_p}^{(A)} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} m_{I_n I_n}^{(B)} & m_{I_n I_p}^{(B)T} & m_{RI_n}^{(B)T} \\ m_{I_n I_p}^{(B)} & m_{I_p I_p}^{(B)} & m_{RI_p}^{(B)T} \\ m_{RI_n}^{(B)} & m_{RI_p}^{(B)} & m_{RR}^{(B)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_{I_n}^{(B)} \\ \xi_{I_p}^{(B)} \\ \xi_R^{(B)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{I_n I_n}^{(B)} & k_{I_n I_p}^{(B)} & 0 \\ k_{I_p I_n}^{(B)T} & k_{I_p I_p}^{(B)} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_R^{2(B)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_{I_n}^{(B)} \\ \xi_{I_p}^{(B)} \\ \xi_R^{(B)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{I_n}^{(B)} \\ F_{I_p}^{(B)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서, $\{\xi_R \ \xi_{I_n} \ \xi_{I_p}\}^T$ 는 독립적인 일반화된 변위벡터이다.

Sub-A 와 Sub-B 의 결합을 위한 적합방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\{u_{I_n}^{(A)}\} = \{u_{I_n}^{(B)}\} = \{u_{I_n}\} \quad (4a)$$

$$\{\xi_{I_n}^{(A)}\} = \{\xi_{I_n}^{(B)}\} = \{\xi_{I_n}\} \quad (4b)$$

$$\{F_{I_p}^{(A)}\} = [K_\theta] \left(\{u_{I_p}^{(B)}\} - \{u_{I_p}^{(A)}\} \right) = [K_\theta] \left(\{\xi_{I_p}^{(B)}\} - \{\xi_{I_p}^{(A)}\} \right) \quad (5)$$

$$\{F_{I_p}^{(B)}\} = -[K_\theta] \left(\{u_{I_p}^{(B)}\} - \{u_{I_p}^{(A)}\} \right) = -[K_\theta] \left(\{\xi_{I_p}^{(B)}\} - \{\xi_{I_p}^{(A)}\} \right) \quad (6)$$

여기서, $[K_\theta]$ 는 비틀림 스프링 계수로 이루어진 대각행렬이다.

식(4)~식(6)을 식(2)와 식(3)에 대입하여 결합시키면 식(7)과 같은 결합된 구조물의 일반화된 운동방정식을 얻을 수 있다.

식(7)을 이용하여 결합된 구조물의 고유 주파수와 모드 형상 및 동적응답을 구할 수 있으며, 본 절에서 유도된 확장된 부구조물 합성법은 두 개 이상의 부구조물들로 구성된 구조물에 적용될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} m_{RR}^{(A)} & m_{Rn}^{(A)} & m_{Rp}^{(A)} & 0 & 0 \\ m_{Rn}^{(A)T} & m_{InIn}^{(A)} + m_{InIn}^{(B)} & m_{InIp}^{(A)} & m_{InIp}^{(B)T} & m_{Rn}^{(B)T} \\ m_{Rp}^{(A)T} & m_{InIp}^{(A)T} & m_{IpIp}^{(A)} & 0 & 0 \\ 0 & m_{InIp}^{(B)} & 0 & m_{IpIp}^{(B)} & m_{Rp}^{(B)T} \\ 0 & m_{Rn}^{(B)} & 0 & m_{Rp}^{(B)} & m_{RR}^{(B)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\xi}_R^{(A)} \\ \ddot{\xi}_{In}^{(A)} \\ \ddot{\xi}_{Ip}^{(A)} \\ \ddot{\xi}_{Ip}^{(B)} \\ \ddot{\xi}_R^{(B)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_R^{2(A)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{InIn}^{(A)} + k_{InIn}^{(B)} & k_{InIp}^{(A)} & k_{InIp}^{(B)} & 0 \\ 0 & k_{InIp}^{(A)T} & k_{IpIp}^{(A)} + K_\theta & -K_\theta & 0 \\ 0 & k_{InIp}^{(B)T} & -K_\theta & k_{IpIp}^{(B)} + K_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_R^{2(B)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_R^{(A)} \\ \xi_{In}^{(A)} \\ \xi_{Ip}^{(A)} \\ \xi_{Ip}^{(B)} \\ \xi_R^{(B)} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (7)$$

