

도파관의 단면 변화에 따른 파동 전달 특성

Characteristics of Wave transmission due to the Variation in the Cross-section of a Waveguide

김대승*·김진오†

Dae Seung Kim and Jin Oh Kim

Key Words : Waveguide(도파관), Cross-section(단면), Wave transmission(파동 전달)

ABSTRACT

This paper presents the theoretical approach to describe the wave propagation in the waveguide with varying cross-section. The waveguides considered in this paper are stepped-rod, tapered-rod, and stepped rod with a tapered section at the middle of wave-transmission. The wave transmission ratio for displacement, stress, and power was calculated for these three rods. The distribution of the stress and displacement along the stepped rod with a tapered section was calculated and compared with the results obtained by FEM analysis.

1. 서론

진동자의 한쪽 면에 부착되는 도파관은 변환기에서 발생한 진동을 증폭하여 가공 공구에 전달한다. 도파관의 형태는 계단형, 지수함수형, 테이퍼형 등이 있다.⁽¹⁾ 도파관의 진동 변위 증폭율의 크기는 각 도파관의 면적비가 일정하더라도 도파관의 형상에 따라서 다르다. 즉 계단형, 지수함수형, 테이퍼형 순이다.⁽²⁾

계단형 봉은 증폭율이 가장 크고 가공이 용이한데 단면이 불연속인 지점에서 응력 집중이 발생한다.⁽³⁾ 계단형 봉의 단면 변화부를 테이퍼형으로 변화시키거나 필릿을 사용하면, 이러한 응력을 완화시킬 수 있으나 그 대신에 진폭이 감소한다.

본 논문에서는 우선 테이퍼형 도파관과 계단형 도파관에서의 파의 전파 특성을 밝힌 후, 단면 변화부가 테이퍼형인 계단형 도파관에 대해서 파의 전파 특성을 파악한다. 그리고 이들 도파관에 대해서 변위 해와 응력 해를 구해 증폭율과 최대 응력을 구하고 피로한도 이내에서 최대의 증폭율을 얻을 수 있는 적절한 테이퍼 크기를 선정하다.

2. 파동 전달 해석

도파관은 진동을 증폭시키는 역할을 하며 주로 지수함수형, 계단형, 또는 테이퍼형 봉이다. 이 중에서 먼저 계단형 봉과 테이퍼 봉에 대해서 파동의 전달을 해석한다. 그런 다음에 계단형 봉의 단면 변화부를 테이퍼형으로 변형했을 때 파동의 전달을 해석한다.

2.1 테이퍼 봉과 계단형 봉의 비교

(1) 테이퍼 봉

봉의 단면 변화에 따른 종진동의 운동 방정식은 다음과 같다.⁽⁴⁾

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

여기서 $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ 이다. Fig. 1에 보인 바와 같은 원추형 테이퍼 봉의 x 방향의 단면 변화를 나타내는 단면적 함수 $S(x)$ 는 다음과 같이 표현된다.

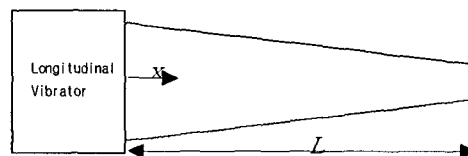


Fig. 1 A tapered rod excited at $x=0$

† 숭실대학교 공과대학 기계공학과
E-mail : jokim@ssu.ac.kr
Tel : (02) 820-0662, Fax : (02) 820-0662

* 숭실대학교 대학원 기계공학과

$$S(x) = S_0 \left(1 - \frac{2}{3L} x\right)^2 \quad (2)$$

여기서 S_0 는 원추형에서 굽은 쪽 끝($x=0$)의 단면적이다.
 $u(x, t) = U(x) \exp(i\omega t)$ 로 변수 분리하고, 식 (1)에 식 (2)를 대입하여 정리하면 다음과 같은 방정식이 된다.

$$\frac{d^2 U}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta} \frac{dU}{d\zeta} + \lambda^2 U = 0 \quad (3)$$

여기서 $\zeta = 1 - 2x/3L$ 이며 $\lambda = 3kL/2$ 이고, $k = \omega/c_0$ 이다.

