

# 끝단 집중질량과 크랙을 가진 외팔보의 진동 해석

## Vibration Analysis of Cantilever Beams Having a Concentrated Tip Mass and a Crack

김경호\*·엄승만\*\*·유흥희†

Kyung-Ho Kim, Seung-Man Eom, Hong Hee Yoo

**Key Words :** Vibration Analysis(진동 해석), Cantilever Beam(외팔보), Concentrated Tip Mass(끝단 집중 질량), Open Crack(개구형 크랙), Stress Intensity Factor(응력집중계수), Natural Frequency(고유진동수), Flexibility Function(유연함수)

### ABSTRACT

In this paper the vibration analysis of cantilever beams having a concentrated tip mass and an open crack are performed. The influences of a concentrated tip mass, the crack depth, and the crack position on the natural frequencies of the cracked cantilever beam are investigated by a numerical method. The cracked cantilever beam is modeled based on the Euler-Bernoulli beam theory. The flexibility due to crack is calculated using a fracture mechanics theory. The crack is assumed to be opened during the vibrations. The results obtained by the present method were compared with experimental results to verify the theory. As inspected, as the crack depth and the concentrated tip mass increase, the natural frequencies of the beam decrease. In general, the natural frequencies of the cantilever beam are more sensitive to the depth of the crack than the position of the crack.

### 1. 서론

보 형태의 구조물은 오늘날 가장 널리 쓰이는 구조요소 중의 하나로 많은 수치적 방법과 정적 및 동적 상태에서의 적용을 통해 그 특성이 해석되고 있다. 결함이 없는 구조물에 대한 해석은 검증된 신뢰성을 가지고 있으나 결함을 가진 구조물의 경우 아직 만족할만한 수준의 신뢰성을 가지지 못하고 있다. 외팔보 형태의 구조물의 경우 결함에 따라 진동특성은 크게 변화하게 된다. 이것은 보가 크랙과 같은 결함을 가질 경우 크랙이 존재하는 위치에서 강성저하가 발생하여 구조물의 자체 탄성에 의한 변형에너지 외에 크랙에 의한 영향으로 추가적인 변형에너지가 발생하기 때문이다. 특히 외팔보 끝단에 집중질량을 가지는 구조물에 크랙이 존재하는 경우<sup>(1)</sup> 크랙과 집중질량의 영향으로 인하여 구조물의 진동특성은 현격히 변화할 것이다. 따라서 보의 끝단의 집중질량과 크랙이 외팔보의 진동특성에 미치는 영향을 예측하는 것은 중요한 일이라 할 수 있다. 크랙을 가진 구조물의 동적 응답에 관한 연구는 Bock<sup>(2)</sup>에 의한 콘크리트 구조 요소의 굽힘변형에 대해 시작되어 수

많은 연구자들에<sup>(3)</sup> 의해서 수행 되어 오고 있다. 그 중에서도 크랙을 가지는 보 형태의 구조물의 해석은 오일러-베르누이 및 티모센코 보 이론을 중심으로 적용되어 크랙이 전체 구조물 동특성에 미치는 영향에 대한 연구가 주로 이루어져 왔다. 특히 Shen<sup>(4)</sup> 등은 하나의 크랙에 의한 고유진동수의 변화를 예측하였고, Chati<sup>(5)</sup> 등은 진동 시 크랙의 개폐현상에 의한 비선형 효과의 영향을 제시하였다. 또한 Chondros등은<sup>(6,7)</sup> 크랙을 가지는 보의 연속체 이론을 제시하고 그에 따른 여러 형태의 보에 관한 진동해석을 수행하였다. Douka등은<sup>(8)</sup> 이중크랙이 존재하는 외팔보에 고유진동수 변화를 예측하는 방법을 제시하였고 Mohamed등은<sup>(9)</sup> 크랙을 가지는 보의 고유진동수 해석에 관한 새로운 알고리즘을 제시하였으며 Tomasel등은<sup>(10)</sup> 실험을 통해, 크랙에 의해 발생하는 유연함수와 고유진동수의 변화를 연구하였다. 최근 Dado등은<sup>(11)</sup> 크랙이 존재하는 경우 외팔보의 인장 및 굽힘 방향 연성효과가 고려된 유연함수를 제시하고 그에 따른 영향을 연구하였다.