2.2 비틀림 스프링 예제

비틀림 스프링을 고려하기 위해 확장된 부구조물 합성법의 검증을 위하여 Fig. 2 와 같은 캔틸레버식 평판에 대한 자유 진동 해석을 수행하였다. 평판 모델은 두 개의 부구조물들로 이루어져 있으며, 계면좌표에 존재하는 일곱 개의 비틀림 스프링들에 의하여 결합되어 있다. 각 절점은 한 개의 병진자유도와 두 개의 회전자유도로 이루어져있으며, 해석에 사용된 스프링 상수, 탄성 계수, 밀도 및 포아송 비는 각각 1Nm/rad, 72GPa, 2800 kg/m³, 0.33 이다.

해석에 사용된 관심주파수 영역은 0~500Hz 이며, Sub-A 와 Sub-B 의 표현을 위하여 각각 한 개와 일곱 개의 정규모우드를 사용하였다.

Table 1 Comparison of natural frequency and mode shape

Mode	Nastran Freq. (Hz)	Present Freq. (Hz)	Error %	MAC
1	22.26	22.26	0.000	1.000
2	99.42	99.43	0.004	1.000
3	207.38	207.41	0.016	1.000
4	343.55	344.90	0.392	0.998
5	418.12	418.37	0.059	1.000
6	508.51	509.46	0.188	1.000
7	665.90	679.08	1.979	0.981
8	703.20	708.77	0.792	0.994

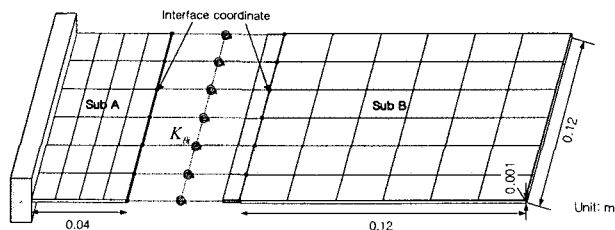


Fig. 2 A scheme of plate model with two components and torsional springs

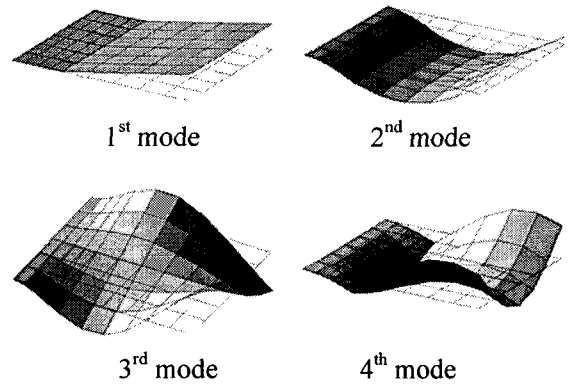


Fig. 3 Fundamental mode shapes of coupled plate model

확장된 부구조물 합성법을 이용하여 해석된 전체구조물의 고유 주파수와 모우드 형상 결과를 MSC/NASTRAN 을 이용한 해석결과와 비교하였다. Table 1 은 두 방법에 의해서 계산된 주파수, 오차, MAC(modal assurance criteria)⁽¹¹⁾을 보이고 있으며, 두 결과가 잘 일치함을 확인할 수 있다. Fig. 3 은 식 (7)로부터 구한 전체구조물의 모우드 형상을 보이고 있다.

