

# 최적화 기법을 이용한 점탄성물질의 유리미분모델 물성값 추정 Identification of fractional-derivative-model parameters of viscoelastic materials using an optimization technique

김선용† · 이두호\*

Sun-Yong Kim, Doo-Ho Lee

**Key Words** : Identification index(추정지수), unconstrained damping Layer(비구속 제진층), viscoelastic material(점탄성 물질), fractional-derivative-model(유리미분모델)

## ABSTRACT

Viscoelastic damping materials are widely used to reduce noise and vibration because of its low cost and easy implementation, for examples, on the body structure of passenger cars, air planes, electric appliances and ships. To design the damped structures, the material property such as elastic modulus and loss factor is essential information. The four-parameter fractional derivative model well describes the nonlinear dynamic characteristics of the viscoelastic damping materials with respect to both frequency and temperature with fewer parameters than conventional spring-dashpot models. However the identification procedure of the four-parameter is very time-consuming one. An efficient identification procedure of the four-parameters is proposed by using a FE model and a gradient-based numerical search algorithm. The identification procedure goes two sequential steps to make measured FRFs coincident with simulated FRFs: the first one is a peak alignment step and the second one is an amplitude adjustment. A numerical example shows that the proposed method is efficient and robust in identifying the viscoelastic material parameters of fractional derivative model.

### 기호설명

- $\alpha(T)$  : 온도에 따른 이동계수(shift factor)
- $b$  : 설계변수벡터(물성값)
- $E^*$  : 복소 계수(complex modulus)
- $e^*$  : 강성계수의 비( $= E_2^*/E_1^*$ )
- $H_1$  : 보의 두께
- $H_2$  : 제진층의 두께
- $h$  : 제진층과 보의 두께비( $= H_2/H_1$ )
- $\eta$  : 손실계수(loss factor)
- $i$  : 단위허수( $= \sqrt{-1}$ )
- $K$  : 강성행렬(stiffness matrix)
- $M$  : 질량행렬(mass matrix)
- $\rho$  : 밀도
- $T$  : 절대온도(temperature)
- $\sigma$  : 응력(stress)
- $\varepsilon$  : 변형율(strain)
- $U$  : 탄성변형 에너지
- $x$  : 변위(displacement)
- $g_k(b)$  :  $k$ -번째 추정지수(identification index)

## 1. 서론

손실계수가 큰 점탄성 물질은 소음과 진동의 저감을 위한 제진재로 널리 사용되고 있다. 구조물의 표면에 점탄성 물질을 부착하여 소음과 진동을 저감하는 방법은 비구속형(Unconstrained damping)방법과 구속형(Constrained damping)방법으로 나눌 수 있는데 비구속형 제진층을 이용한 수동적인 제어는 경제적으로 비용이 적게 들 뿐만 아니라, 신뢰성면에서도 우수하기 때문에 많이 이용되고 있다. 예를 들어 자동차의 플로어에 부착된 제진쉬트는 차실의 소음과 진동을 수동제어하기 위하여 많이 이용되고 있으며 유사한 경우를 비행기의 동체나 가전제품의 케이스, 선박의 벽면 등에서 볼 수 있다.<sup>(8)</sup>

점탄성 물질의 물성값은 주파수와 온도의 영향을 많이 받는데, 물성값의 동특성을 기술하기 위해서 유리미분모델을 사용하면 적은 수의 인자로 점탄성 물질의 동특성을 나타낼 수 있다.<sup>(3, 5)</sup> 점탄성 물질의 유리미분모델 인자를 얻기 위해서는 온도와 주파수의 변화에 따른 많은 표준실험과 커브피팅을 통해서 각 인자들의 값을 정하는 과정이 필요하다.<sup>(2)</sup> 그러나 이러한 과정은 시간이 많이 걸리고 데이터의 처리가 복잡하여 유리미분모델의 계수를 결정하는데 장애가 되고 있다.