이 연구에서는 끝단에 집중질량을 가지는 외팔보의 임의의 위치에 개구형 크랙이 존재할 경우 집중질량과 크랙이 외팔보의 고유진동수에 미치는 영향을 조사하였다. 크랙에 의한 응력집중 현상은 1 차 파괴 모드만 고려하였으며 크랙은 비선형 효과를 무시한 비전진 개구형이라 가정하고 수치해석을 통해 집중질량의 크기 및 크랙의 크기와 위치 변화에 따른 고유진동수의 변화를 비교 고찰하였다

† 책임저자 ; 정희원, 한양대학교 기계공학부  
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr  
Tel : (02) 2220-0446, Fax : (02) 2293-5070

\* 정희원, 한양대학교 대학원 기계공학과

\*\* 정희원, 한양대학교 대학원 기계공학과

## 2. 시스템 모델링

Fig. 1 은 보 끝단에 집중질량  $M_c$ 와 고정단으로부터  $x_c$  만큼 떨어진 위치에 크랙을 가지는 외팔보로서 재질은 균일하고 등방성이며 사각단면을 가진 오일러 보이다. 여기서  $L$  은 외팔보의 전체 길이이고  $b$  와  $h$  는 각각 보의 너비와 높이이며  $a_c$  는 크랙의 최대 깊이를 나타낸다. 오일러-베르누이 보 이론에 근거한 외팔보의 굽힘방향 지배방정식은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

여기서 외팔보의 굽힘방향 변위는  $w(x,t)$  이고  $E$  와  $I$  는 각각 영률과 단면 2 차모멘트이며  $\rho$  는 보의 단위길이당 질량을 나타낸다. 식 (1)에 변수분리법을 적용하면 다음과 같이 공간함수만으로 이루어진 새로운 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} + \frac{\omega^2 \rho}{EI} W(x) = 0 \quad (2)$$

Fig. 2 는 Fig. 1 의 등가 모델로 크랙이 존재하는 위치에서 크랙에 의해 추가적으로 발생하는 축방향 및 굽힘방향의 에너지를 병진스프링  $K_T$  와 회전스프링  $K_R$  로 이루어진 강성행렬로 대체할 수 있음을 나타낸다.

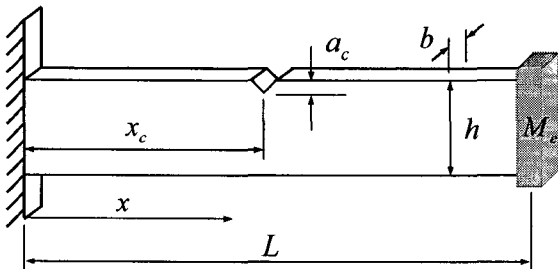


Fig. 1 Cantilever beam with crack.

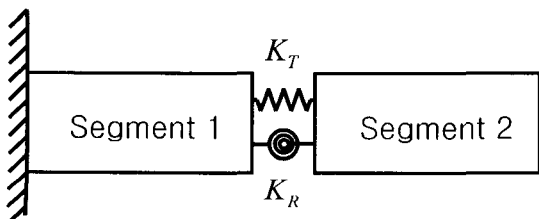


Fig. 2 Two-segment cracked beam model.

식 (2)에 의한 일반해는 크랙이 위치한  $x_c$  를 기준으로 하나의 외팔보를 두개의 연속된 구간으로 나누어 다음과 같이 구할 수 있다.

Segment 1 :  $0 \leq x < x_c$

$$W_1(x) = A_1 \cos(\lambda_w \bar{x}) + A_2 \sin(\lambda_w \bar{x}) + A_3 \cosh(\lambda_w \bar{x}) + A_4 \sinh(\lambda_w \bar{x}) \quad (3)$$

Segment 2 :  $x_c \leq x \leq L$

$$W_2(x) = A_5 \cos(\lambda_w \bar{x}) + A_6 \sin(\lambda_w \bar{x}) + A_7 \cosh(\lambda_w \bar{x}) + A_8 \sinh(\lambda_w \bar{x}) \quad (4)$$

식 (3) 과 (4)에서 무차원화된 변수들은 다음과 같이 정의 한다.

