

# 연성강성 효과를 고려한 회전하는 다중 블레이드 시스템의 굽힘진동 해석

## Bending Vibration Analysis of Rotating Multi-blade Systems Considering the Coupling Stiffness Effect

임하성\*·권성훈\*\*·유홍희†

Ha Seong Lim , Sung Hun Kwon and Hong Hee Yoo

**Key Words** : Bending Vibration Analysis(굽힘진동 해석), Multi-blade(다중 블레이드), Coupling Stiffness Effect(연성강성 효과), Cantilever Beams(외팔보), Natural Frequency(고유진동수), Mode Shapes(모드형상), Critical Angular Speed(임계 각속도), Critical Hub Radius Ratio(임계 축 반경비)

### ABSTRACT

A modeling method for the vibration analysis of rotating multi-blade systems considering the coupling stiffness effect is presented in this paper. Blades are assumed as cantilever beams and the coupling stiffness effect originates from disc or shroud between blades. As the angular speed, hub radius ratio, and the coupling stiffness vary, the natural frequencies of the system vary. Numerical results show that the coupling stiffness is very important to estimate the natural frequencies. Along with the natural frequencies, associated mode shapes, critical angular speed, and critical hub radius ratio are obtained through the analysis.

### 1. 서론

회전하는 주기적 순환 구조물의 형태를 가진 공학적 예제는 터빈 블레이드, 헬리콥터 회전익 터보엔진의 팬등이 있다. 이러한 순환 구조물들은 기준 축을 중심으로 외팔보 형태의 블레이드들로 구성되어 있으며 기준 축 혹은 축판의 강성으로 인하여 블레이드에 영향을 미치게 된다. 이는 단일 블레이드의 동적 특성과 달라지며 블레이드간의 연성효과로 인해 고유진동특성이 변화로 연계된다. 따라서 이러한 순환 구조 시스템의 적절한 설계를 위해선 그 동적특성을 정확히 예측할 수 있는 해석방법이 요구된다.

회전하는 구조물의 동특성 변화에 관한 연구는 Southwell의 연구를<sup>(1)</sup> 기원으로 하고 있다. 그는 외팔보의 회전에 따른 고유진동수 변화를 계산할 수 있는 모델을 제시하였다. 그 후 Schilhansl은<sup>(2)</sup> 회전 외팔보의 굽힘진동 방정식을 유도하고 이에 Ritz방법을 적용하여 Southwell방정식의 정확성을 확보하였다. 1970 년대에 들어와 전산기의 본격적 사용에 힘입어 운동방정식을 고유치 문제

로 변환하여 진동해석을 하려는 수치적인 방법<sup>(3)</sup>이 등장하였으며 이러한 방법은 고유진동수를 더 정확하게 구할 수 있다는 것 외에 모드형상도 구할 수 있다는 장점을 갖는다. 그 후 인장방향 변형변수를 사용하는 진동해석을 위한 모델링 방법도 등장하였다<sup>(4,5)</sup>. 그러나 이러한 연구들은 단일 외팔보 진동특성 연구에 초점을 맞추고 있으며 블레이드와 같은 다중 보구조물에 대한 연구는 단일 외팔보에 관한 연구에 비해 상당히 드문 편이다. 또한 블레이드에 관한 진동 해석에 관한 많은 양의 문헌이 발표되고 있으며 블레이드뿐 아니라 패킷으로 구성된 블레이드 디스크에 관한 연구도<sup>(6,7)</sup> 진행되고 있다.

본 논문에서는 블레이드를 외팔보로, 디스크 혹은 축판의 연성효과를 스프링으로 가정하였으며 이때 각 블레이드 간에 연결된 연성스프링의 강성 및 위치 등을 고려한 다중 블레이드 폐쇄계 시스템의 운동방정식을 유도하였다. 또한 최종적으로 개방계 시스템인 6 개 블레이드로 이루어진 패킷 시스템에 관한 진동특성을 연구하는데 목적을 두었다. 본 연구는 참고문헌 (5)에 제시된 굽힘진동 해석에 관한 모델링을 토대로 블레이드 간의 연성 연성스프링의 위치, 블레이드 길이에 대한 축반경비, 회전각속도 등에 의한 진동특성 변화를 종합적으로 조사하였다는 점에 그 고유성을 갖는다.