주파수 응답함수(frequency response function)는 시스템의 강성(stiffness)과 감쇠(damping) 정보를 포함하고 있고, 주파수 응답함수의 재현은 시스템

\* 책임저자: 동의대학교 기계공학과  
E-mail : dooho@deu.ac.kr  
Tel : (051) 890-1658, Fax : (051) 890-2232

† 동의대학교 기계공학과 대학원

의 강성과 감쇠의 정확한 추정 없이는 불가능하다. 그러므로 점탄성 물질을 포함하는 시스템의 측정 응답을 정확히 재현하는 수치모델을 사용하여 점탄성 물질의 물성값을 추정할 수 있다. 본 연구에서는 점탄성 물질의 유리미분모델의 4 인자를 추정하는데 있어서 반복적이고 복잡한 기존의 추정 과정을 거치지 않고 최적화 기법<sup>(1, 4)</sup> 이용하여 각 물성값을 추정하는<sup>(14)</sup> 효율적인 방법을 제안한다. 제안된 방법은 추정과정을 두 과정으로 나누어 추정의 신뢰성과 효율을 높이도록 고안되었다. 수치예제를 도입하여 제안된 방법의 효용성을 확인하였다.

## 2. 점탄성물질의 물성값 추정

### 2.1 유리미분모델과 물성 계수 추정

복소계수(Complex modulus) 개념을 이용한 점탄성 물질의 응력-변형률 관계는 주파수영역에서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma = E^* \varepsilon = E(1 + i\eta)\varepsilon \quad (1)$$

여기서  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\sigma$  와  $\varepsilon$  는 응력과 변형률의 푸리에 변환(Fourier transfer)이다.  $E$ ,  $\eta$  는 각각 저장계수(storage modulus)와 손실계수(loss factor)이고 상첨자 \* 는 복소수를 의미한다. 점탄성 물질은 온도와 주파수에 영향을 크게 받으며, 온도의 변화에 따른 점탄성 물질의 복소계수 변화는 온도-주파수 중첩원리(temperature-frequency superposition principle)를 이용하면 온도의 영향을 주파수의 영향으로 환산할 수 있다. 환산량은 온도만의 함수인 이동계수  $\alpha(T)$  로 표현된다. 이를 온도-주파수 등가 원리에 적용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E^*(f_1, T_1) = E^*[f_2 \alpha(T_2), T_2] \quad (2)$$

대부분의 점탄성 물질에서  $\log(\alpha(T))$  와  $1/T$  는 선형비례관계를 보이는 것으로 알려져 있고, 다음과 같이 표현할 수 있다.



Fig. 1 Orbest beam test configuration

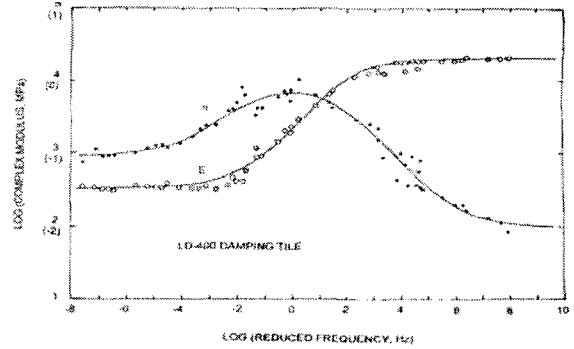


Fig. 2 Complex modulus and loss factor of LD-400 damping tile<sup>(3)</sup>

$$\log(\alpha(T)) = d_1 \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \quad (3)$$

위 식에서  $d_1$  은 비례상수,  $T_0$  는 기준온도이며 절대온도로 표현된다. 환산 주파수의 변화에 따른 점탄성 물질의 복소계수는 유리미분모델(fractional derivative model)을 이용하면 주파수영역에서 다음과 같이 간단하게 표현할 수 있다.

$$E^* = E(1 + i\eta) = \frac{a_0 + a_1 (i f \alpha(T))^\beta}{1 + c_1 (i f \alpha(T))^\beta} \quad (4)$$

여기서  $a_0, a_1, c_1, \beta$  는 점탄성 물질의 상수이다. 그러므로  $a_0, a_1, c_1, \beta$  를 알고 있다면 점탄성 물질의 감쇠특성을 주파수 및 온도에 따라서 쉽게 기술할 수 있다.