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{x}_c = \frac{x_c}{L}, \quad \lambda_w^4 = \frac{\omega^2 \rho L^4}{EI} \quad (5)$$

여기서  $\omega$  는 시스템의 고유진동수 이며 식 (3) 과 (4)에서 미지수  $A_1 \sim B_8$  은 외팔보의 굽힘방향 경계조건 및 크랙이 존재하는 위치에서의 연속조건인 식 (6)~(10)를 통해 구할 수 있다.

$$W_1(0) = 0, \quad W_1'(0) = 0, \quad W_2''(L) = 0, \\ W_2'''(L) = -\frac{M_r \lambda_w^4}{L^3} V_2(L) \quad (6)$$

식 (6)은 외팔보의 경계조건으로 여기서 집중질량에 의한 효과  $M_r = M_c / \rho L$  이다. 식 (7)은 크랙의 위치에서 연속조건으로 다음과 같다.

$$W_1(x_c) = W_2(x_c), \quad W_1''(x_c) = W_2''(x_c), \\ W_1'''(x_c) = W_2'''(x_c) \quad (7)$$

또한 크랙의 위치에서 축방향으로 작용하는 힘과 굽힘 모멘트에 의한 관계식은 회전 및 병진 스프링 상수가 포함된 식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(x_c) - U_1(x_c) \\ W_2'(x_c) - W_1'(x_c) \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서  $U(x)$  는 외팔보의 인장방향 변위이며  $[k_{ij}]$  는  $2 \times 2$  강성행렬 요소로서 축방향 및 굽힘 방향의 연성효과를 고려할 수 있다. 인장과 굽힘에 의한 연성효과가 전체시스템에 미치는 영향이 미소하므로 이를 무시하면 식 (8)은 다음과 같다.

$$M = k_{22}[W_2'(x_c) - W_1'(x_c)] \quad (9)$$

또 굽힘 모멘트  $M$  은 보의 탄성변위에 근거하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$M = EIW_1''(x_c) \quad (10)$$

식 (6)~(10)의 관계를 이용하여 얻어진 8 개의 방정식을 연립하고 행렬형태로 간략히 표현하면 다음과 같다.

$$[B_{ij}]\{A_j\} = 0 \quad (11)$$

여기서 유용해를 얻기위한 특성방정식  $|B_{ij}| = 0$  을 통해 외팔보의 고유진동수를 구할 수 있다.

### 3. 크랙에 의한 탄성에너지

Fig. 3 은 크랙이 존재하는 위치에서 보의 단면 형상이다. 여기서  $\alpha$  와  $a_c$  는 크랙의 양과 크랙의 최대 깊이를 나타낸다.

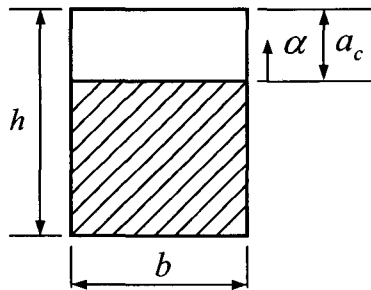


Fig. 3 Geometry of the cracked section.

Fig. 2 와 같이 축방향과 굽힘방향에 하중이 가해지는 경우 Castigliano 의 정리를 이용하여 크랙의 위치에서 부가적으로 발생하는 변형에너지와 이에 따른 유연행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial P_i \partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[ \int_A J_s dA \right] \quad (12)$$

여기서 각 힘의 방향을 의미하는  $i, j=1, 2$  이며 이는 각각  $P_1 = P, P_2 = M$  을 나타낸다. 또한 크랙에 의해 발생하는 변형에너지 밀도 함수는 제 1 파괴모드만 고려할 경우 다음과 같다.

$$J_s = \frac{1-\nu^2}{E} (K_{IP} + K_{IM}) \quad (13)$$

여기서  $\nu$  는 포아송의 비이며  $K_{IP}$  와  $K_{IM}$  은 각각 제 1 파괴모드에서 축방향의 힘  $P$  와 굽힘 모멘트  $M$  에 의한 응력집중계수를 의미한다. 이 경우 사각단면 보는 자중에 의한 영향만을 받으므로 각 응력집중계수는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} K_{IP} &= \frac{P}{bh} \sqrt{\pi\alpha} F_1(\alpha) \\ K_{IM} &= \frac{6M}{bh^2} \sqrt{\pi\alpha} F_2(\alpha) \end{aligned} \quad (14)$$

크랙의 깊이  $\alpha$  에 대한 함수  $F_1$  과  $F_2$  는 다음과 같이 근사화 될 수 있다.