† 책임저자 ; 정회원, 한양대학교 기계공학부  
E-mail : [hhwoo@hanyang.ac.kr](mailto:hhwoo@hanyang.ac.kr)  
Tel : (02) 2220-0446, Fax : (02) 2293-5070

\* 정회원, 한양대학교 대학원 기계공학과

\*\* 한양대학교 대학원 기계공학과

## 2. 운동방정식

이 절에서는 복합변형 변수를 이용한 동적 모델링에 의한 운동방정식 유도과정을 간략히 소개하기로 한다. 이에 관한 상세한 내용은 참고문헌 (4, 5)를 참조할 수 있다.

Fig. 1 은 폐쇄계 시스템으로 다중 블레이드의 형상이며 탄성변위들의 의미와 기준 좌표계를 나타내고 있다.  $\hat{a}_1$  과  $\hat{a}_2$  는 기준계(reference frame)  $A$  에 부착된 서로 수직인 단위 벡터를 나타내며,  $x$  는 보의 고정점  $O$ 로부터 변형 전 임의점  $P_0$  까지의 거리를,  $k$  는 보 구조물 사이의 연성스프링 강성을,  $a$  는 연성스프링의 연결된 위치를,  $\vec{u}^{<n>}$  는  $n$  번째 블레이드의 탄성변위를,  $s^{<n>}$  는 임의 질점의 위치에서 블레이드가 인장된 길이를 각각 나타낸다. 모드방법을 이용해 상미분 운동방정식을 유도하기 위해  $s^{<n>}$  와  $u_2^{<n>}$  를 다음과 같이 근사화한다.

$$s^{<n>}(x,t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}^{<n>}(t) \quad (1)$$

$$u_2^{<n>}(x,t) = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}^{<n>}(t) \quad (2)$$

여기서  $\phi_{1i}$  와  $\phi_{2i}$  는 인장방향과 굽힘방향의 모드 함수들이고,  $q_{1i}^{<n>}$  와  $q_{2i}^{<n>}$  는 시간의 함수인 일반 좌표들이며,  $u_1^{<n>}$  과  $u_2^{<n>}$  는 일반좌표의 수이다. 반경  $r$  인 강제축  $A$  가  $\vec{a}_3$  방향으로 일정한 속력  $\Omega$  로 회전할 때  $A$  의 각속도와  $P$  점의 속도는 다음과 같이 구해진다.

$$\vec{\omega}^A = \Omega \hat{a}_3 \quad (3)$$

$$\vec{v}^P = [v_1 + \dot{u}_1 - \Omega u_2] \hat{a}_1 + [v_2 + \dot{u}_2 + \Omega(l + u_1)] \hat{a}_2 \quad (4)$$

$u_1^{<n>}$  은  $s^{<n>}$  와  $u_2^{<n>}$  로 표시되어야 하며 이를 위해 다음의 근사화된 관계식이 사용된다.

$$s^{<n>} = u_1^{<n>} + \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial u_2^{<n>}}{\partial \sigma} \right)^2 d\sigma \quad (5)$$

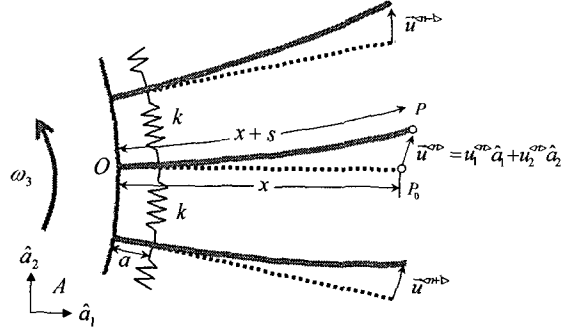


Fig. 1 Configuration of multi-blades as closed system

Kane의 방법을<sup>(10)</sup> 따른 운동방정식은 다음과 같다.

$$\int \rho \left( \frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \frac{d\vec{v}^P}{dt} dx + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (6)$$

여기서  $l$  과  $\rho$  는 보의 길이와 보의 단위길이당 질량을 나타내며,  $U$  는 보의 인장 및 굽힘에 의한 탄성에너지, 연성스프링의 의한 탄성에너지로 다음과 같이 표현된다.