위 식의 일반해는 다음과 같이 1/2차 1종 베셀함수로 표현된다.⁽⁴⁾

$$U(x) = \zeta^{-1/2} [C_1 J_{1/2}(\lambda\zeta) + C_2 Y_{-1/2}(\lambda\zeta)] \quad (4)$$

또한 식 (3)의 해는 구 좌표계에서 0차 베셀 방정식이며, 이것의 해를 표준형으로 다시 쓰면 다음과 같다.⁽¹⁾

$$U(x) = C_3 h_0^{(1)}(\lambda\zeta) + C_4 h_0^{(2)}(\lambda\zeta) \quad (5)$$

구 좌표계에서 n 차 3종 베셀 방정식은 다음과 같다.

$$h_n^{(1)}(\lambda\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda\zeta}} [J_{n+1/2}(\lambda\zeta) + iY_{n+1/2}(\lambda\zeta)] \quad (6a)$$

$$h_n^{(2)}(\lambda\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda\zeta}} [J_{n+1/2}(\lambda\zeta) - iY_{n+1/2}(\lambda\zeta)] \quad (6b)$$

$\zeta \rightarrow \infty$ 일 때 이들은 다음과 같이 표현된다.

$$h_n^{(1)} \sim \frac{i^{-n}}{\lambda\zeta} e^{i\lambda\zeta}, \quad h_n^{(2)}(\lambda\zeta) \sim \frac{i^{-n}}{\lambda\zeta} e^{-i\lambda\zeta} \quad (7a, b)$$

식 (7)에 시간의 항 $\exp(i\omega t)$ 를 곱하면, 식 (7a)는 $+x$ 방향으로의 파동전파를 나타내며, 식 (7b)는 $-x$ 방향으로의 파동전파를 나타낸다. 따라서 $+x$ 방향으로 전파하는 파동의 변위 해는 식 (5)에서 $C_4 = 0$ 이어야 한다. 또한

$\frac{d}{dx} h_0^{(1)}(\lambda\zeta) e^{i\omega t} = \frac{2}{3L} \lambda h_1^{(1)}(\lambda\zeta) e^{i\omega t}$ 이므로 변위 해와 응력 해는 다음과 같다.

$$u(x, t) = C_3 h_0^{(1)}(\lambda\zeta) e^{i\omega t}, \quad \sigma(x, t) = C_3 \frac{2}{3L} E \lambda h_1^{(1)}(\lambda\zeta) e^{i\omega t} \quad (8a, b)$$

$x=0$ 에서 가진될 때 경계조건을 응력 또는 변위로 나타내면 다음과 같다.

$$x=0 \text{에서 } \sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}, \quad u = U_0 e^{i\omega t} \quad (9a, b)$$

식 (9a)를 식 (8)에 대입하여, 파동의 변위 해와 응력 해를 구하면 다음과 같다.

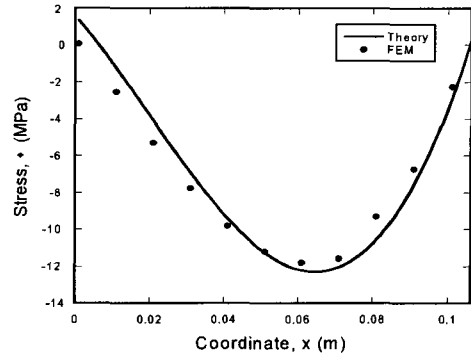
$$u(x, t) = \frac{\sigma_0}{Ek h_1^{(1)}(\lambda)} h_0^{(1)}(\lambda\zeta) e^{i\omega t} \quad (10a)$$

$$\sigma(x, t) = \frac{\sigma_0}{h_1^{(1)}(\lambda)} h_1^{(1)}(\lambda\zeta) e^{i\omega t} \quad (10b)$$

