

# 구분모드합성법과 부분구조합성법의 비교 Comparison of Component Mode Synthesis and Substructure Synthesis Methods

곽문규†·나성수\*·배병찬\*\*

Moon K. Kwak, Sungsoo Na and Byungchan Bae

**Key Words :** Component Mode Synthesis Method(구분모드합성법), Substructure Synthesis Method(부분구조합성법)

## ABSTRACT

This paper is concerned with the comparison of component mode synthesis and substructure synthesis methods. Those two methods were developed for the dynamic analysis of complex structure. However, the difference between two methods in solving the dynamic problem has never been explained. In this paper, a structure consisting of two beams is considered for the application of two methods. The dynamic formulation shows the characteristics and differences of two methods. The procedure for choosing proper substructure modes in each method is explained in detail. In addition, the advantage of the substructure synthesis method is discussed based on the numerical example. Numerical examples show how two methods are applied to the addressed problem.

## 1. 서론

복잡한 구조물의 동특성 해석 문제는 수치해석적인 방법과 실험적인 방법 모두 단순구조물의 해석 또는 실험에 비해 많은 계산시간과 노력이 필요하다. 따라서 복잡한 구조물을 여러 개의 간단한 부분구조로 나누고, 각 부분구조에 대한 해석 또는 실험 결과를 적절한 결합조건을 적용하여 재처리하고자 하는 시도가 있어왔다.

복잡한 구조물의 해석에 대한 수치해석 방법은 유한요소법인데, 유한요소법이 도입된 시기와 비슷한 시기에 앞에서 설명한 개념을 이용한 방법들이 개발되었다. Hurty[1,2]는 구분모드합성법(Component-Mode Synthesis Method)을 제안하였고, Gladwell[3]은 가지모드해석법(Branch-Mode Analysis), 이를 확장한 Benfield and Hrudal[4]의 구분모드대체법(Component-Mode Substitution) 등이 있다. 이들 세가지 방법들은 전체구조물을 부분구조의 합성으로 간주하고, 각각의 부분구조의 운동을 구분모드의 합성으로 본다는 점에서 Rayleigh-Ritz 방법에 근거를 두고 있다고 말할 수 있다[5]. 각 방법들은 모드를 어떻게 정의할 것인가에 따라 달라지며, 일반적으로 어떤 특정한 부분구조물의 고유치문제를 풀어 생성된다고 생각할 수 있다. 그러나 Meirovitch and Hale[6], Hale and

Meirovitch[7]가 지적했듯이 이들 방법들이 Rayleigh-Ritz 방법에 속하기 때문에 사용될 수 있는 구분모드는 실제로는 허용함수(Admissible Function)에 속한다. 이와 같이 확장된 개념하에 Meirovitch[8], Meirovitch and Kwak[9]은 부분구조를 합성하여 전체구조계의 동특성을 해석하는 방법을 부분구조합성법(Substructure Synthesis Method)라고 칭하고 수치해석을 통해 부분구조합성법의 유효성을 입증하였다.

부분구조합성법에 대한 국내의 연구로는 특성행렬을 이용한 부분구조합성법에 대한 연구[10], Ritz 벡터를 이용한 수정분할구조해석법[11], 동특성 개선을 위한 부분구조합성법의 적용[12], 부분구조합성법을 냉장고의 진동해석에 적용한 경우[13], 실험 모달데이터를 사용하여 구분모드합성법을 개선하는 연구[14] 등이 있다.

그러나 열거한 논문들의 제목상에서도 알 수 있듯이 초기에 제안된 구분모드합성법[1-4]과 Meirovitch and Hale[6]이 제안한 부분구조합성법이 혼재되어 사용되고 있으며 그 차이점에 대해서도 설명된 바 없다. 본 연구에서는 두 개의 보구조물이 결합된 구조물을 대상으로 두 방법의 정식화 과정상의 차이점과 모드를 선택하는 과정의 차이점, 각 방법의 장단점을 토의하고 차후 복잡한 구조물을 부분구조합성법을 적용하여 해석하는데 있어 지침을 주고자 한다. 정식화 과정을 통해 얻은 결론은 구분모드합성법이 정식화과정이 쉬운 반면에 결합조건을 유도해 이를 적용하는 과정이 복잡하고, 부분구조합성법은 정식화과정이 복잡한 반면에 결합조건을 정식화과정에 포함시켜 모드 선택이나 수렴도가 좋다는 것이다.