$$U^{<n>} = \frac{1}{2} \int_0^{<n>} \left[ EA \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + EI \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] + \frac{1}{2} k [u_2^{<n>}(a) - u_2^{<n-1>}(a)]^2 + \frac{1}{2} k [u_2^{<n+1>}(a) - u_2^{<n>}(a)]^2 \quad (7)$$

여기서  $E$  는 영의계수,  $A$  는 보의 단면적,  $I$  는 보의 2 차 면적 모멘트를 나타낸다. 회전하는 다중 블레이드 폐쇄계 시스템의 운동방정식은 이상의 과정을 종합하여 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} [m_{ij}^{11} \dot{q}_{1j}^{<n>} - \omega_3^2 m_{ij}^{11} q_{1j}^{<n>} + k_{ij}^S q_{1j}^{<n>}] \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} [2\omega_3 m_{ij}^{12} \dot{q}_{2j}^{<n>} + \dot{\omega}_3 m_{ij}^{12} q_{2j}^{<n>}] \\ & = -(\dot{v}_1 - \omega_3 v_2) P_{1i} + \omega_3^2 Q_{1i} \\ & (i = 1, \dots, \mu_1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[ m_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j}^{<n>} + \left\{ k_{ij}^B - (\dot{v}_1 - \omega_3 v_2) k_{ij}^{GA} \right. \right. \\
 & + \left. \omega_3^2 k_{ij}^{GB} - \omega_3^2 m_{ij}^{22} \right\} q_{2j}^{<n>} \\
 & - \left. k \left( k_{ij}^S q_{2j}^{<n-1>} - 2k_{ij}^S q_{2j}^{<n>} + k_{ij}^S q_{2j}^{<n+1>} \right) \right] \\
 & + \sum_{j=1}^{\mu_1} \left[ 2\omega_3 m_{ij}^{21} \dot{q}_{1j}^{<n>} + \dot{\omega}_3 m_{ij}^{21} q_{1j}^{<n>} \right] \\
 & = -(\dot{v}_2 + \omega_3 v_1) P_{2i} - \dot{\omega}_3 Q_{2i} \\
 & (i = 1, \dots, \mu_2)
 \end{aligned} \tag{9}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 m_{ij}^{ab} &= \int \rho \phi_{ai}(x) \phi_{bj}(x) dx \\
 k_{ij}^S &= \int EA \phi'_{1i}(x) \phi'_{1j}(x) dx \\
 k_{ij}^B &= \int EI_{zz} \phi''_{2i}(x) \phi''_{2j}(x) dx \\
 k_{ij}^{GA} &= \int \rho(l-x) \phi'_{2i}(x) \phi'_{2j}(x) dx \\
 k_{ij}^{GB} &= \int \frac{\rho}{2} (l^2 - x^2) \phi'_{2i}(x) \phi'_{2j}(x) dx \\
 k_{ij}^C &= \phi_{2i}(x) \phi_{2j}(x) \\
 P_{ai} &= \int \rho \phi_{ai}(x) dx \\
 Q_{ai} &= \int \rho x \phi_{ai}(x) dx
 \end{aligned} \tag{10}$$

### 3. 진동방정식

회전 외팔보의 경우 인장방향 모드에 의한 진동수는 굽힘모드에 의한 진동수에 비해 훨씬 높다. 따라서, 이 두 방향 모드들은 서로 거의 간섭 효과를 가지지 않는다는 가정하에, 식 (9)만을 사용하여 굽힘 진동해석을 실시한다.

Fig. 2 에서 반경이  $r$  이고 회전 각속도  $\Omega$  인 축에 부착된 6 개 블레이드의 경우 기준점 0 의 속도벡터의  $\hat{a}_1$  과  $\hat{a}_2$  방향 스칼라 구성요소는  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = r\Omega$  가 되며 이와 인장방향 운동에 의한 간섭효과를 무시하는 가정을 이용하여, 회전 각속도가 일정한 정상상태에 관한 식(9)를 정리하면 다음과 같다.