$$\begin{aligned} F_1(\alpha) &= \sqrt{\frac{2 \tan(\pi\alpha/2)}{\pi\alpha}} \\ &\times \left[ \frac{0.752 + 2.02\alpha + 0.37(1 - \sin(\pi\alpha/2))^3}{\cos(\pi\alpha/2)} \right] \\ F_2(\alpha) &= \frac{1.99 - \alpha(1-\alpha)(2.15 - 3.39\alpha + 2.7\alpha^2)}{\sqrt{\pi}(1+2\alpha)(1-\alpha)^{3/2}} \end{aligned} \quad (15)$$

식 (12)~(15)를 이용하여 유연행렬을 구하고 여기에 무차원 파라미터  $\bar{\alpha} = \alpha/h$  와  $\bar{a} = a_c/h$  를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{2\pi h}{A} \frac{(1-\nu^2)}{E} \int_{\bar{b}}^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_1^2(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} \\ C_{12} = C_{21} &= \frac{\pi h^2}{I} \frac{(1-\nu^2)}{E} \int_{\bar{b}}^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_1(\bar{\alpha}) F_2(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} \end{aligned}$$

$$C_{22} = \frac{6\pi h(1-\nu^2)}{I} \frac{1}{E} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_2^2(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} \quad (16)$$

식 (8)에 사용된 강성행렬식은 식 (16)에서 구한 유연행렬을 이용하면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (17)$$

여기서  $k_{11}$  과  $k_{22}$  는 각각 Fig. 2 에서 나타낸 병진 스프링상수  $K_T$  와 회전 스프링상수  $K_R$  을 의미하며  $k_{12}$  와  $k_{21}$  은 각 힘의 방향에 대한 연성효과를 표현한 것이다. 유연행렬을 이루는 계수의 연성효과가 전체 시스템의 고유진동수에 미치는 영향은 극히 미소하므로 식 (9)에서 사용된 강성계수  $k_{22}$  는 다음과 같다.

$$k_{22} = C_{11} / (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}) = 1/C_{22} \quad (18)$$

#### 4. 수치해석 결과 및 고찰

Fig. 4 는 무차원화된 크랙의 위치가 0.049 로 외팔보의 고정단에 가까이 존재하고 크랙의 깊이가 0.0 부터 0.8 까지 증가할 때 정규화된 굽힘방향의 첫번째, 두번째 그리고 세번째 고유진동수의 변화를 실험 및 다른 수치해석 해와 비교한 것이다. 여기서 수치해석에 사용된 보의 재원은 테이블 1 과 같다. 동일한 위치에서 크랙의 변화에 의한 고유진동수의 변화는 크랙이 최대 깊이를 가질 경우 크랙이 없는 외팔보에 비해 약 47% 감소함으로서 저차모드에서 가장 두드러지며 고차모드로 갈수록 그 영향도가 낮아짐을 확인할 수 있다. 또한 수치해석시 식 (16)과 같은 유연함수를 사용한 결과 다른 해석치들에 비해 더 실험치와 가까운 값을 가지는 고유진동수를 얻을 수 있었다.

Table 1 Numerical data used for the simulation.

Notation	Description	Data
$\rho$	Mass per unit length	1.2 kg/m
$E$	Young's modulus	70GPa
$A$	Cross section area	4.0 E-4 m <sup>2</sup>
$I$	Area moment of inertia	2.0 E-7 m <sup>4</sup>
$L$	Length	10 m