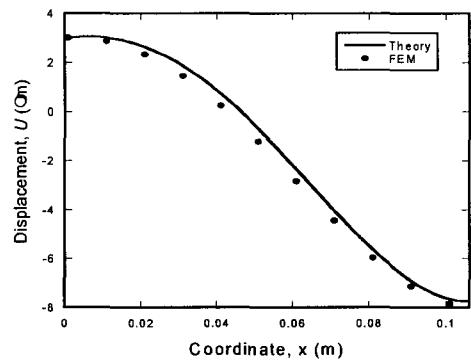
한편 식 (9b)를 식 (8)에 대입하여, 파동의 변위 해와 응력 해를 구하면 다음과 같다.

$$u(x, t) = \frac{U_0}{h_0^{(1)}(\lambda)} h_0^{(1)}(\lambda\zeta) e^{i\omega t} \quad (11a)$$

$$\sigma(x, t) = \frac{U_0 Ek}{h_0^{(1)}(\lambda)} h_1^{(1)}(\lambda\zeta) e^{i\omega t} \quad (11a)$$



(a) Stress



(b) Displacement

Fig. 2 Distribution of the stress and displacement in a tapered rod

여기서 변위해와 응력해의 크기는 식 (10) 또는 (11)의 실수부가 된다.

길이 $L=106$ mm이고 재질이 알루미늄 합금 7075-T6인 테이퍼 봉에 대해 $x=0$ 에서 $U_0=3$ μm , 28 kHz로 가진할 때, 식 (11)로부터 파동 전파에 따른 응력해와 변위해를 구하여, 유한 요소 해석 결과와 함께 Fig. 2에 나타냈다. Fig. 2에서 보듯이 이론 해석에 의한 변위 해와 응력 해는 유한 요소 해석 결과와 비교적 잘 일치하며, 변위 증폭률은 2.6이고 최대 응력은 12 MPa 정도 된다.

(2) 계단형 봉

계단형 봉의 영역 I, II에 대해 파동의 속도 해와 응력 해를 나타내면 다음과 같다.

$$\text{I 영역에서} \quad (12a)$$

$$\sigma_1(x, t) = iEk(-Ie^{-ikx} + Re^{ikx})e^{i\omega t} \quad (12b)$$

$$\text{II 영역에서 } v_2(x, t) = i\omega T e^{i(\omega t - kx)} \quad (12c)$$

$$\sigma_2(x, t) = -iEk T e^{i(\omega t - kx)} \quad (12d)$$

$x=0$ 에서 속도 연속성($v_1=v_2$)과 힘 연속성($S_1\sigma_1 = S_2\sigma_2$)에서 I, R 과 T 의 관계는 다음과 같다.

$$I + R = T, \quad S_1(-I + R) = -S_2 T \quad (13a, b)$$

여기서 $S_1/S_2=9$ 이므로 R 과 T 를 σ 에 관하여 나타내면 반사율과 전달율은 다음과 같다.

$$C_r = \frac{R}{I} = 0.8, \quad C_t = \frac{T}{I} = 1.8 \quad (14a,b)$$

응력의 전달율과 반사율을 구하기 위해서는 식 (12)에서 $I = -I_0$, $R = R_0$, $T = -T_0$ 가 되어야 한다. 식 (13)처럼 $x=0$ 에서 속도 연속성과 힘 연속성에 의해서 구한 응력 반사율과 전달율은 다음과 같다.

$$C_r^o = \frac{R}{I} = -0.8, \quad C_t^o = \frac{T}{I} = 1.8 \quad (15a,b)$$

따라서 파워 전달율은 다음과 같다.

$$C_t^p = 1 - |C_r|^2 = 0.36 \quad (16)$$

(3) 계단형 봉의 단면 변화부 변형

Fig. 3의 영역 I, II, III 영역에 대해 파동의 속도 해와 응력 해를 나타내면 다음과 같다.