† 책임저자; 동국대학교 기계공학과, 정회원

E-mail : kwakm@dongguk.edu

Tel : (02) 2260-3705, Fax : (02) 2263-9379

\* 고려대학교 기계공학과, 정회원

\*\* 동국대학교 기계공학과, 학생회원

## 2. 구분모드합성법

구분모드 합성법의 적용 방법을 논의하기 위해 다음 그림과 같이 한 점을 통해 연결된 두 개의 보 구조물로 이루어진 시스템을 고려해보자.

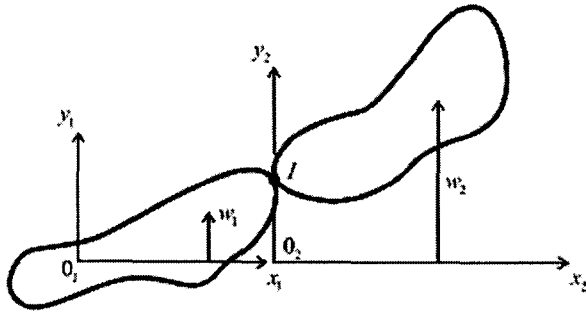


Fig. 1 Two substructures connected by a point

여기서  $x_1, y_1$  은 첫 번째 보 구조물에 부착된 좌표계이며  $x_2, y_2$  는 두 번째 보 구조물에 부착된 좌표계이다. 그리고  $w_1, w_2$  는  $y$  방향 변위를 나타낸다. 주목할 점은  $x_1$  과  $x_2$  가 같은 축을 공유한다는 것인데 이로 인해 연결점  $I$  에서의 기하학적인 적합조건을 만족시켜야 한다.

두 보 구조물에 대해서 운동에너지와 탄성에너지를 표현하면 다음과 같다.

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} m_1 \dot{w}_1^2 dx_1, \quad V_1 = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} EI_1 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 \quad (1a,b)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} m_2 \dot{w}_2^2 dx_2, \quad V_2 = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} EI_2 \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2 \quad (2a,b)$$

여기서  $m_1$  과  $m_2$  는 각 보 구조물의 단위길이당 질량을 나타내며  $EI_1$  과  $EI_2$  는 각 보 구조물의 강성을 나타낸다. 그리고  $L_1$  과  $L_2$  는 각 보 구조물의 길이를 나타낸다.

각 보 구조물의 탄성변위를 허용함수를 도입해 표현하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w_1 = \Phi_1 q_1, \quad w_2 = \Phi_2 q_2 \quad (3a,b)$$

여기서

$$\Phi_1 = [\phi_{11} \ \phi_{12} \ \dots \ \phi_{1n}], \quad \Phi_2 = [\phi_{21} \ \phi_{22} \ \dots \ \phi_{2n}],$$

$$q_1 = [q_{11} \ q_{12} \ \dots \ q_{1n}]^T, \quad q_2 = [q_{21} \ q_{22} \ \dots \ q_{2n}]^T$$

$$(4a-d)$$

는 각각 허용함수 벡터와 일반좌표벡터를 나타낸다. 식 (3)을 식(1)과 (2)에 대입하면 운동에너지와 탄성에너지가 다음과 같이 유도된다.

$$T_1 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^T M_1 \dot{q}_1, \quad V_1 = \frac{1}{2} q_1^T K_1 q_1 \quad (5a,b)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}_2^T M_2 \dot{q}_2, \quad V_2 = \frac{1}{2} q_2^T K_2 q_2 \quad (6a,b)$$

여기서

$$M_1 = \int_0^{L_1} m_1 \Phi_1^T \Phi_1 dx_1, \quad K_1 = \int_0^{L_1} EI_1 \Phi_1^{''T} \Phi_1'' dx_1 \quad (7a,b)$$

$$M_2 = \int_0^{L_2} m_2 \Phi_2^T \Phi_2 dx_2, \quad K_2 = \int_0^{L_2} EI_2 \Phi_2^{''T} \Phi_2'' dx_2 \quad (8a,b)$$