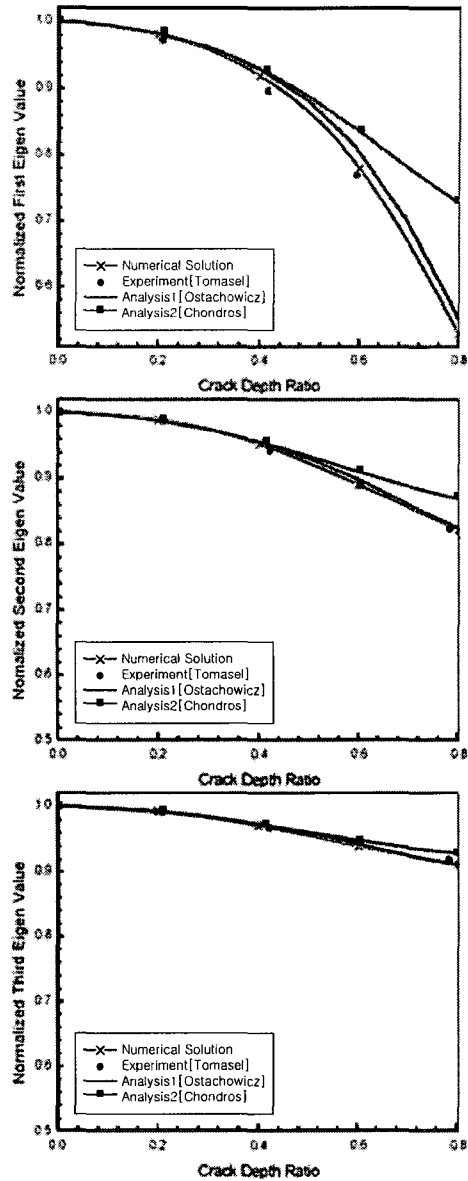


Fig. 4 Comparison between the experimental values and the mathematical model for different modal frequencies.

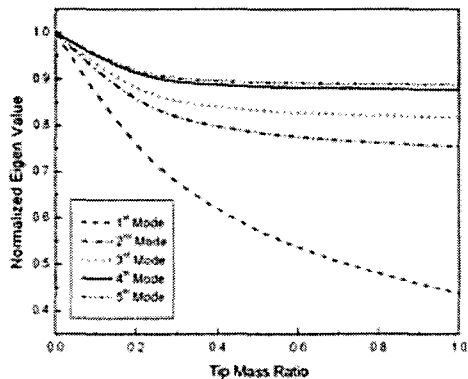


Fig. 5 Effect of the tip mass on the natural frequencies of cracked cantilever beam.

Fig. 4 에서 본 논문의 수치해석 결과와 비교대상으로 사용된 유연함수는 Ostachowicz 등의 방법과 Chondros 등에 의한 방법으로 이는 크랙의 대칭성을 고려한 연속체 진동이론에 근거한다. 여기서 각각에 의한 유연함수는  $n$  차 다항식을 통해 근사화된 유연함수로 다항식 내부에서 크랙의 위치와 깊이에 영향 받으나 보의 길이와는 무관하다. 따라서 크랙이 존재하지 않을 경우 유연함수는 0 에 가까운 매우 작은 값을 가지게 되어 크랙에 위치에 따른 고유진동수 변화는 발생하지 않는다.

Fig. 5 는 크랙의 위치와 크랙의 크기가 모두 0.5 인 경우 외팔보의 끝단에 위치한 집중질량  $M_r$  에 따른 각 고유진동수의 정규화된 결과이다.

무차원화된 집중질량  $M_r$  을 0 부터 1 까지 증가시켰을 때 집중질량이 커질수록 고유진동수가 낮아짐을 확인할 수 있으며 모든 고유진동수가  $M_r$  이 0.3 을 지나면서 그 영향이 크게 줄어들음을 확인할 수 있다. 또 최대 집중질량이 가해졌을 경우 1 차 고유진동수가 66% 감소하여 가장 큰 영향을 받으며 모드가 증가할 수록 그 영향이 감소함을 확인할 수 있다.

Fig. 6 과 Fig. 7 은 크랙의 크기가 0.4 일 경우 크랙의 위치와 보 끝단에 집중질량의 변화에 따른 각 고유진동수의 변화와 크랙의 위치가 0.4 일 경우 크랙의 크기와 보 끝단에 집중질량의 변화에