$$\text{I 영역 } v_1(x,t) = i\omega(I_1 e^{-ikx} + R_1 e^{ikx})e^{i\omega t} \quad (17a)$$

$$\sigma_1(x,t) = iEk(-I_1 e^{i\omega t - kx} + R_1 e^{ikx})e^{i\omega t} \quad (17b)$$

$$\text{II 영역 } v_2(x,t) = i\omega[C_1 h_0^{(1)}(\lambda \zeta) + C_2 h_0^{(2)}(\lambda \zeta)]e^{i\omega t} \quad (17c)$$

$$\sigma_2(x,t) = \frac{2}{3L} E\lambda [C_1 h_1^{(1)}(\lambda \zeta) + C_2 h_1^{(2)}(\lambda \zeta)]e^{i\omega t} \quad (17d)$$

$$\text{III 영역 } v_3(x,t) = i\omega T e^{i\omega t - kx} \quad (17e)$$

$x=L$ 에서 역학적 임피던스는 다음과 같다.

$$\mathcal{Z}(L) = \frac{S_3 \frac{2}{3L} E\lambda [C_1 h_1^{(1)}(\frac{\lambda}{3}) + C_2 h_1^{(2)}(\frac{\lambda}{3})]}{i\omega [C_1 h_0^{(1)}(\frac{\lambda}{3}) + C_2 h_0^{(2)}(\frac{\lambda}{3})]} \quad (18)$$

여기서 $\lambda = 3kL/2$ 이므로 C_1 은 다음과 같다.

$$C_1 = -\frac{h_1^{(2)}(\frac{\lambda}{3}) + ih_0^{(2)}(\frac{\lambda}{3})}{h_1^{(1)}(\frac{\lambda}{3}) + ih_0^{(1)}(\frac{\lambda}{3})} C_2 \quad (19)$$

그리고 $x=0$ 에서 역학적 임피던스는 다음과 같다.

$$\mathcal{Z}(0) = \frac{S_1 \frac{2}{3L} E\lambda [C_1 h_1^{(1)}(\lambda) + C_2 h_1^{(2)}(\lambda)]}{i\omega [C_1 h_0^{(1)}(\lambda) + C_2 h_0^{(2)}(\lambda)]} \quad (20)$$

식 (18)-(19)로부터 변위 반사율 $C_r (= R/I_1)$ 은 다음과 같다.

$$C_r = \frac{-a[h_1^{(1)}(\lambda) + ih_0^{(1)}(\lambda)] + [h_1^{(2)}(\lambda) + ih_0^{(2)}(\lambda)]}{a[h_1^{(1)}(\lambda) - ih_0^{(1)}(\lambda)] - [h_1^{(2)}(\lambda) - ih_0^{(2)}(\lambda)]} \quad (21)$$

여기서 $a = -C_1/C_2$ 이다.

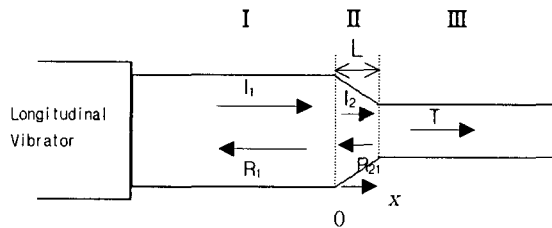
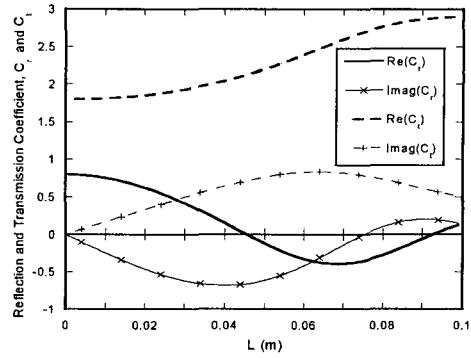
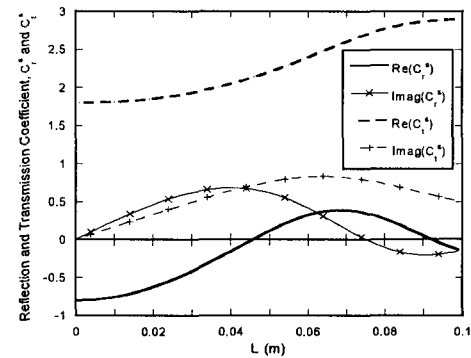