유리미분 모델의 물성계수를 추정하기 위해서는 보통 [Fig. 1]과 같은 형태의 Orbest beam 을 이용한 감쇠 특성 시험을 이용한다. 감쇠특성시험을 통해서 충분히 넓은 주파수와 온도범위에서 저장계수와 감쇠계수의 측정값을 얻으면 물질상수  $a_0$  는 아주 낮은 환산 주파수에서의  $E$  에서 추정할 수 있고,  $\beta$  의 값은 상용로그로 표현된 환산 주파수와 저장계수에서의 최대 기울기의 값으로 추정할 수 있다. 마지막으로  $a_1/c_1$  의 값은 매우 높은 환산 주파수에서의 점근선의 값으로 추정할 수 있다. 그러나 최종 유리미분모델의 물성계수의 값은 이동계수  $\alpha(T)$  의 추정과 다음 식 (5), (6)을

$$\varepsilon_{E_j} = \sum_{j=1}^Q \Delta \varepsilon_{E_j} = \sum_{j=1}^Q \left[ \log \{ E(f_j \alpha(T_j)) \} - \log \{ E_{j,measured} \} \right]^2 \quad (5)$$

$$\varepsilon_{\eta_j} = \sum_{j=1}^Q \left[ \log \{ \eta(f_j \alpha(T_j)) \} - \log \{ \eta_{j,measured} \} \right]^2 \quad (6)$$

이용하여 저장계수와 감쇠계수에 대한 측정값과 이론값의 오차를 최소화하는 시행착오 과정을 반복하여 결정할 수 있다.<sup>(2)</sup>

[Fig. 2]는 Oberst beam 실험을 통해서 얻은 저장계수와 손실계수의 예를 환산주파수로 나타낸 것이다.

## 2.2 최적화 기법을 이용한 물성값 추정

본 연구에서는 표준감쇠실험을 통해서 얻은 주파수 응답함수와 표준감쇠실험을 모사하는 유한요소모델의 계산된 주파수 응답함수의 차이를 최소화함으로써 점탄성 물질의 유리미분 모델 계수값을 추정하는 방법을 제안한다

주파수 응답함수를 이용한 점탄성 물질의 물성값 추정의 출발점은 측정된 주파수 응답함수와 계산된 주파수 응답함수가 같다면 계산에 사용된 물성값이 실제 점탄성 물질의 물성값이라 가정하는 것이다. 이러한 가정을 바탕으로 물성값을 변수로 하고 주파수 응답함수의 형태로 계산된 응답과 측정된 응답 사이의 차이를 수학적 계획법 (mathematical programming method)을 사용하여 최소화한다면 점탄성 물질의 물성값을 추정할 수 있을 것이다. 따라서 점탄성 물질의 물성값 추정 문제는 목적함수를 최소화하는 문제로 정식화할 수 있다. 이러한 함수를 추정지수함수(identification index)라고 부르기로 하고, 추정지수함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$g(b) = \sum_{i=1}^N \int (x_{estimated}^i - x_{measured}^i)^2 df \quad (7)$$

여기서  $x_{estimated}$ ,  $x_{measured}$  는 각각 임의의 유리미분 모델값을 사용하여 계산한 주파수 응답함수, 측정을 통해 얻어진 주파수 응답함수이고  $N$  은 기준응답의 개수다.  $N$  은 서로 다른 온도에서의 응답을 표현하기 위해서 도입되었으며, 효율적인 물성값의 추정을 위해서는 2 이상이 되어야 한다. 식 (7)의 추정지수함수를 최소화함으로써 점탄성 물질의 물성값을 추정할 수 있다.

식 (7)로 정의된 추정지수를 최소화하기 위한 수학적 계획법 알고리즘은 매우 다양하지만 공학적인 관점에서 기울기(gradient) 정보를 기반으로 하는 알고리즘이 가장 효율적인 것으로 알려져 있다. 본 논문에서는 기울기 정보를 이용한 수치 최적화 알고리즘을 이용하여 추정지수를 최소화한다. 식(7)의 물성계수에 대한 기울기는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial g(b)}{\partial b} = \sum_i^N 2 \int (x_{estimated}^i - x_{measured}^i) \cdot \frac{\partial x_{estimated}^i}{\partial b} df \quad (8)$$

위 식에서  $\partial x_{estimated}^i / \partial b$  는 물성값에 따른 주파수 응답함수의 임의의 물성값에 대한 미분값이다.