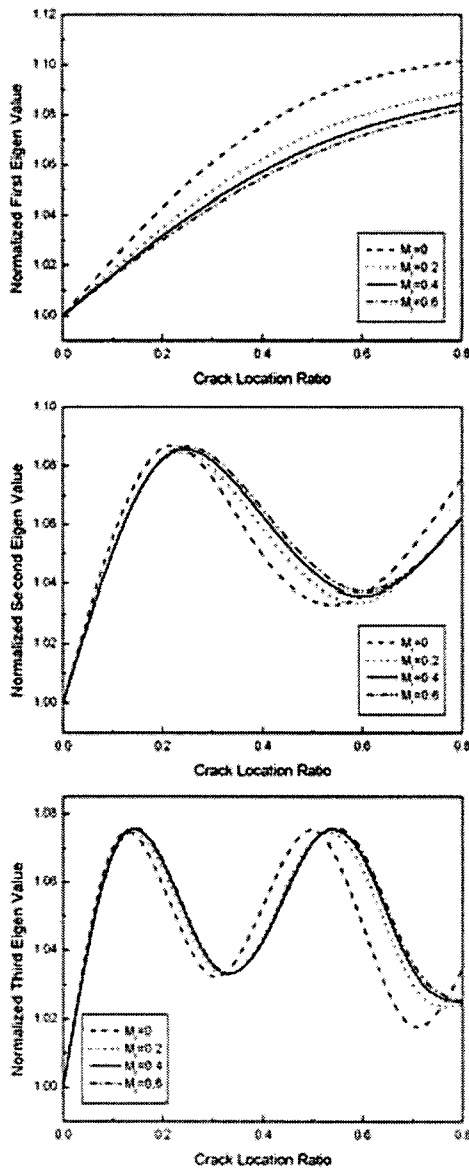


Fig. 6 Effect of the crack location with tip mass on the natural frequency of beam.

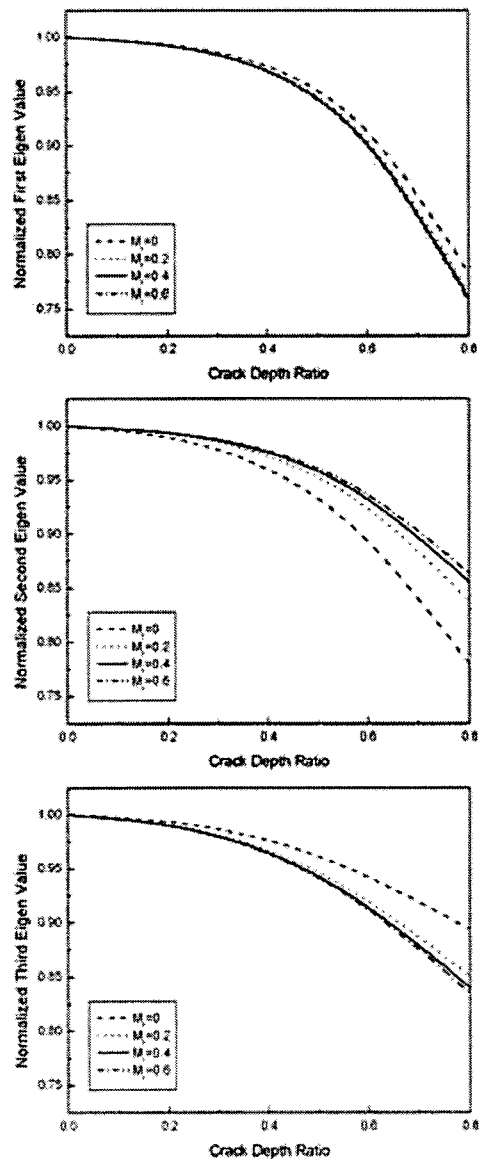


Fig. 7 Effect of the crack depth with tip mass on the natural frequency of beam.

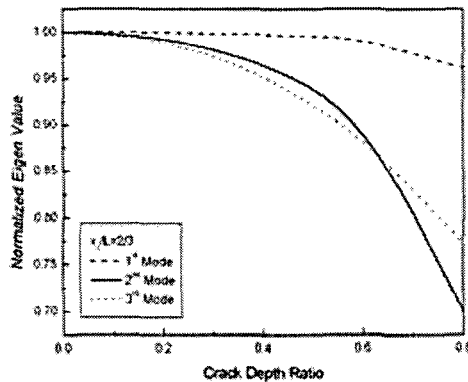


Fig. 8 Effect of the crack depth on the natural frequency of beam.

따른 1 차 ~ 3 차까지 각 고유진동수에 변화를 나타낸 것이다. Fig. 6 에서 각 고유진동수는 크랙의 위치가 변화함과 동시에 그 모드가 증가 함으로서 주기적으로 변화하며 집중질량에 의한 영향으로 그 변화량에 차이가 발생하는 것을 볼 수 있다. 따라서 Fig. 8 과 같이 크랙이 존재하는 위치에 따라 크랙에 크기에 의한 고유진동수의 변화량이 1 차 모드에 비해 2 차나 3 차 모드에서 더 크게 나타날 수 있다. Fig. 7 에서 크랙의 크기가 변화함에 따라 1 차 모드의 경우 집중질량의 크기가 증가할수록 고유진동수는 감소량은 더욱 증가하며 2 차 모드의 경우는 집중질량의 크기가 증가할수록 고유진동수의 감소량은 감소한다. 그리고 3 차 모드의 경우는 1 차 모드와 동일한 형태로 고유진동수의 감소량은 증가하나 1 차 모드에 비해 크랙의 크기에 의한 효과가 더 크게 작용한다. 또한 Fig. 6 과 7 의 두 경우 모두 크랙에 의한 영향은 저차모드에서 지배적이며 고차모드로 갈수록 그 영향이 줄어든다.