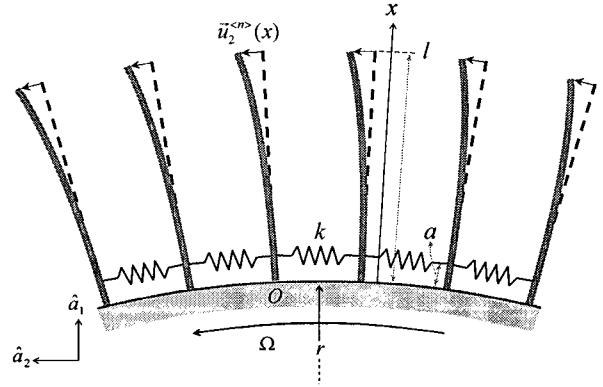


Fig. 2 A Packet system containing six blades

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[ m_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j}^{<n>} + \left\{ k_{ij}^B + \Omega^2 (r k_{ij}^{GA} + k_{ij}^{GB} - m_{ij}^{22}) \right\} q_{2j}^{<n>} \right. \\
 & - \left. k \left( k_{ij}^C q_{2j}^{<n-1>} - 2k_{ij}^C q_{2j}^{<n>} + k_{ij}^C q_{2j}^{<n+1>} \right) \right] = 0 \tag{11}
 \end{aligned}$$

식 (12)를 무차원화된 진동방정식으로 변환시키기 위해 다음과 같은 무차원 매개변수 및 변수들을 정의한다.

$$\begin{aligned}
 \tau &\equiv \frac{t}{T}, \quad \xi \equiv \frac{x}{l}, \quad \theta \equiv \frac{q}{l}, \quad \delta \equiv \frac{r}{l}, \quad \alpha \equiv \frac{a}{l} \\
 \gamma &= \Omega T, \quad \beta = \frac{kl^3}{EI_{zz}}, \quad T = \sqrt{\frac{\rho l^4}{EI_{zz}}} \tag{12}
 \end{aligned}$$

식(12)을 이용하면 식 (11)는 다음과 같은 무차원 진동방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{\mu} \left[ M_{ij} \ddot{\theta}_j^{<n>} + \left\{ K_{ij}^B + \gamma^2 (\delta K_{ij}^{GA} + K_{ij}^{GB} - M_{ij}) \right\} \theta_j^{<n>} \right. \\
 & - \left. \beta \left( K_{ij}^C \theta_j^{<n-1>} - 2K_{ij}^C \theta_j^{<n>} + K_{ij}^C \theta_j^{<n+1>} \right) \right] = 0 \tag{13}
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= \int \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) d\xi \\
 K_{ij}^B &= \int \phi_{i,\xi\xi}(\xi) \phi_{j,\xi\xi}(\xi) d\xi \\
 K_{ij}^{GA} &= \int (1-\xi) \phi_{i,\xi}(\xi) \phi_{j,\xi}(\xi) d\xi \\
 K_{ij}^{GB} &= \frac{1}{2} \int (1-\xi^2) \phi_{i,\xi}(\xi) \phi_{j,\xi}(\xi) d\xi \\
 K_{ij}^C &= \phi_i(\alpha) \phi_j(\alpha)
 \end{aligned} \tag{14}$$

$\phi_j$  는  $\phi_j$  와 동일한 함수값을 가지나  $\xi$  의 함수이며,  $\ddot{\theta}_j$  은  $\theta_j$  의  $\tau$  에 관한 2 차 미분을 나타낸다.

식(13)로부터 Fig. 2 와 같은 6 개 블레이드로 구성된 개방계 시스템의 진동 방정식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = \{0\} \quad (15)$$

여기서

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M_{ij} \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K^{12} & 0 & 0 \\ 0 & K^{34} & 0 \\ 0 & 0 & K^{56} \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

$$[K^{12}] = \begin{bmatrix} K_{ij} + \beta K_{ij}^C & -\beta K_{ij}^C \\ -\beta K_{ij}^C & K_{ij} + 2\beta K_{ij}^C \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[K^{34}] = \begin{bmatrix} K_{ij} + 2\beta K_{ij}^C & -\beta K_{ij}^C \\ -\beta K_{ij}^C & K_{ij} + 2\beta K_{ij}^C \end{bmatrix}$$

$$[K^{56}] = \begin{bmatrix} K_{ij} + 2\beta K_{ij}^C & -\beta K_{ij}^C \\ -\beta K_{ij}^C & K_{ij} + \beta K_{ij}^C \end{bmatrix}$$

$$K_{ij} = K_{ij}^{B'} + \gamma^2 (\delta K_{ij}^{GA} + K_{ij}^{GB} - M_{ij})$$

모드 해석을 위하여 열벡터  $\{\theta\}$  를 다음과 같이 나타낸다.

$$\{\theta\} = e^{j\lambda\tau} \{\eta\} \quad (17)$$

여기서  $\lambda$  는 고유진동수이고  $\{\eta\}$  는 모드형상을 나타내는 모드벡터이다. 식(17)을 식(15)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\lambda^2 [M]\{\eta\} = [K]\{\eta\} \quad (18)$$

이 식(18)를 이용하여 모드 해석을 수행할 수 있다.