기울기 정보를 이용하는 최소화 알고리즘은 시작점에 따라 국부적인 최소값을 줄 수 있으므로 물성값 추정시 참값으로 수렴하는 영역을 최대한 넓히고 추정의 효율을 높이기 위해서 물성값 추정 과정을 두 단계로 나누어 실시한다. 첫 번째 단계는 응답의 피크점을 일치시키는 과정이고 두 번째 단계는 주파수에서 응답의 크기를 일치시키는 과정이다. 각 과정을 [Fig. 3]에 도식화하고, 각각에서 추정지수함수는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\text{Step 1 } g_1(b) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M (\lambda_{k,measured}^i - \lambda_{k,simulated}^i)^2 \quad (9)$$

$$\text{Step 2 } g_2(b) = \sum_{i=1}^N \int (x_{measured}^i - x_{simulated}^i)^2 df \quad (10)$$

위 식에서  $M$  은 관심주파수 영역에서 피크의 수이다. 식 (9)는 첫 번째 추정과정에서 사용하는 추정지수함이다. 고유주파수를 첫 번째 단계에서 일치시키고, 식 (10)을 추정지수로 하는 두 번째 단계에서 모든 주파수에서 응답의 크기를 일치시켜 점탄성 물질의 물성값을 추정하는 것이다. 추정과정을 정리하여 [Fig. 4]에 나타내었다.

## 3. 비구속 제진층 보의 해석

### 3.1 제진층을 갖는 보의 고유모드 해석

점탄성 층을 갖는 보의 해석방법 중에서 간단하면서도 정확한 해석으로 가장 많이 쓰이는 방법이 Ross, Ungar, Kerwin(RUK)에 의해 제안된 등가강성법이다. RUK 식에 의하면 점탄성 층의 저장계수, 손실계수가 각각  $E_2$ ,  $\eta_2$  이고 보의 저장계수, 손실계수, 이차면적모멘트가 각각  $E_1$ ,  $\eta_1$ ,  $I_1$  일 때, 등가 복소 처짐 강성(flexural rigidity)  $(EI)^*$  는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\frac{(EI)^*}{(EI_1)^*} = 1 + e^* h^3 + 3(1+h)^2 \frac{e^* h}{1+e^* h} \quad (11)$$

여기서  $h = H_2/H_1$ ,  $e^* = E_2^*/E_1^*$  이다. 식 (11)를 이용하면 점탄성 제진층이 부착된 보의 등가 강성(storage modulus)과 손실계수(loss factor)를 계산할 수 있다.

제진층을 포함하는 구조계를 유한요소 모델로 표현하면, 점탄성 제진층을 갖는 부분은 식 (11)에 의해서 정의되는 등가강성을 갖는 보 요소(beam element)로 모델링 될 수 있으며 구성된 계의 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M\ddot{x} + K^*x = f \quad (12)$$

여기서  $M$  과  $K^*$  는 각각 질량행렬(mass matrix)과 강성행렬(stiffness matrix)이고,  $x$  와  $f$  는 각각 변위벡터와 외력벡터이다. 구조계가 등가강성을 갖는 보로 이루어져 있고 점탄성 층을 포함하는 경우 강성행렬  $K^*$  는 복소수 값이 되며 손실계수와는 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$K^* = K_r + iK_i = K_r(1 + i\eta) \quad (13)$$

위 식에서  $K_r$ ,  $K_i$  는 각각 강성행렬의 실수부와 허수부를 의미한다. 조화운동을 가정하면 식 (12)으로 표현되는 계의 실수 고유값문제는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$K_r y = \zeta M y \quad (14)$$

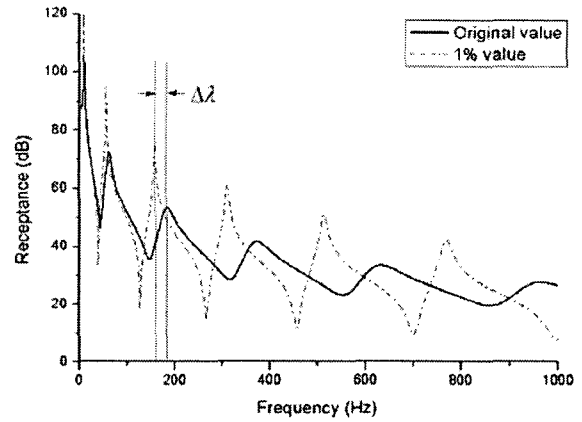
위 식에서  $y$  는 고유벡터(eigenvector)이고  $\zeta (= \omega^2)$  는 고유값(eigenvalue)이다. 식 (12)으로 표현된 고유값 문제의 강성행렬은 점탄성 층의 영향으로 강성계수가 주파수의 함수가 되어 비선형 방정식이 된다. 그러나 점탄성 물질의 강성계수가 변위에 무관하다고 가정하면 축차 과정을 통하여 고유값 문제를 풀 수 있다.<sup>(9)</sup>