3. 슬라이딩 모드 조건을 위한 부구조물 합성법

3.1 개선된 부구조물 합성법

슬라이딩 모드를 위한 부구조물 합성법의 개선을 위하여 Fig. 4 와 같이 두 개의 부구조물 (Sub-A, Sub-B)로 이루어진 구조물을 고려하였다. 두 개의 부구조물들은 각각의 경계좌표에 존재하는 가이드 라인(guide line)과 롤러(roller)에 의해 구속되어 있으며, 롤러가 가이드 라인을 따라 이동하는 슬라이딩 모드 조건이 존재하는 경우이다. 만약 롤러의 계면좌표 I_i가 두 개의 연속적인 가이드 라인 계면좌표 I_i 과 I_{i+1} 사이에 존재한다면, 식 (2)와 식 (3)과 같은 방법으로 Sub-A 와 Sub-B 의 일반화된(generalized) 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

3.2 슬라이딩 모드 예제

슬라이딩 모드를 고려한 개선된 부구조물 합성법의 검증을 위하여 Fig. 5 와 같은 평판 모델에 대한 강제응답 해석을 수행하였다. 평판 모델은 세 개의 부구조물들로 이루어져 있으며, 각 부구조물들은 계면좌표와 롤러에 의한 슬라이딩 모드 조건에 의해 구속되어 있다. 각 절점은 한 개의 병진자유도와 두 개의 회전자유도로 이루어져있으며, 해석에 사용된 스프링 상수, 탄성 계수, 밀도 및 포아송 비는 각각 1000N/m, 72GPa, 2800 kg/m³, 0.33 이다.

해석에 사용된 관심주파수 영역은 0~500Hz 이며, Sub-A 와 Sub-C 의 표현을 위하여 각각 한 개의 정규모우드를 사용하였으며, Sub-C 에 대하여 일곱 개의 정규모우드를 사용하였다. 다음과 같은 두 가지의 외력을 Sub-B 의 노드-150 에 부과하였으며, Newmark beta method⁽¹²⁾를 이용하여 합성된 구조물의 동적응답해석을 수행하였다.

Case 1	$F_y = 30 \times \sin(2\pi \times 5 \times t) N$, $F_z = 500 \times \sin(2\pi \times 5 \times t) N$
Case 2	$F_y = 30 \times \sin(2\pi \times 70 \times t) N$, $F_z = 500 \times \sin(2\pi \times 70 \times t) N$

Fig. 6 은 Case1 에 대한 노드-150 에서의 수평 및 수직 변위를 보이고 있다. 수직 변위의 경우 가진 주파수인 5Hz 의 주요성분으로 이루어져 있으며, 수평 변위의 경우 가진 주파수(5Hz)와 구조물의 1 차 모우드 주파수(37Hz)의 조합으로 이루어져 있다. Fig. 7 은 Case2 에 대한 동일 노드의 수직 및 수평 변위를 보이고 있으며, 두 변위에서 모두 가진 주파수(70Hz)와 1 차 모우드 주파수(37Hz)의 주요 성분이 나타남을 확인할 수 있다. Fig. 8 과 Fig. 9 는 Case 1, 2 에 대한 결합된 구조물의 동적 거동을 보이고 있다.

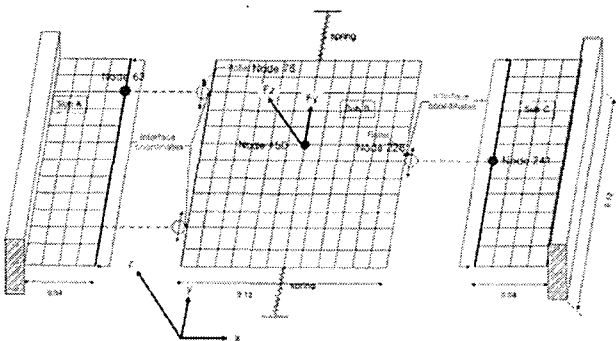
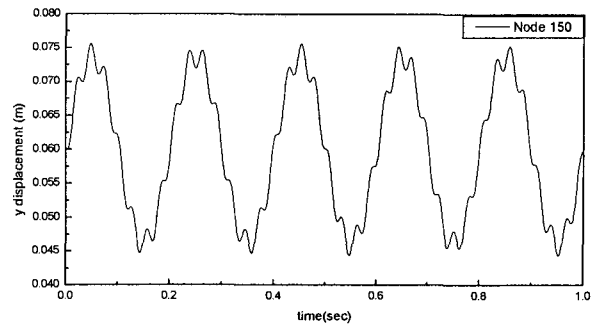
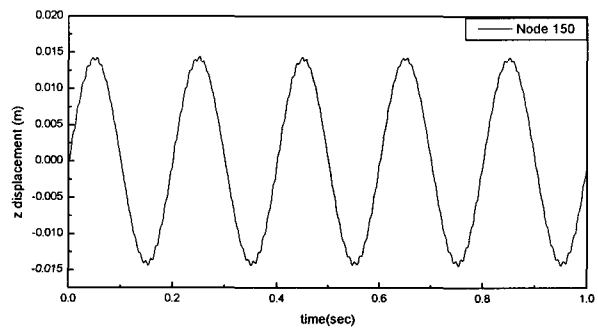