여기서 두 개의 prime 은 두 번 미분을 의미한다. 각각의 운동에너지와 탄성에너지를 라그랑지 방정식에 대입하고 운동방정식을 유도하면 다음과 같이 통합하여 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

이 식을 간단한 행렬식으로 표현하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \quad (10)$$

여기서  $q = [q_1 \ q_2]^T$  이며

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

식 (10)은 서로 독립적인 두 개의 보 구조물에 대한 운동방정식을 나타낸다. 두 구조물이 한 점으로 연결되어 있다면 연결점에서 다음과 같은 기하학적인 적합조건을 만족해야 한다.

$$w_1|_{x_1=L_1} = w_2|_{x_2=0}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=L_1} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} \quad (12a,b)$$

첫 번째 조건은 변위가 동일해야 한다는 조건이며 두 번째 조건은 기울기가 동일해야 한다는 조건이다. 식 (3)을 식 (12)에 대입하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Phi_1|_{x_1=L_1} q_1 = \Phi_2|_{x_2=0} q_2 \quad (13a)$$

$$\frac{d\Phi_1}{dx_1} \Big|_{x_1=L_1} q_1 = \frac{d\Phi_2}{dx_2} \Big|_{x_2=0} q_2 \quad (13b)$$

식 (13)을 방정식으로 표현하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Aq = 0 \quad (14)$$

식 (14)는 운동방정식 (10)에 적용되어야 하는 구속조건을 나타낸다. 구속조건에 대해 행렬을 다음과 같이 나누어서 생각해 보자.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

여기서  $r$  은 구속조건식의 개수인데, 본 연구에서 고려한 두 개의 보 구조물에 대해서는 식(13)을 고려해 보았을 때 2 가 됨을 알 수 있다. 식 (15)로부터 역행렬이 존재한다는 가정하에 다음식을 유도할 수 있다.

$$q_2 = -A_2^{-1} A_1 q_1 \quad (16)$$

식 (16)식을 이용하면 전체 일반좌표벡터는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$q = \begin{bmatrix} I \\ -A^{-1}A \end{bmatrix} q_s = T_s q_s \quad (17)$$

식 (17)은 서로 독립적인 두 일반좌표벡터가 구속 조건에 의해 차감된 독립좌표로 표현됨을 의미한다. 식 (17)을 식 (10)에 대입하면 다음과 같이 축소된 운동방정식이 유도된다.

$$M_s \ddot{q}_s + K_s q_s = 0 \quad (18)$$

여기서

$$M_s = T_s^T M T_s, \quad K_s = T_s^T K T_s \quad (19a, b)$$

구분모드합성법을 사용하는데 있어 가장 주의할 점은 운동방정식을 축약하는데 사용되는 구속 조건식의 유도과정이다.

여기서 실험을 통해 각 부분구조의 동특성을 구해 이를 합성하여 전체 구조계의 동특성을 유도하는 경우를 고려해보자. 이 경우 구분모드합성법을 적용하는 경우에는 각 부분구조물이 자유-자유 경계조건을 가지도록 실험 환경을 조성하고 고유진동수와 고유모드를 계측하여야 하며, 구속조건식을 유도해 이를 합성하는 과정을 거쳐야 한다.

### 3. 부분구조합성법

다음 그림과 같이 두 개의 보 구조물로 이루어진 시스템을 다시 고려해보자.

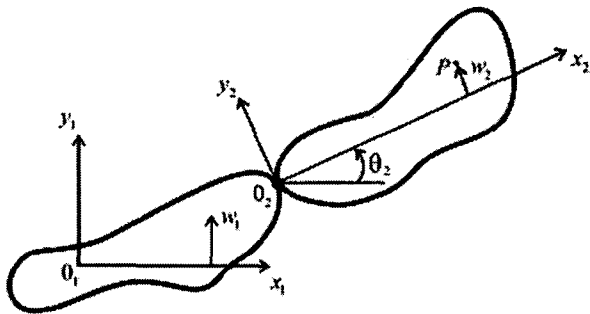


Fig. 2 Two substructures connected by a point

이 그림은 Fig. 1 과 같은 두 개의 보 구조물로 이루어진 시스템이지만 두 번째 보 구조물에 부착된 좌표계가 다르다. 이 그림에서  $\theta_2$  는 첫 번째 보 구조물이 결합점에서 가지는 기울기를 나타낸다. 즉,

$$\theta_2 = \left. \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=L_1} \quad (20)$$