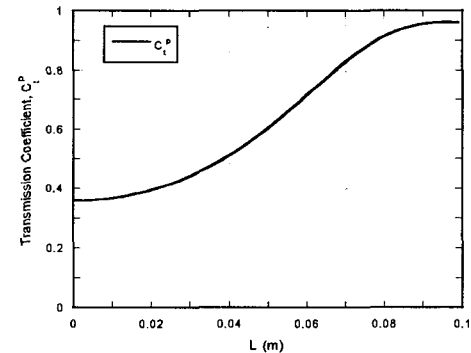
Fig. 3 Wave transmission and reflection in a stepped rod with a tapered section



(a) Displacement



(b) Stress



(c) Power

Fig. 4 Wave transmission ratio of the stepped rod with a tapered cross-section

$x=0$ 에서 $v_1 = v_2$ 임을 적용하여 상수 C_1 과 C_2 를 구한 후, $x=L$ 에서 $v_2 = v_3$ 임을 적용하여 변위 전달율 $C_t (= T/I_1)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$C_t = e^{ikL} (1 + C_r) \frac{ah_0^{(1)}(\frac{\lambda}{3}) - h_0^{(2)}(\frac{\lambda}{3})}{ah_0^{(1)}(\lambda) - h_0^{(2)}(\lambda)} \quad (22)$$

응력의 전달율과 반사율을 구하기 위해서는 식 (17)에서 $I_1 = -I_{10}$, $R_1 = R_{10}$, $T = -T_0$ 되어야 한다. $x=0$ 과 $x=L$ 에서 역학적 임피던스의 연속성에 의해서 응력의 반사율을 구하면 다음과 같다.

$$C_r^o = \frac{a[h_1^{(1)}(\lambda) + ih_0^{(1)}(\lambda)] - [h_1^{(2)}(\lambda) + ih_0^{(2)}(\lambda)]}{a[h_1^{(1)}(\lambda) - ih_0^{(1)}(\lambda)] - [h_1^{(2)}(\lambda) - ih_0^{(2)}(\lambda)]} \quad (23)$$

$x=0$ 에서 $v_1=v_0$ 임을 적용하여 상수 C_1 과 C_2 를 구한 후, $x=L$ 에서 $v_2=v_3$ 임을 적용하여 응력 전달율 $C_r^o (=T/T_1)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$C_r^o = e^{ikL}(C_r^o - 1) \frac{ah_0^{(1)}(\frac{\lambda}{3}) - h_0^{(2)}(\frac{\lambda}{3})}{ah_0^{(1)}(\lambda) - h_0^{(2)}(\lambda)} \quad (24)$$

그러면 반사율로부터 유도되는 파워 전달율은 다음과 같다.

$$C_r^p = 1 - |C_r|^2 \quad (25)$$

Fig. 4(a)는 식 (21)로부터 변위 반사율을 구하고, 식 (22)으로부터 변위 전달율을 구해서 나타낸 것이다. 길이 L 이 증가하면 변위 전달율은 증가하지만 반사율은 작아진다. Fig. 4(b)는 식 (23)로부터 응력 반사율을 구하고, 식 (24)로부터 응력 전달율을 구해 나타낸 것이다. 길이 L 이 증가하면 응력 전달율은 증가하고 반사율은 감소한다. 그리고 Fig. 4(c)는 식 (25)으로부터 파워 전달율을 구해서 나타낸 것이다. L 이 증가할수록 파워 전달율은 증가한다. 그리고 Fig. 4(a-c)에서 모두 $L=0$ 이면, 계단형 봉의 전달율, 반사율과 같아진다.

3. 가진 응답 해석

Fig. 5의 도파관은 테이퍼 형 단면 변화부를 갖는 계단형 봉이다. 각 영역에 대한 변위 해와 힘의 해는 다음과 같다.