Fig. 5 A scheme of plate model with rollers for dynamic response

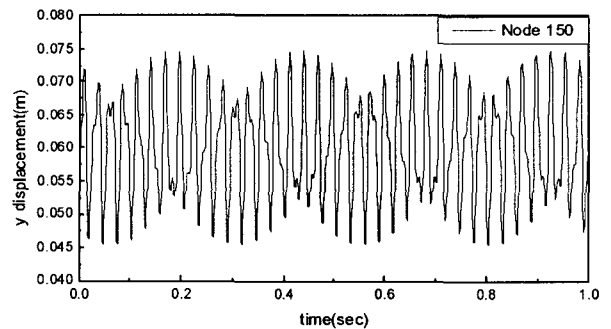


(a) Horizontal displacement

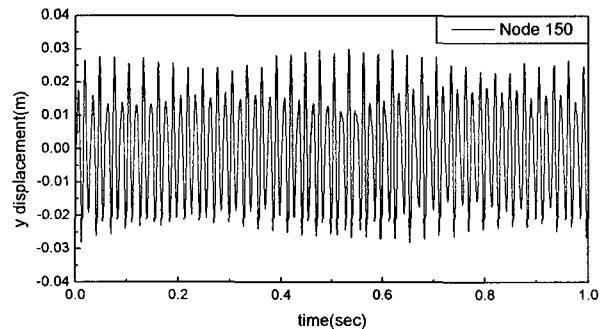


(b) Vertical displacement

Fig. 6 Dynamic responses of Node 150 for 5Hz excitation



(a) H displacement



(b) Vertical displacement

Fig. 7 Dynamic responses of Node 150 for 70Hz excitation

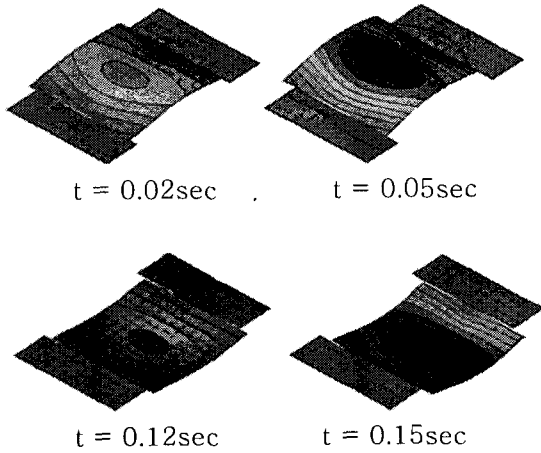


Fig. 8 Dynamic response motions of total structure for 5Hz excitation.