#### 4. 수치해석

수치해석을 위해 굽힘방향 변위의 가상모드 (assumed modes) 들로는 고정된 외팔보의 굽힘진동모드들을 사용하였으며 5 개의 모드들을 이용하여 수치해석을 수행하였다. 본 논문에서 소개된 방법에 의해 구해진 수치해석 결과들의 정확성과 신뢰성을 검증하기 위해 참고문헌(9)에 의한 결과들을 인용하였다. Table 1 은 5 개 모드를 사용한 3 개의 외팔보 시스템의 결과이다. 총 15 개의 고유진동수를 구할 수 있었으며 3 개씩 그룹을 이루는 걸 알 수 있었다. 이를 1 개의 set 이라고 표현하였고 가장 낮은 고유진동수 9 개를 3 개의 set 으로 표현한 결과이다. 참고문헌(9)의 결과와 거의 일치하는 것을 알 수 있었다. 따라서 이와 같은 정확성을 바탕으로 본 연구는 6 개 외팔보로 구성된 개방계 시스템에 대해 수치해석을 수행하였고 이때 6 개의 고유진동수로 구성된 5 개 set 의 결과를 얻을 수 있었다. Table 2 는 각 set 들의 첫번째로 나타나는 고유진동수로서 이는 단일 외팔보에서의 고유진동수 값과 같고 Fig. 4 에서 첫번째로 나타나는 모드형상을 알 수 있다. 이는 물리적으로 이에 해당하는 고유진동수에 6 개의 보가 항상 같이 움직이는 현상이라 볼 수 있다. 이러한 시스템의 각 set 의 첫번째 고유진동수는 강성  $\beta$  에 따라 변하지 않았지만 블레이드 구조물이 폐쇄계 시스템일 경우 강성  $\beta$  가 증가함에 따라 첫번째 고유진동수들이 증가하는 걸 알 수 있었다.

Fig. 3 은 고유진동수가 회전각속도에 따라 변화되는 것을 보여주며, 가장 낮은 6 개의 고유진동수로 이루어진 첫번째 set 의 결과이다. 여기서

**Table 1** Comparison of the natural frequencies ( $\alpha = 0.1, \beta = 10, \gamma = 0$ )

Frequency	Present	Ref. (9)
First set	1st.	3.51695
	2nd.	3.51920
	3th.	3.52144
Second set	4th.	22.03901
	5th.	22.05002
	6th.	22.06095
Third set	7th.	61.70709
	8th.	61.73088
	9th.	61.75461

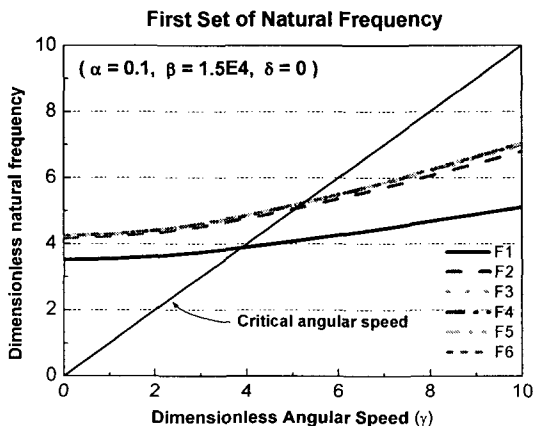
보듯이 외팔보의 각속도가 증가함에 따라 고유진동수는 증가하며 이러한 현상은 직관적으로 예측될 수 있는 것이다. 또한  $\delta = 0$ 일 때 첫번째 set의 고유진동수들이 무차원 회전각속도와 일치하는 임계 각속도의 위치를 보여주고 있으며 이는 공진현상을 야기시키는 중요한 사항이다. Table 3은 연성강성에 따른 임계 각속도의 변화로서 3.878에서 5.247의 각속도 구간에서 존재하는 걸 알 수 있었다. 또한  $\delta = 1$  이상일 경우 이러한 임계 각속도가 존재 하지 않았으며 이로부터 어느 값 이상의  $\delta$ 에선 임계 각속도가 존재하지 않음을 추론할 수 있었다.