I 영역 $U_1(x) = C_{11} \sin kx + C_{12} \cos kx \quad (26a)$

$$N_1(x) = S_1 Ek [C_{11} \cos kx - C_{12} \sin kx] \quad (26b)$$

II 영역 $U_2(x) = \zeta^{-\frac{1}{2}} [C_{21} J_{-\frac{1}{2}}(\lambda\zeta) + C_{22} J_{\frac{1}{2}}(\lambda\zeta)] \quad (26c)$

$$N_2(x) = -\frac{2S_2 E \lambda}{3L} \zeta^{-\frac{1}{2}} [C_{21} J_{-\frac{3}{2}}(\lambda\zeta) - C_{22} J_{\frac{3}{2}}(\lambda\zeta)] \quad (26d)$$

III 영역 $U_3(x) = C_{31} \sin kx + C_{32} \cos kx \quad (26e)$

$$N_3(x) = S_3 Ek [C_{31} \cos kx - C_{32} \sin kx] \quad (26f)$$

여기서 $C_{11} \sim C_{32}$ 는 경계조건에 의해 결정되는 상수이며,

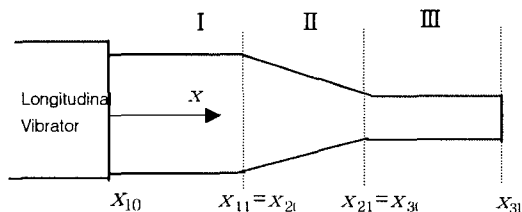


Fig. 5 A stepped rod with a tapered cross-section excited at $x=0$

S_1, S_2, S_3 는 영역 1, 3의 단면적이고, S_2 는 영역 2의 시작점의 단면적이다. 또한 ζ 는 다음과 같다.

$$\zeta = 1 - \frac{2}{3L}(x - x_{20}) \quad (27)$$

Fig. 5에서 i 번째 영역 끝 점에서의 변위 U_i , 힘 N_i 과 영역 시작점에서의 변위 U_0 , 힘 N_0 사이의 관계는 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$\begin{bmatrix} U_i \\ N_i \end{bmatrix} = [T_i] \begin{bmatrix} U_0 \\ N_0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

여기서 전달행렬 $[T_i]$ 와 총 전달행렬 $[T]$ 는 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$[T_i] = [S(x_i)] [S(x_0)]^{-1} \quad (29a)$$

$$[T] = [T_i] [T_{i-1}] [T_{i-2}] \cdots [T_1] \quad (29b)$$

따라서 각 영역에서 전달행렬을 구하기 위해 식 (29a)로부터 행렬 $[S(x_i)]$ 과 $[S(x_0)]$ 을 나타내면 다음과 같다.

$$[S(x_{10})] = \begin{bmatrix} \sin kx_{10} & \cos kx_{10} \\ S_1 Ek \cos kx_{10} & -S_1 Ek \sin kx_{10} \end{bmatrix} \quad (30a)$$

$$[S(x_{11})] = \begin{bmatrix} \sin kx_{11} & \cos kx_{11} \\ S_1 Ek \cos kx_{11} & -S_1 Ek \sin kx_{11} \end{bmatrix} \quad (30b)$$

$$[S(x_{20})] = \zeta^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} J_{\frac{1}{2}}(\lambda\zeta_{20}) & J_{-\frac{1}{2}}(\lambda\zeta_{20}) \\ -\frac{2S_2 \zeta_{20}^2 E \lambda}{3L} J_{-\frac{3}{2}}(\lambda\zeta_{20}) & \frac{2S_2 \zeta_{20}^2 E \lambda}{3L} J_{\frac{3}{2}}(\lambda\zeta_{20}) \end{bmatrix} \quad (30c)$$