그리고  $w_2$  는  $y_2$  방향 변위를 나타낸다. Meirovitch[5]가 제안한 방법은 기하학적인 적합조건을 운동 방정식 유도과정에서 도입하는 것인데, 그림에서 보이는 바와 같이 두 보 구조물이 결합된

점에 두 번째 보 구조물의 좌표 원점이 위치하고 결합점에서의 첫 번째 보 구조물의 기울기를 가지고  $x_2$  축을 결정하게 된다.

첫 번째 보 구조물에 대한 운동에너지와 탄성 에너지는 식 (1)과 동일하다. 두 번째 보 구조물의 운동 에너지를 구하기 위해서는 먼저 두 번째 보 구조물의 임의점에서의 변위를 유도해야 한다. 첫 번째 보 구조물의 원점을 기준으로 할 경우, 점 P에서의 변위벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{R}_p = (L_1 + x_2 \cos \theta_2 - w_2 \sin \theta_2) \vec{i} + (\dot{w}_1 (L_1, t) + x_2 \sin \theta_2 + w_2 \cos \theta_2) \vec{j} \quad (21)$$

여기서  $\vec{i}, \vec{j}$  는 각각  $x_1, y_1$  축의 단위벡터이다. 운동 에너지를 구하기 위해서는 속도벡터가 필요한데 식 (21)로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\dot{\vec{R}}_p = [\dot{\theta}_2 (-x_2 \sin \theta_2 - w_2 \cos \theta_2) - \dot{w}_2 \sin \theta_2] \vec{i} + [\dot{w}_1 (L_1, t) + \dot{\theta}_2 (x_2 \cos \theta_2 - w_2 \sin \theta_2) + \dot{w}_2 \cos \theta_2] \vec{j} \quad (22)$$

식 (22)를 이용하면 운동에너지가 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \bar{m}_2 (\dot{\vec{R}}_p \cdot \dot{\vec{R}}_p) dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 \int_0^{L_2} \bar{m}_2 x_2^2 dx_2 + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \bar{m}_2 \dot{w}_2^2 dx_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \bar{m}_2 dx_2 \dot{w}_1^2 (L_1, t) + \dot{\theta}_2 \int_0^{L_2} \bar{m}_2 x_2 \dot{w}_2 dx_2 \\ &\quad + \dot{w}_1 (L_1, t) \int_0^{L_2} \bar{m}_2 \dot{w}_2 dx_2 + \dot{\theta}_2 \dot{w}_1 (L_1, t) \int_0^{L_2} \bar{m}_2 x_2 dx_2 \end{aligned} \quad (23)$$

여기서  $\cdot$  는 벡터의 내적을 나타낸다. 허용함수를 도입할 경우  $w_1, w_2$  에 대해서는 식 (3)을 그대로 사용할 수 있다. 그러나 이미 변위와 기울기가 두 번째 보 구조물의 운동에너지, 식(23)를 유도하는데 사용되었기 때문에 부분구조물합성법에 사용되는  $\phi_2$  는 결합점에서 변위와 기울기가 0 인 허용함수를 고려해야한다. 이 점이 구분모드합성법과의 가장 큰 차이점이라고 말할 수 있다. 허용함수를 도입하고 식 (20)을 고려하면 두 번째 보 구조물의 운동에너지, 식 (23)이 다음과 같이 유도된다.

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^T \bar{M}_1 \dot{q}_1 + \dot{q}_1^T \bar{S}_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^T M_2 \dot{q}_2 \quad (24)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= I_2 \Phi_1^T \Phi_1 + m_2 \Phi_{L_1}^T \Phi_{L_1} + S_2 (\Phi_1^T \Phi_{L_1} + \Phi_{L_1}^T \Phi_1) \\ \bar{S}_2 &= m_2 \Phi_{L_1}^T \Phi_2 + m_2 \Phi_{L_1}^T \Phi_2 \end{aligned} \quad (25a, b)$$

