

# 모드 분리 제어를 이용한 시스템 규명 : 히든 모드를 갖는 구조물에의 적용 System Identification Using Mode Decoupling Controller : Application to a Structure with Hidden Modes

하재훈† · 박영진\* · 박윤식\*

Ha Jaehoon, Park Youngjin and Park Yoonsik

**Key Words** : system identification, mode decoupling controller, hidden modes, Eigensystem Realization Algorithm

## ABSTRACT

System identification is the field of modeling dynamic systems from experimental data. As a modeling technique, we can mention finite element method (FEM). In addition, we are able to measure modal data as the experimental data. The system can be generally categorized into a gray box and black box. In the gray box, we know mathematical model of a system, but we don't know structural parameters exactly, so we need to estimate structural parameters. In the black box, we don't know a system completely, so we need to identify system from nothing. To date, various system identification methods have been developed. Among them, we introduce system realization theory which uses Hankel matrix and Eigensystem Realization Algorithm (ERA) that enable us to identify modal parameters from noisy measurement data. Although we obtain noise-free data, however, we are likely to face difficulties in identifying a structure with hidden modes. Hidden modes can be occurred when the input or output position comes to a nodal point. If we change a system using a mode decoupling controller, the hidden modes can be revealed. Because we know the perturbation quantities in a closed loop system with the controller, we can realize an original system by subtracting perturbation quantities from the closed loop system. In this paper, we propose a novel method to identify a structure with hidden modes using the mode decoupling controller and the associated example is given for illustration.

## 1. 서론

시스템 규명은 실험 데이터를 이용하여 수학적 모델을 생성하는 분야이다. 수학적 모델로는 유한 요소 모델이, 실험 데이터로는 모달 정보가 주로 이용된다. 시스템은 수학적 모델은 알지만 일부 시스템 파라미터를 모르는 경우와 수학적 모델을 전혀 모르는 경우로 나눌 수 있다. 일부 시스템 파라미터를 모르는 경우, 모달 정보를 이용한 시스템 파라미터 추정법이 사용된다. 수학적 모델을 전혀 모르는 경우, 입력과 출력 관계를 이용하여 수학적 모델을 직접 구현해야 한다. 이 경우 Eigensystem realization 이론이 많이 사용된다.<sup>(1)</sup> 이 방법은 시간 영역에서 시스템을 규명하는 방법으로서 최소 구현(minimum realization) 개념을 이용하여 시스템의 차수를 효과적으로 정할 수 있다. 최소 구현 개념을 이용하여 Hankel matrix의 차수를 정한 후, Eigensystem Realization Algorithm (ERA)<sup>(2)</sup>을 사용하면 시스

템의 모달 정보를 얻을 수 있다. 이 방법을 사용할 경우, 시스템 모드와 노이즈 모드를 효과적으로 분리할 수 있는 장점이 있다.

시스템을 규명할 경우, 가진점과 측정점의 위치에 따라 결과가 달라질 수 있다. 예를 들면, 가진점이나 측정점이 노달점(nodal point)에 일치하게 되면 히든 모드(hidden modes)가 발생하게 된다. 이 경우, 일반적인 시스템 규명 방법을 사용할 경우, 히든 모드를 측정하기 어렵다. 만약 시스템에 적절한 변경을 가하면, 원래 시스템에서 나타나지 않던 히든 모드가 나타날 수 있다. 본 논문에서는 히든 모드를 갖는 구조체를 규명하기 위해서 모드 분리 제어기<sup>(3)</sup>를 이용하여 시스템을 변경하고자 한다. 즉 모드 분리 제어를 이용하여 히든 모드를 갖는 구조체의 새로운 시스템 규명 방법을 제시하고자 한다.