$$[S(x_{21})] = \zeta^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} J_{\frac{1}{2}}(\lambda\zeta_{21}) & J_{-\frac{1}{2}}(\lambda\zeta_{21}) \\ -\frac{2S_2 \zeta_{21}^2 E \lambda}{3L} J_{-\frac{3}{2}}(\lambda\zeta_{21}) & \frac{2S_2 \zeta_{21}^2 E \lambda}{3L} J_{\frac{3}{2}}(\lambda\zeta_{21}) \end{bmatrix} \quad (30d)$$

$$[S(x_{30})] = \begin{bmatrix} \sin kx_{30} & \cos kx_{30} \\ S_3 Ek \cos kx_{30} & -S_3 Ek \sin kx_{30} \end{bmatrix} \quad (30e)$$

$$[S(x_{31})] = \begin{bmatrix} \sin kx_{31} & \cos kx_{31} \\ S_3 Ek \cos kx_{31} & -S_3 Ek \sin kx_{31} \end{bmatrix} \quad (30f)$$

식 (30)을 식 (29a)에 대입해 각 영역에서의 전달행렬 T_1, T_2, T_3 을 구한다.

Fig. 5와 같이 한쪽 끝($x=x_{10}=0$)에서 가진되고, 다른 쪽 끝($x=x_{31}$)이 자유로운 경우, 힘 연속성과 변위 연속성으로부터 경계조건은 다음과 같다.

$$U_{10} = U_0, N_{10} = 0 \quad (31a,b)$$

$$U_{11} = U_{20} = 0, N_{11} = N_{20} \quad (31c,d)$$

$$N_{31} = 0 \quad (31e)$$

경계조건 (31b)로부터 $[T_1]_{1,1}=0$ 일 때 노드 점 x_{11} 이 얻어지며, 경계조건 (31b)와 (31e)로부터 $[T_2]_{2,1}=0$ 이 될 때 x_{31} 을 구할 수 있다. 그런 다음에 경계 조건 (31)을 각 영역의 전달 행렬 T_1, T_2, T_3 에 대입하여 변위 연속성과 힘 연속성으로부터 각 영역에 대한 변위 해와 응력해를 구하면 다음과 같다.

$$0 \leq x \leq x_{11} \text{ 에서 } U_1(x) = U_0 \cos kx \quad (32a)$$

$$\sigma_1(x) = -U_0 Ek \sin kx \quad (32b)$$

$x_{20} \leq x \leq x_{21}$ 에서

$$U_2(x) = \frac{N_{20} \zeta^{-\frac{1}{2}} [-J_{-\frac{1}{2}}(q) J_{\frac{1}{2}}(q_0) + J_{\frac{1}{2}}(q) J_{-\frac{1}{2}}(q_0)]}{\rho_0 \zeta^{\frac{1}{2}} [J_{\frac{3}{2}}(q_0) J_{-\frac{1}{2}}(q_0) + J_{-\frac{3}{2}}(q_0) J_{\frac{1}{2}}(q_0)]} \quad (32c)$$

$$\sigma_2(x) = \frac{\rho N_{20} \zeta^{-\frac{5}{2}} [J_{-\frac{3}{2}}(q) J_{\frac{1}{2}}(q_0) + J_{\frac{3}{2}}(q) J_{-\frac{1}{2}}(q_0)]}{S_2 \rho_0 \zeta^{\frac{1}{2}} [J_{\frac{3}{2}}(q_0) J_{-\frac{1}{2}}(q_0) + J_{-\frac{3}{2}}(q_0) J_{\frac{1}{2}}(q_0)]} \quad (32d)$$

$x_{21} \leq x \leq x_{31}$ 에서

$$U_3(x) = U_{30} (\sin kx \sin kx_{30} + \cos kx \cos kx_{30}) + \frac{N_{30}}{S_3 Ek} (\sin kx \cos kx_{30} - \cos kx \sin kx_{30}) \quad (32e)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{S_3} [U_{30} S_3 Ek (\cos kx \sin kx_{30} - \sin kx \cos kx_{30}) + N_2 (\cos kx \cos kx_{30} + \sin kx \sin kx_{30})] \quad (32f)$$

여기서 $q = \lambda \zeta$ 이고 $p = 2S_2^2 EN/3L$ 이다.