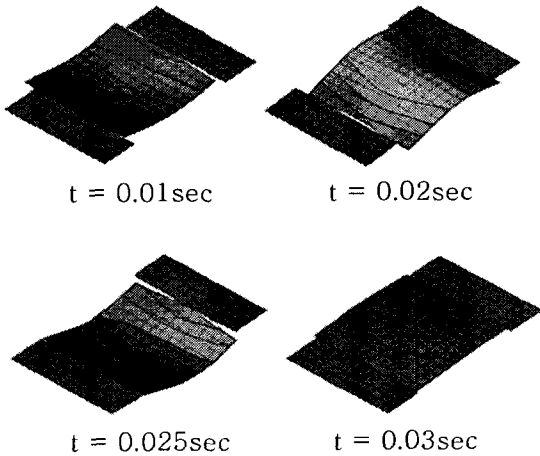


Fig. 9 Dynamic response motions of total structure for 70Hz excitation.

4. 결론

본 연구에서는 집중된 구조적 비선형성인 비선형 힌지 모델 뿐만 아니라 슬라이딩 모드 조건을 고려하기 위하여 확장된 구성 모드 합성법을 개선하였다. 확장된 부구조물 합성법의 검증을 위하여 두개의 부구조물과 비틀림 스프링으로 이루어진 캔틸레버식 평판 모델에 대한 자유 진동 해석을 수행하여 NASTRAN 해석 결과와 비교하였다. 또한 슬라이딩 모드의 고려를 위해 개선된 부구조물 합성법을 슬라이딩 모드 조건이 존재하는 평판 모델에 적용하여 결합된 전체 구조물의 비선형 모델을 수립하고 동적거동을 고찰하였다. 개선된 부

구조물 합성법은 세가지 검증과정을 통하여 그 타당성을 확인하였으며, 비선형 공탄성 해석 (nonlinear aeroelastic analysis) 등에 효율적 활용이 기대된다.

후 기

본 연구는 한국철도기술연구원 (Korea Railroad Research Institute)의 연구비 지원(철도기술연구개발사업)에 의해 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) 김대관, 배계성, 이 인, 신영석, 이열화, 2002, "접는 미사일 조종날개의 비선형 동특성", 한국소음진동학회논문집, 제 12 권, 제 10 호, pp. 808~815.
- (2) Bae, J.S., Kim, D.K., Shin, W.H., Lee, I., and Kim, S.H., 2004, "Nonlinear Aeroelastic Analysis of a Deployable Missile Control Fin," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 41, No. 2, pp. 264-271.
- (3) Hurty, W. C., 1965, "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes," *AIAA Journal*, Vol. 3, pp. 678-685.
- (4) Karpel, M. and Newman, M., 1975, "Accelerated Convergence for Vibration Modes Using the Substructure Coupling Method and Fictitious Coupling Masses," *Israel Journal of Technology*, Vol. 13, pp. 55-62.
- (5) Karpel, M., 1988, "Efficient Vibration Mode Analysis of Aircraft with Multiple External Store Configurations," *Journal of Aircraft*, Vol. 25, No. 8, pp. 747-751.
- (6) Karpel, M. and Raveh, D., M., 1966, "Fictitious Mass Element in Structure Dynamics," *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 3, pp. 607-613.
- (7) Meirovitch L. and Hale, A. L., 1981, "On the Substructure Synthesis Method," *AIAA Journal*, Vol. 19, pp. 940-947.
- (8) Hunn, B. A., 1955, "A Method of Calculating the Normal Modes of an Aircraft," *Quarterly Journal of Mechanics*, Vol. 8, pp. 38-58.
- (9) Craig, R. and Bampton, M, 1965, "Coupling of Structures for Dynamic Analyses," *AIAA Journal*, Vol. 6, pp. 678-685.
- (10) Kim, D.K., Bae, J.S., Lee, I., and Han, J.H., 2005, "Dynamic Characteristics and Model Establishment of Deployable Missile Control Fin with Nonlinear Hinge," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 42, No. 1, pp. 66-77.
- (11) Allemang, R.J., Brown, D.L., 1982, "A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis," *Proceedings of 1st International Modal Analysis Conference*, pp. 110-116.
- (12) MSC/NASTRAN Basic Dynamic Analysis User's Guide, V. 68.