## 2. 시스템 규명

히든 모드를 갖는 구조체에 시스템 규명을 적용하기에 앞서, 일반적인 시스템 규명 절차에 대해 설명하고자 한다. 현재까지 다양한 시스템 규명 방법들이 개발되었다. 그 중에서 Eigensystem

† 책임저자; 박사과정, 한국과학기술원, 기계공학과  
E-mail : jachoonha@kaist.ac.kr  
Tel : (042) 869-3060, Fax : (042) 869-8220

\* 교수, 한국과학기술원, 기계공학과

realization 이론은 시간 영역에서 시스템의 차수를 적절히 정할 수 있는 장점이 있다. 그림 1 은 시스템 규명을 단계별로 설명하고 있다. 먼저 입력과 출력의 관계를 이용하여 충격 응답 함수 (impulse response function or Markov parameter)를 구한다. 이를 이용하여 Hankel matrix 를 만들어서 1 차의 상태 공간 모델 (state space model)을 얻어낸다. 여기에 ERA 를 적용하면 최소 차수의 모달 모델(modal model)을 얻을 수 있다. 이때 얻어진 모달 모델은 2 차 형태의 모달 모델로 변경할 수 있다. 이때 2 차 형태로 변경하는 이유는 감쇠 모달 정보를 비감쇠 모달 정보로 분리하고 이에 대응하는 2 차 형태의 물리적 모델(physical model)을 만들기 위해서이다.

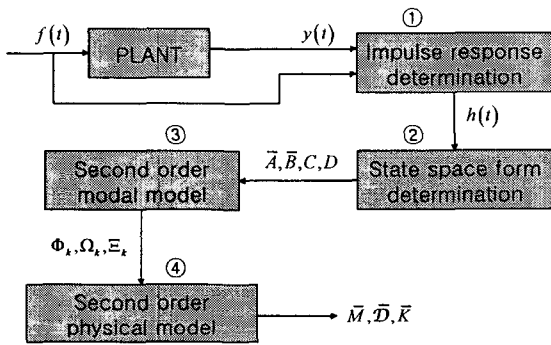


그림 1 시스템 규명의 단계

2.1 충격 응답 함수(Impulse response functions)

충격 응답 함수(Impulse response functions)는 discrete domain 에서 Markov parameter 라고 부른다. Markov parameter 를 구하는 방법 중에서 가장 많이 사용되고 있는 방법은 주파수 응답 함수를 역 FFT 하는 방법이다. 이 방법은 입력 및 출력 신호의 비주기성으로 인해 leakage 가 발생될 수 있고, 이를 방지하기 위해 사용되는 window 에 의해 artificial damping 효과가 나타날 수 있다. 하지만 이와 같은 오차는 다양한 방법에 의해 개선될 수 있다. 최근에는 FFT 를 사용하지 않고 Markov parameter 를 구하는 방법들이 개발되었다. 예를 들면 Observer/Kalman filter identification(OKID)<sup>(4)</sup>와 Wavelet 을 이용한 방법<sup>(5)</sup>들이 있다. 이들 방법도 기본적으로 정확도를 높이기 위해서는 계산 시간이 늘어난다는 단점이 있다.

2.2 상태 공간 모델(state space model)

위에서 구한 Markov parameter 를 이용하면 시스템의 상태 공간 행렬을 구할 수 있다. 식 (1) 은 Markov parameter 로 이루어진 Hankel matrix 를 나타낸다.

$$H_{qd}(k) = \begin{bmatrix} Y(k+1) & Y(k+2) & \dots & Y(k+d) \\ Y(k+2) & Y(k+3) & \dots & Y(k+d+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y(k+q) & Y(k+q+1) & \dots & Y(k+q+d-1) \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 Y 는 Markov parameter 를 나타낸다. Hankel matrix 에 그림 2 와 같이 ERA 를 적용하면 최소 차수의 상태 공간 행렬을 구할 수 있다.

Step	Computation	Result
1	svd( $H_{qd}(0)$ )	$P \cdot S \cdot Q^T$
2	Determine rank of $H_{qd}(0)$	$2n$
3	$S(1:2n, 1:2n), Q(1:2n, :), P(1:2n, :)$	$\tilde{S}, \tilde{Q}, \tilde{P}$
3	$S^{-1/2} \tilde{P}^T H_{qd}(1) \tilde{Q} S^{-1/2}$	$\tilde{A}_0$
4	$\tilde{S}^{1/2} \tilde{Q}(:, 1:r)^T$	$\tilde{B}_0$
5	$\tilde{P}(1:m, :) \tilde{S}^{1/2}$	$\tilde{C}_0$
6	$Y(0)$	$\tilde{D}$

그림 2 ERA 계산 단계

단계 1 에서 구한 특이치(singular value)가 급격히 낮아지는 지점이 시스템 차수가 된다. 단계 2 에서 결정된 최소 차수  $2n$  을 이용하여 다시 SVD 를 수행하면 최소 차수의 상태 공간 행렬 A, B, C, D 를 구할 수 있다. 시스템의 차수를 결정하기 위해 Modal Phase Collinearity(MPC)나 Complex Mode Indicator Function(CMIF)를 이용하는 방법도 있다.