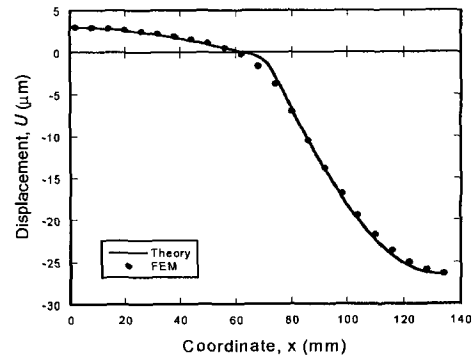
도파관의 재료는 STS302로 밀도 $\rho = 7920 \text{ kg/m}^3$, 영률 $E = 200 \text{ GPa}$ 이다. 길이 $L = 10 \text{ mm}$ 일 때, 가진 주파수는 공진 주파수인 $x = 0$ 에서 20 kHz $U_0 = 3 \text{ }\mu\text{m}$ 로 가진할 경우 변위 해와 응력 해를 Fig. 6에 나타내었다. 이 때 $x_{11} = 62.8 \text{ mm}$ 이고 $x_{31} = 135.6 \text{ mm}$ 이다.

그리고 유한 요소 해석은 2.1절과 동일한 방법으로 하였으며 요소의 개수는 319개이다. 유한요소 해석 결과의 공진 주파수는 18.76 kHz 이며, 변위와 응력 분포는 이론 해석 결과와 비교적 잘 일치한다. 그리고 변위 증폭률은 8.7로 계단형 봉의 변위 증폭률(= S_1/S_3) 9보다 약간 작다.

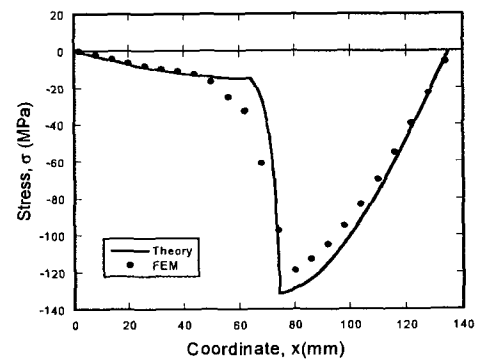
4. 결론

테이퍼 봉에서 전파하는 파동의 응력 해와 변위 해를 구하였다. 그리고 테이퍼 형 단면 변화부를 갖는 계단형 봉에 대하여 파동 전달율을 구해 계단형 봉의 파동 전달율과 비교하였다. 테이퍼 형 단면 변화부를 갖는 계단형 봉의 파동 전달율은 계단형 봉에서보다 크음을 확인하였다.

테이퍼 형 단면 변화부를 갖는 계단형 봉에 대하여 가진 응답 곡선으로부터 단면 변화부에서의 최대 응력과 자유단에서의 변위를 구하였다. 이론적으로 구한 결과를 유한 요소 해석 결과와 비교하여 검증하였다.



(a) Displacement



(b) Stress

Fig. 6 Distribution of displacement and stress in the stepped rod with a tapered cross-section

참고 문헌

- (1) Graff, K. F., 1991, Wave Motion in Elastic Solids, Dover, New York, Chapter 2.
- (2) Eisner, E., 1963, "Design of sonic amplitude transformers for high magnification", Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 35, No. 9, pp 1367-1377.
- (3) Amin, S. G., Ahmed, M. H. M., Youssef, H. A., 1995, "Computer-aided design of acoustic horns for ultrasonic machining using finite-element analysis", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 55, pp. 254-260.
- (4) 최인석, 전한용, 김진오, 김인수, "열 차단용 초음파 도파관의 전파성능 향상 연구", 한국음향학회지, 제22권, 제7호, pp. 545-553.
- (5) Li, Q. S., 2000, "Exact solutions for longitudinal vibration of multi-step bars with varying cross-section", ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 122, No. 2, pp. 183-187.