**Table 2** Opened system vs. closed system

Frequencies	Opened System ( $\beta = 10$ )	Closed system	
		( $\beta = 10$ )	( $\beta = 10^5$ )
First set (1 <sup>st</sup> )	3.5160	3.5163	4.1165
Second set (7 <sup>th</sup> )	22.0345	22.0360	25.8661
Third set (13 <sup>th</sup> )	61.6972	61.7006	72.7481
Fourth set (19 <sup>th</sup> )	120.9019	120.9068	144.0608
Fifth set (25 <sup>th</sup> )	199.8595	199.8653	267.5207

**Table 3** Critical angular speed versus the increase of coupling stiffness

Coupling stiffness	Critical angular speed	
	lower	upper
$\beta = 1$	3.878	3.879
$\beta = 10^2$	3.878	3.960
$\beta = 10^5$	3.878	5.236
$\beta = 2 \times 10^5$	3.878	5.247



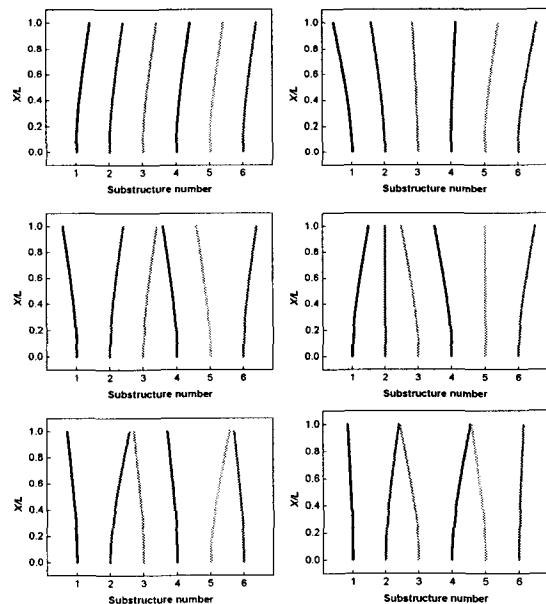
**Fig. 3** Natural frequency variation vs. angular speed

**Table 4** Hub radius versus the increase of coupling stiffness

Coupling stiffness	Hub radius ratio	
	lower	upper
$\beta = 1$	0.6061	0.6261
$\beta = 10^2$	0.4505	0.6261
$\beta = 10^5$	0.4377	0.6261
$\beta = 2 \times 10^5$	0.4377	0.6261

**Table 5** Natural frequencies versus the increase of coupling stiffness ( $\alpha = 0.1, \delta = 1, \gamma = 3$ )

Coupling stiffness	Natural frequencies	
	lower	upper
$\beta = 1$	5.2908	5.2913
$\beta = 10^2$	5.2908	5.3420
$\beta = 10^5$	5.2908	6.0610
$\beta = 2 \times 10^5$	5.2908	6.0664
$\beta = 10^6$	5.2908	6.0709



**Fig. 4** First set of mode shapes

Table 4는  $\beta$ 의 증가에 따라 임계 축 반경비의 구간을 알 수 있었으며 큰 연성값을 가질 경우 임계 축 반경비의 구간이 0.4377과 0.6261 값으로 수렴하는걸 알 수 있었다. 따라서  $\delta$ 가 0.4377 이상에선 임계 축 반경비가 존재하지 않음