## 5. 결론

이 논문에서는 보 끝단에 집중질량과 임의의 지점에 크랙을 가지는 외팔보 구조물의 고유진동수 변화에 대한 연구가 수행되었다. 외팔보의 굽힘방향 지배방정식으로부터 유도된 일반해에 시스템의 경계조건과 연속조건을 적용하여 얻은 식의 특성방정식에 해를 구함으로써 고유진동수를 얻을 수 있었다. 해석결과 보 끝단 집중질량의 크기와 크랙의 위치 및 크기가 외팔보의 굽힘방향 고유진동수에 큰 영향을 미치는 것을 확인할 수 있었다. 수치해석 예제를 통해 끝단 집중질량과 크랙의 깊

이가 커질수록 고유진동수가 낮아지는 현상을 볼 수 있었으며 이때 집중질량과 크랙의 크기가 미치는 효과는 저차모드에서 가장 크며 고차모드로 갈수록 그 영향이 작아지는 것을 확인할 수 있었다. 또한 크랙의 위치에 의한 고유진동수의 변화는 크랙의 위치와 모드에 따라서 그 값이 주기적으로 변화하는 것을 확인할 수 있었으며 크랙의 크기에 의한 영향이 위치에 의한 영향보다 크게 나타나는 것을 확인할 수 있었다.

## 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) M. Gurgoze, 1996, "On the eigenfrequencies of cantilevered beams carrying a tip mass and spring-mass in-span," *International Journal of Mechanical Sciences*, V. 38, No. 12, pp.1295-1306.
- (2) E. Bock, 1942, "Behavior of Concrete and Reinforced concrete Subjected to Vibrations Causing Bending," *VDIZ 86*, pp. 145-147.
- (3) A. Dimarogonas, 1996, "Vibration of Cracked Structures - A State of the Art Review," *Engineering Fracture Mechanics*, pp. 831-857.
- (4) M. H. Shen, C. Pierre, 1990, "Natural modes of Euler-Bernoulli Beam," *Journal of Vibration and Acoustics Stress and Reliability* 111, pp. 81-84.
- (5) Chati M, Rand R, Mukherjee S. 1997, "Modal Analysis of a Cracked Beam," *Journal of Sound and Vibration*, 207(2), pp.249-270.
- (6) T. G. Chondros, A. D. Dimarogonas, J. Yao, 1998, "A Continuous Cracked Beam Vibration Theory," *Journal of Sound and Vibration*, 215 pp.17-34.
- (7) T. G. Chondros, A. D. Dimarogonas, 1998, "Vibration of a Cracked Cantilever Beam," *Journal of Vibration and Acoustics*, 120, pp. 742-746.
- (8) Douka E., Bamnios G. and Trochidis A., 2004, "A Method for Determining the Location and Depth of Cracks in Double-cracked Beams," *Applied Acoustics*, Vol. 65, pp. 997-1008.
- (9) Mahmoud, Mohamed A., Zaid Mohamed Abu., Harashani Shabeeb Al, 1999, "Communications in Numerical Methods in Engineering," V. 15, No. 10, pp. 709-715.
- (10) F. G. Tomasel, H. A. Larrondo, P. A. A. Laura, 1999, "Detection of Cracks in Cantilever Beams : Experimental Set-Up Using Optical Techniques and Theoretical Modelling," *Journal of Sound and Vibration*, 228(5), pp.1195-1204.
- (11) Dado, M.H.F., 2003, "Coupled Transverse and Axial Vibratory Behaviour of Cracked Beam with End Mass and Rotary Inertia," *Journal of Sound and Vibration*, V. 261, No. 4, pp.675-696.
- (12) Ewalds, H. L. and Wnahil, R. J. H., 1984, *Fracture Mechanics*, Edward Arnold and Delftse Uitgevers Maatschappij London.