또한 상태 공간 행렬을 구하는 방법으로 Data correlation 을 이용하는 방법<sup>(6)</sup>, QR decomposition<sup>(7)</sup>을 이용하는 방법 및 Direct method<sup>(8)</sup> 등이 있다.

2.3 모달 모델(modal model)

위에서 구한 상태 공간 모델을 모달 모델로 변경할 필요가 있다. 1 차의 상태 공간 모델을 이용하여 고유치 문제를 풀면 식 (2)와 같이 복소수 형태의 감쇠 모달 정보(complex damped modal data)를 얻게 된다. 여기서  $\sigma_i$  는  $-\zeta_i \omega_m$  를,  $\omega_i$  는  $\omega_m \sqrt{1-\zeta_i^2}$  를 나타낸다. 즉 실수부와 허수부에 모두 감쇠비( $\zeta_i$ ) 정보가 있는 것을 알 수 있

다.

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) \\ \dot{\bar{z}}_i(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} \sigma_i + j\omega_i & 0 \\ 0 & \sigma_i - j\omega_i \end{bmatrix} \begin{cases} z_i(t) \\ \bar{z}_i(t) \end{cases} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{zi}^T \\ \bar{\mathbf{b}}_{zi}^T \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (2)$$

$$\mathbf{y}_d(t) = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{zi} & \bar{\mathbf{C}}_{zi} \end{bmatrix} \begin{cases} z_i(t) \\ \bar{z}_i(t) \end{cases}$$

여기에 식 (3)과 같이 좌표 변환을 하면 식 (4)와 같이 복소수 형태의 모달 정보가 비감쇠 고유진동수( $\omega_m$ )와 감쇠비( $\zeta_i$ )로 분리된다.

$$\begin{cases} \eta_i(t) \\ \dot{\eta}_i(t) \end{cases} = \mathbf{T} \begin{cases} z_i(t) \\ \bar{z}_i(t) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{\eta}_i(t) \\ \ddot{\eta}_i(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_m^2 & -2\zeta_i\omega_m \end{bmatrix} \begin{cases} \eta_i(t) \\ \dot{\eta}_i(t) \end{cases} + \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_i^T \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (4)$$

$$\mathbf{y}_d(t) = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{H}_d \phi_i & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \eta_i(t) \\ \dot{\eta}_i(t) \end{cases}$$

이와 같은 방법을 Common Basis-normalized Structural Identification (CBSI)라고 부른다.<sup>(9)</sup>

#### 2.4 물리적 모델(physical model)

위에서 얻은 2 차의 모달 모델을 이용하여 물리적으로 의미가 있는 질량, 댐핑, 강성 행렬을 만들 수 있다. 식 (5)와 같이 Guyan reduction<sup>(10)</sup>을 사용하는 방법이 많이 사용된다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}} &= (\Phi_m \Omega^{-1} \Phi_m^T)^{-1} \\ \bar{\mathbf{M}} &= \bar{\mathbf{K}} \Phi_m \Omega^{-2} \Phi_m^T \bar{\mathbf{K}} \\ \bar{\mathbf{D}} &= \bar{\mathbf{K}} \Phi_m \Omega^{-1} \mathbf{\Xi} \Omega^{-1} \Phi_m^T \bar{\mathbf{K}} \end{aligned} \quad (5)$$

완전 모달 정보(complete modal data)가 사용될 경우, 스택 연산자(stack operator)와 크로넥터 곱(kronecker product)를 이용하여 시스템 행렬을 구할 수 있다.<sup>(11)</sup>