여기서  $\Phi_{L_1} = d\Phi/dx_1|_{x_1=L_1}$  이며

$$\begin{aligned} m_2 &= \int_0^{L_2} \bar{m}_2 dx_2, \quad S_2 = \int_0^{L_2} \bar{m}_2 x_2 dx_2, \quad I_2 = \int_0^{L_2} \bar{m}_2 x_2^2 dx_2 \\ \Phi_2 &= \int_0^{L_2} \bar{m}_2 x_2 \Phi_2 dx_2, \quad \bar{\Phi}_2 = \int_0^{L_2} \bar{m}_2 \Phi_2 dx_2 \end{aligned} \quad (26a-e)$$

따라서 총 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 + \bar{M}_2 & \bar{S}_2 \\ \bar{S}_2^T & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

그리고 총 탄성에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

식 (27)과 (28)을 라그랑지 방정식에 대입하면 운동방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} M_1 + \bar{M}_2 & \bar{S}_2 \\ \bar{S}_2^T & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

구분모드합성법에 의해 유도된 운동방정식, 식 (18)을 식 (29)와 비교하면, 구분모드합성법에 의해 유도된 질량행렬과 강성행렬이 모두 가득 채워진 행렬인 반면에 부분구조합성법에 의해 유도된 강성행렬이 대각선 행렬이 된다는 점과, 부분구조물합성법에 의해 유도된 운동방정식은 이미 기하학적인 적합조건이 만족된 상태에서 유도되었기 때문에 더 이상의 모델 축약이 필요 없다는 점이다. 그러나 부분구조물합성법을 사용하는 경우 식 (25)에 보이는 바와 같이 조금 더 복잡한 연산이 필요하다.

여기서 실험을 통해 부분구조합성을 시도하는 경우에는 한단 고정 다른 단 자유인 경계조건을 구현해 각 부분구조물의 고유진동수와 고유모드를 계측하고, 또한 식 (25)와 (26)의 여러 가지 파라미터를 산출해내야 한다. 실험 조건은 구분모드합성의 경우에 비해 쉽다고 말할 수 있으나 추가적인 파라미터의 산출을 고려한다면 실험적인 동특성 유도 과정이 쉽다고 말할 수는 없다.

#### 4. 수치계산

앞에서 구분모드합성법과 부분구조합성법의 적용을 두 개의 보 구조물이 결합된 시스템을 가지고 설명하였다. 두 방법의 차이점을 좀더 자세히 설명하기 위해 다음 그림과 같은 시스템을 수치계산 예로 채택하였다.

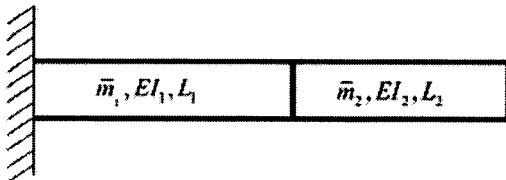


Fig. 3 Two substructures connected by a point

실제로는 한 개의 외팔보로 볼 수 있는 시스템을 두 개의 보 구조물이 결합된 경우로 간주하고 구분모드합성법과 부분구조물합성법을 적용해보자. 먼저 수치계산을 위해 다음과 같이 가정한다.  $\bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \bar{m}$ ,  $EI_1 = EI_2 = EI$ ,  $L_1 = L_2 = L$ , 즉

균일보로 가정하고, 나아가서  $EI/\bar{m} = 64\pi^2 m^2/s^4$ ,  $L=1m$ 로 가정한다. 이 경우에 전체 외팔보의 고유진동수는 다음 식으로 주어진다.

$$f_i = (\lambda_i^c)^2, i=1,2,\dots \quad (30)$$

여기서  $\lambda_i^c = 1.87510407, 4.69409113, \dots$ 로 균일 외팔보의 특성방정식으로부터 구해진다[15].