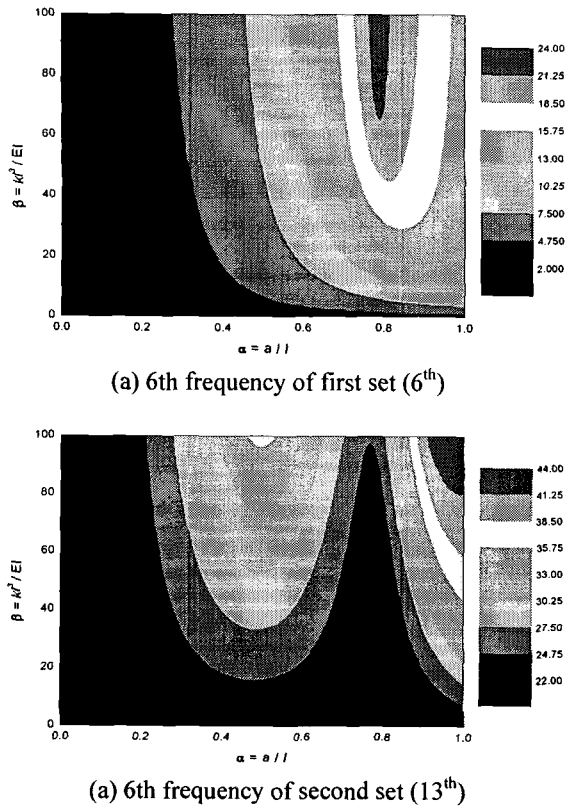


Fig. 5 Frequency variations versus the coupling stiffness and position

을 알 수 있었다. Table 5 에선  $\beta$  값이 증가함에 따라 첫번째 set 의 가장 낮은 고유진동수는 변화가 없었으며 가장 높은 고유진동수가 약 6.07 값을 가진다는 걸 알 수 있었다.

Fig. 5 는  $\gamma=0$  일 때 연성강성  $\beta$  와 연성강성의 위치  $\alpha$  의 변화에 따른 고유진동수 변화로서 첫 번째와 두 번째 set 의 가장 높은 진동수인 6, 13 번째 고유진동수의 결과이다. 각 set 들의 가장 낮은 진동수의 경우  $\beta$  와  $\alpha$  에 대해 변화가 없었으며 가장 높은 진동수를 알아봄으로써 이 시스템의 고유진동수 범위를 예측할 수 있겠다.

## 5. 결론

본 논문에서는 연성효과를 고려한 회전하는 다중 블레이드의 진동특성을 예측하기 위해 진동방정식을 유도하였으며 이를 토대로 6 개 블레이드로 구성된 패킷 시스템의 모델링 방법을 제시하였다. 이를 이용하여 해석 결과를 도출하였으며 이는 기존의 수치해석 결과와 비교함으로써 본 논문

에서 제시된 방법의 신뢰성과 정확성을 검증할 수 있었다. 블레이드 간의 연성효과로 인해 회전시 고유 진동수의 증가를 알 수 있었으며 연성강성의 크기, 연성강성의 위치에 따른 고유진동수 변화를 알 수 있었다. 이는 연성강성, 회전 각속도, 축 반경의 변화가 시스템 전체의 강성변화를 가져오고 결과적으로 고유진동 특성 변화로 연계되기 때문이다. 또한 임계 각속도와 임계 축 반경비의 존재를 확인하였으며 연성강성의 크기에 따라 변화되는 것을 살펴보았다. 본 논문에서 제시된 방법은 디스크 혹은 축판의 강성 효과를 고려한 블레이드 구조설계 시 유용하게 사용될 수 있으며 관련 연구분야에 쉽게 이해되고 응용될 수 있으리라 판단된다.

## 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Aircscrew Blades," British A. R. C. Reports and Memoranda No. 766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, 25, pp. 28~30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," J. Sound and Vibration, Vol. 56, pp. 175~185.
- (4) Yoo, H. H., 1991, "A Linear Dynamic Modeling Using Hybrid Deformation Variables for Rotating Structures," KSAS, Vol. 19, No. 3, pp. 32~39.
- (5) Yoo, H. H., 1991, "Bending Vibration of Rotating Cantilever Beams," Transactions of the KSME, Vol. 16, No. 5, pp. 891~898.
- (6) Singh, M. and Schiffer, D., 1982, "Vibrational Characteristics of Packeted Bladed Discs," ASME Paper No. 82-DET-137.
- (7) Dello, J., 1987, "Frequency Evaluation of a Steam Turbine Bladed Disk," Turbomachinery International Magazine, Jan., Feb.
- (8) Cornwell, P. J. and Bendiksen, O. O., 1989, "Localization of Vibrations in Large Space Reflectors," AIAA Journal, Vol. 27, No. 2, pp. 219~226.
- (9) Pierre, C. and Cha, P. D., 1989, "Strong Mode Localization in Nearly Periodic Disordered Structures," AIAA Journal, Vol. 27, No. 2, pp. 227~241.
- (10) Kane, T. and Levinson, D., 1985, Dynamics : Theory and Applications, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y.