#### 2.5 모드 분리 제어기(mode decoupling controller)

모드 분리 제어기는 출력 되먹임을 이용하여 시스템을 변경하는 제어기이다. 예를 들어 변위를 출력으로 설정하면 페루프 시스템의 운동 방정식은 식 (6)과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_g \ddot{\mathbf{x}}_g + \mathbf{D}_g \dot{\mathbf{x}}_g + \mathbf{K}_g \mathbf{x}_g &= \mu_F \mathbf{b}_g (r - \mathbf{G}_d \mathbf{C}_d \mathbf{x}_g) \\ \mathbf{M}_g \ddot{\mathbf{x}}_g + \mathbf{D}_g \dot{\mathbf{x}}_g + (\mathbf{K}_g + \mu_F \mathbf{b}_g \mathbf{G}_d \mathbf{C}_d) \mathbf{x}_g &= \mu_F \mathbf{b}_g r \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $\mathbf{M}_g, \mathbf{D}_g, \mathbf{K}_g$ 는 시스템 행렬을 나타내고  $\mu_F$ 는 구동기의 동특성을,  $\mathbf{G}_d$ 는 개인 벡터,  $\mathbf{C}_d$ 는 출력 센서의 위치를 나타낸다. 모드 분리 제어

기는 페루프 시스템의 안정성을 유지하면서 시스템을 변경시키는 방법이다. 이때 개인 벡터는 식 (7)과 같이 구할 수 있다.

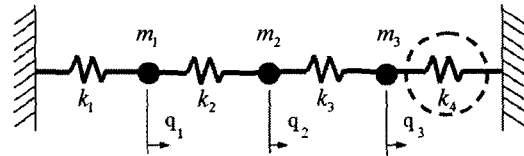
$$\mathbf{G}_d^T = \alpha \mathbf{g}^T \quad (7)$$

$$\text{where } \mathbf{g}^T = \text{Null}([\mathbf{W}_1 \ \dots \ \mathbf{W}_{i-1} \ \mathbf{W}_{i+1} \ \dots \ \mathbf{W}_l]^T)$$

여기서  $\mathbf{W}_i$ 는 모드 형상을 나타내고  $l$ 은 측정된 모드의 개수,  $i$ 는 변경할 특정 모드를 나타낸다.

#### 3. 히든 모드를 갖는 구조체에의 적용

히든 모드는 구조체의 노달점을 가진하거나 측정할 경우 생긴다. 예를 들면, 그림 3 과 같이 지면과의 경계 부분의 질량이나 강성이 크게 변경될 때 노달점이 생기기 쉽다. 그림 3 에서  $q_1$ 을 가진할 경우, 세번째 모드는 나타나지 않는다.



$m_1 = m_2 = m_3 = 1, k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 2, k_4 = 218$   
그림 3 히든 모드를 갖는 3자유도계 구조체

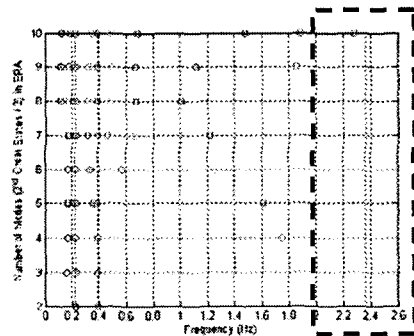


그림 4 모드 트랙 (Mode track)

그림 4 는 가진점이 1 이고 측정점이 1~3 인 경우, 모드 트랙을 나타낸다. 모드 트랙은 Hankel matrix 의 특이치의 개수를 증가시키면서 모달 정보의 위치를 그린 것이다. 시스템 모드는 특이치의 개수와 무관하게 계속 나타나고, 노이즈 모드는 그렇지 않다. 이 경우, 예상대로 세번째 모드가 나타나지 않는다는 것을 알 수 있다.

### 3.1 모드 분리 제어기를 이용한 페루프 구성

히든 모드를 측정하기 위해서 시스템을 변경하는 방법을 제시하고자 한다. 본 논문에서는 시스템을 변경하기 위해 모드 분리 제어기를 사용하고 자 한다. 그림 5 와 같이 출력 신호로 변위를 사용하여 모드 분리 제어기를 적용하면 페루프 시스템을 만들 수 있다.