구분모드합성법을 사용하는 경우, 첫 번째 보 구조물은 외팔보로 간주하고 두 번째 보 구조물은 자유-자유보로 간주한다. 따라서 각각에 대한 허용함수를 다음과 같이 고려할 수 있다.

$$\phi_i = (\phi_c)_i = \cosh \frac{\lambda_i^c x}{L} - \cos \frac{\lambda_i^c x}{L} - \sigma_i^c \left( \sinh \frac{\lambda_i^c x}{L} - \sin \frac{\lambda_i^c x}{L} \right) \quad (31)$$

$$\phi_i = (\phi_f)_i = \begin{cases} 1; & i=1 \\ \sqrt{12} \left( \frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right); & i=2 \\ \cosh \frac{\lambda_{i-2}^f x}{L} + \cos \frac{\lambda_{i-2}^f x}{L} \\ - \sigma_{i-1}^f \left( \sinh \frac{\lambda_{i-2}^f x}{L} + \sin \frac{\lambda_{i-2}^f x}{L} \right); & i > 2 \end{cases} \quad (32)$$

여기서  $\lambda_i^f$ 는 자유-자유보의 특성방정식에서 얻어지는 고유치이며  $\sigma_i^c$ 와  $\sigma_i^f$ 는 각 고유치에 의해 결정되는 상수이다[15]. 식 (31)과 (32)를 식 (7)과 (8)에 대입하면 다음과 같은 결과가 얻어진다.

$$M_1 = M_2 = mI \quad (33a)$$

$$K_1 = \frac{EI}{L} \text{diag} \left[ \left[ (\lambda_1^c)^4 (\lambda_2^c)^4 \dots (\lambda_n^c)^4 \right] \right] \quad (33b)$$

$$K_2 = \frac{EI}{L^3} \text{diag} \left[ \left[ 0 \ 0 \ 0 \ (\lambda_1^f)^4 (\lambda_2^f)^4 \dots (\lambda_n^f)^4 \right] \right] \quad (33c)$$

이를 이용하면 허용함수 증가에 따라 다음과 같은 결과가 얻어진다.

Table 1. Natural frequencies vs. no. of admissible function by CMS method

NAF	TDOF	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
3	4	3.64761	27.59897	62.84397	168.78610
4	6	3.61086	25.45958	62.06706	144.40455
5	8	3.58992	24.51399	61.86548	136.75013
6	10	3.57648	23.97922	61.78870	132.87640
7	12	3.56937	23.73310	61.76678	131.17442
8	14	3.56398	23.55033	61.75429	129.94733
Exact		3.51602	22.03449	61.69721	120.90192

부분구조합성법을 적용하는 경우 두 번째 구조물도 첫 번째 구조물의 끝단에 붙어있는 외팔보로 간주하게 된다. 따라서 두 번째 구조물에 대한 허용함수도 균일 외팔보의 고유함수를 사용하는 것이 바람직하다.

$$\phi_i = (\phi_r)_i \quad (34)$$

식 (31)과 (34)를 식 (7a), (8)과 (25)에 대입하면 다음과 같은 결과가 얻어진다.

$$M_1 = mI \quad (35a)$$

$$M_2 = m \left[ \frac{1}{3} \Phi_{11}^T \Phi'_{11} + \Phi_{11}^T \Phi_{11} + \frac{1}{2} (\Phi_{11}^T \Phi_{11} + \Phi_{11}^T \Phi'_{11}) \right] \quad (35b)$$

$$K_1 = K_2 = \frac{EI}{L^3} \text{diag} \left[ \left[ (\lambda_1^y)^4 \ (\lambda_2^y)^4 \ \dots \ (\lambda_n^y)^4 \right] \right] \quad (35c)$$

$$S_2 = m (\Phi_{11}^T \Phi_2 + \Phi_{11}^T \Phi_2) \quad (35d)$$

$$\Phi_2 = m \begin{bmatrix} \frac{2\alpha_1^y}{\lambda_1^y} & \frac{2\alpha_2^y}{\lambda_2^y} & \dots & \frac{2\alpha_n^y}{\lambda_n^y} \end{bmatrix} \quad (35e)$$

$$\phi_2 = mL \begin{bmatrix} \frac{2}{(\lambda_1^y)^2} & \frac{2}{(\lambda_2^y)^2} & \dots & \frac{2}{(\lambda_n^y)^2} \end{bmatrix} \quad (35f)$$

식 (35)를 이용하면 허용함수의 개수가 증가함에 따라 표 2와 같은 결과가 얻어진다. 표 1과 비교해볼 때 부분구조물합성법의 수렴도가 높은 것을 알 수 있다. 수렴도를 그림으로 비교해본 것이 Fig. 4와 5이다. 여기서 오차는  $\text{Error} = (f_{\text{exact}} - f_{\text{approx}}) / f_{\text{exact}} \times 100 (\%)$ 로 계산되었다. 그림에서 알 수 있듯이 부분구조물합성법이 구분모드합성법보다 수렴도가 좋을 수 있다. 이는 부분구조물합성법이 기하학적인 적합조건을 미리 만족하고 정식화되었기 때문으로 생각된다.

Table 2. Natural frequencies vs. no. of admissible function by CMS method

NAF	TDOF	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
3	4	3.62367	24.67875	62.50291	146.85335
4	6	3.58213	23.70671	61.90574	131.72342
5	8	3.56344	23.25749	61.77753	128.32837
6	10	3.55293	22.99852	61.73507	126.59350
7	12	3.54620	22.83003	61.71742	125.52090
8	14	3.54154	22.71166	61.70895	124.78931
Exact		3.51602	22.03449	61.69721	120.90192

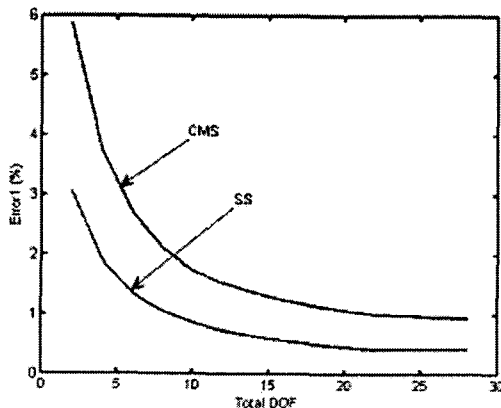


Fig. 4 Error vs. total degree of freedom for the first

natural frequency

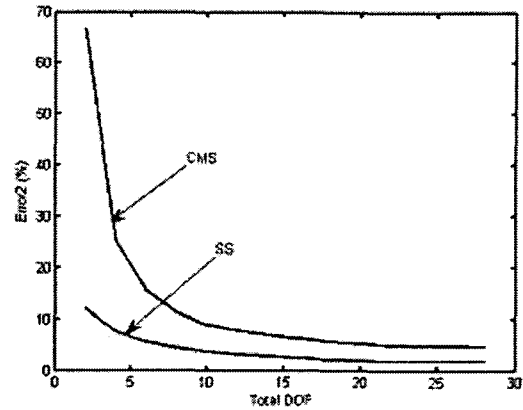


Fig. 5 Error vs. total degree of freedom for the second natural frequency

## 5. 토의 및 결론

본 연구에서는 구분모드합성법과 부분구조합성법의 차이점을 규명하기 위해 두 개의 보 구조물로 이루어진 시스템을 고려하여 정식과 과정의 차이점과 수치계산상의 차이점을 토의하였다.

구분모드 합성법의 핵심은 두 부분구조가 결합되는 지점의 결합조건을 어떻게 유도할 것인가이며, 개념적으로 두 구조물의 질량행렬과 강성행렬을 구분모드를 이용해 유도하고 이를 구속조건을 이용해 결합하는 것이다. 본 연구에서 고려한 두 개의 보 구조물이 결합된 시스템에 대해서 각각의 부분구조에 대해 사용한 구분모드, 즉 허용함수는 자유-자유단을 가지는 균일보의 고유함수를 사용하였다. 두 보가 결합하는 지점의 구속조건은 변위와 기울기가 같아야 한다는 기하학적인 적합조건인데 이를 통해 축약행렬을 유도해 연성된 동적시스템을 유도하였다.

부분구조합성법의 핵심은 여러 개의 부분구조물 중 주 구조물을 정하고 다른 부분구조들은 이 주 구조물로부터 나무 형태로 연결되어 가는 것으로 가정하는 것이다. 본 연구에서는 첫 번째 보 구조물을 주 구조물로 간주하고, 두 번째 보 구조물이 결합되는 형태로 가정하였다. 두 번째 보 구조물의 동적에너지는 첫 번째 구조물의 운동으로 인한 상대 변위와 기울기를 사용하여 유도하였는데 이 과정에서 질량행렬에 추가적인 항이 생성되었다. 구분모드 합성법이 축약행렬을 필요로 하는 반면에 부분구조 합성법은 축약행렬을 필요로 하지 않는다. 반면에 질량행렬의 추가적인 항을 통해 기하학적인 적합조건을 만족하게 된다.