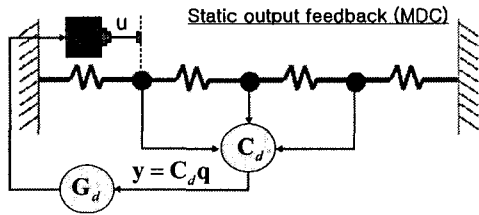


그림 5 페루프 시스템

이와 같은 페루프 시스템에 대해 시스템 규명을 하게 되면 그림 6 과 같이 3 개의 모드가 모두 나타나는 것을 알 수 있다.

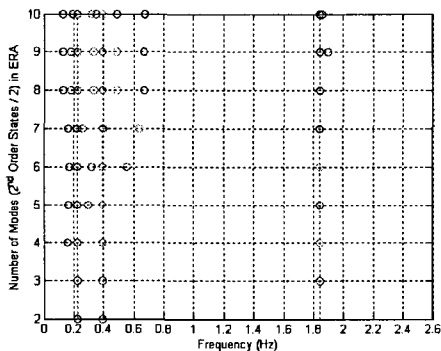


그림 6 모드 트랙

### 3.2 원래 시스템으로의 복원

페루프 시스템에 대한 규명을 실시한 후, 식 (8)을 이용하여 변경된 양을 빼주면 원래 시스템을 복원할 수 있다.

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{A} - \mathbf{BGC}, \quad \therefore \mathbf{A} = \mathbf{A}_m + \mathbf{BGC} \quad (8)$$

이때 변경된 시스템의 규명을 위해 페루프 모달 정보를 정확히 측정하는 것이 필요하다. 특히 페루프 시스템 행렬의 대칭성이 훼손되기 때문에 우 모드 형상과 좌 모드 형상을 모두 측정하는 것이 필요하다.

## 4. 결론

일반적인 방법을 이용하여 히든 모드가 있는 구조체의 시스템 규명을 수행하기 어렵다. 이 경우, 히든 모드를 측정하기 위해 페루프 시스템을

이용할 수 있다. 본 논문에서는 모드 분리 제어기를 사용하여 페루프 시스템을 만든 후, 히든 모드가 있는 시스템을 규명하는 방법을 제시하였다. 추후 연구 과제로 페루프 시스템의 정확한 측정을 통해, 원래 시스템 복원 시, 정확도를 높일 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단 지정 한국과학기술원 가상입체음향연구소(NRL)와 06 년 두뇌 한국사업(Brain Korea 21)의 지원에 의한 것입니다.

## 참고문헌

- (1) Juang, J. N., *Applied system identification*, Prentice Hall PTR, Chaps. 5-6, 1994.
- (2) Juang, J. N. and Pappa, R. S., "An Eigensystem Realization Algorithm for modal parameter estimation and model reduction", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 8, No. 5, pp. 620-627, 1985.
- (3) Hunsang Jung and Youngjin Park, "Mode decoupling controller for feedback model updating", *Proceedings of International Mechanical Engineering Congress & Exposition '04*, ASME, Anaheim, CA, USA, Sep. 13-19, 2004.
- (4) Juang, J. N., et al, "Identification of observer/Kalman filter Markov parameters: theory and experiments", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 2, pp. 320-329, 1993.
- (5) Robertson, A. N. and Park, K. C., "Extraction of impulse response data via wavelet transforms for multiple input structural system identification", *AIAA paper No. 96-1203-CP*, AIAA Dynamic Specialists Conference, Salt Lake City, UT, pp. 40-47, 1996.
- (6) Juang, J. N., et al, "An Eigensystem Realization Algorithm using data correlations for modal parameter identification", *Control theory and advanced technology*, Vol. 4, No. 1, pp. 5-14, 1988.
- (7) Cooper, J. E. , "On-line version of the Eigensystem Realization Algorithm using data correlations", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No. 3, pp. 137-142, 1997.
- (8) Minh Q. Phan and et al, "A direct method for state-space model and observer/Kalman filter gain identification", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, AIAA 2004-5414, August 2004.
- (9) K. F. Alvin and K. C. Park, "Second-order structural identification procedure via state-space-based system identification", *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 2, pp. 397-406, 1994.
- (10) Guyan, R. J., "Reduction of stiffness and mass matrices", *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 2, pp. 380, 1965.
- (11) Minh Q. Phan and Richard W. Longman, "Extracting mass, stiffness and damping matrices from identified state-space models", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, AIAA 2004-5415, August 2004.