두 방법의 차이점을 설명하기 위해 두 개의 균일보가 결합된 시스템을 고려하고 수치계산을 수행하였다. 수치 계산 결과는 부분구조합성법이 구분모드합성법에 비해 정확도와 수렴도가 좋을 것을 보여준다. 따라서 부분구조합성법이 결과의 효용성에 있어서는 구분모드합성법보다 좋다고 말할 수 있다.

본 연구에서는 이론적인 내용을 다루고 있지만 각 구조물에 대한 진동 실험을 바탕으로 구조물들이 결합된 경우에 대한 진동 특성을 예측하는 것도 중요한 연구 주제라고 생각된다. 구분모드합성법을 실험에 의해 구조물들을 합성하는 경우에 적용하면 주구조물에 결합될 부구조물들을 자유 상태에서 실험하고 그 결과를 축약행렬을 이용해 결합하면 전체 구조물의 진동 특성을 이론상 예측할 수 있다. 또한 부분구조합성법을 적용하는 경우에는 부구조물이 주구조물에 결합될 부분을 고정시키고 진동실험을 수행하여 고유진동수 및 고유진동모드를 계측하고, 추가적인 파라미터를 산정하여 전체 구조물의 고유 진동특성을 이론상 예측할 수 있다. 그러나 실험 데이터를 합성하는 방법에 대해서는 추가적인 연구가 필요하다.

### 후 기

본 연구는 동국대학교 논문 게재 장려금 지원으로 이루어졌다. 관계자 여러분께 감사드린다.

### 참고문헌

- (1) Hurty, W.C., 1960, "Vibrations of Structural Systems by Component-Mode Synthesis," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 86, pp. 51-69.
- (2) Hurty, W.C., 1965, "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 4, pp. 678-685.
- (3) Gladwell, G.M.K., 1964, "Branch Mode Analysis of Vibrating Systems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 1, pp. 41-59.
- (4) Benfield, W.A. and Hruda, R.F., 1971, "Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution," *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 7, pp. 1255-1261.
- (5) Meirovitch, L., 1980, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff.
- (6) Meirovitch, L. and Hale, A.L., 1980, "A General Dynamic Synthesis for Structures with Discrete Substructures," Paper No. 80-0798, *AIAA/ASME/ASCE/AHS 21<sup>st</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Seattle,

- Washington.
- (7) Hale, A.L. and Meirovitch, L., 1980, "A General Substructure Synthesis Method for the Dynamic Simulation of Complex Structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 69, No. 2, pp. 309-326.
- (8) Meirovitch, L., 1976, "A Stationarity Principle for the Eigenvalue Problem for Rotating Structures," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 10, pp. 1387-1394.
- (9) Meirovitch, L. and Kwak, M.K., 1991, "Rayleigh-Ritz Based Substructure Synthesis for Flexible Multibody Systems", *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 10, pp. 1709-1719.
- (10) 정우진, 이헌곤, 1993, "특성행렬을 이용한 부분구조합성법에 관한 연구," *한국소음진동공학회지*, 제 3권 제 2호, pp. 145-153.
- (11) 이인원, 김동욱, 1993, "Ritz 벡터를 이용한 수정 분할구조해석법," *한국소음진동공학회지*, 제 3권 제 1호, pp. 77-82.
- (12) 오재승, 이정환, 임동규, 1994, "부분구조합성법을 이용한 대형구조물의 동특성 규명 및 개선에 관한 연구," *한국소음진동공학회지*, 제 4권 제 3호, pp. 327-335.
- (13) 김석관, 김성대, 임기수, 1993, "부분구조합성법을 이용한 냉장고의 진동해석," *한국소음진동공학회지*, 제 3권 제 3호, pp. 253-257.
- (14) 장경진, 지태한, 박영필, 1996, "실험모달데이터를 사용한 구분모드합성법의 개선," *한국소음진동공학회지*, 제 6권 제 1호, pp. 97-106.
- (15) Blevins, R.D., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Robert E. Krieger Publishing Co., 1987.