### 3.2 제진층을 갖는 보의 진동응답해석

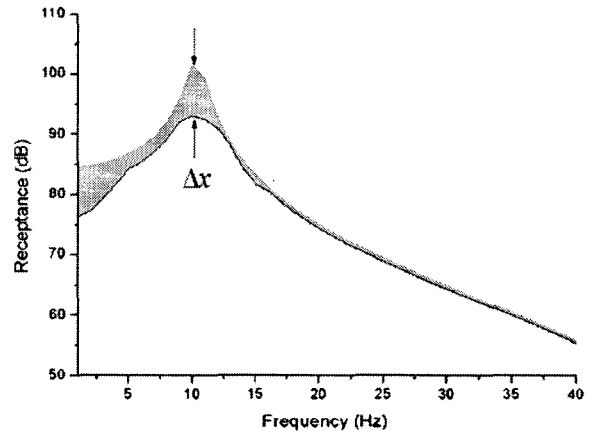
제진층을 갖는 보의 동적 응답은 모드중첩(modal superposition)를 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x = \sum_{k=1}^m a_k y_k \quad (15)$$

여기서  $m$  은 모드 수이며,  $y_k$  는  $k$  번째 고유벡터이고,  $a_k$  는  $k$  번째 모드좌표이며 다음과 같이 표현된다.



(a) Step 1 : Peak alignment step



(b) Step 2 : Amplitude adjustment step

Fig. 3 The two-step identification procedures

$$a_k = \frac{y_k^T f}{\zeta(1 + i\eta_k) - \omega^2} \quad (16)$$

식 (16)에서는  $\eta_k$  는  $k$  번째 모드 손실계수이다. 특정 고유모드에 대한 손실계수는 모드변형에어지법(modal strain energy method)을 사용하면 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$\eta_k = \frac{\sum_{j=1}^m \eta_{ej} U_{ej}}{\sum_{j=1}^m U_{ej}} = \frac{\sum_{j=1}^m \eta_{ej} U_{ej}}{U} \quad (17)$$

위 식에서  $\eta_k$  는  $k$  번째 모드 손실계수이며,  $m$  은 유한요소의 개수,  $\eta_{ej}$  는  $j$  번째 요소의 손실계수이고,  $U_{ej}$  는  $j$  번째 요소의 최대변형 에너지이다. 식 (17)의 최대변형 에너지를 정확히 구하기 위해서는 복소 고유벡터를 사용해야 하지만 감쇠가 크지 않는 경우 실수 고유모드를 사용하여 각 모드의 손실계수를 계산할 수 있다.

등가 강성을 갖는 보의 진동응답을 계산하기

위하여 Hermite 3 차 보간함수를 갖는 이차원 유한 요소 프로그램을 개발하고 보를 20 개의 보 요소로 모델링 하여 식 (14)의 고유값 문제를 풀고 관심주파수 폭의 2 배의 고유모드와 식 (15)를 이용하여 임의의 점에서의 리셉턴스(Receptance)값을 계산한다.

3.3 유리미분모델 물성계수에 대한 민감도 해석  
 점탄성 물질이 물성값을 추정하기 위해서는 임의의 값에서의 강제진동응답의 변화율을 알아야 한다. 식 (15)로 표현된 강제 진동응답  $x$  를 유리미분모델 물성을 나타내는 변수  $b$  로 미분하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dx}{db} = \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{da_k}{db} y_k + a_k \frac{dy_k}{db} \right\} \quad (18)$$

여기서

$$\frac{da_k}{db} = \frac{dy_k^T}{db} \cdot f \times (\zeta_k (1 + i\eta_k) - \omega^2)^{-1} \quad (19)$$

$$\frac{y_k^T f \left( \frac{d\zeta}{db} (1 + i\eta_k) + i\zeta_k \frac{d\eta_k}{db} \right)}{(\zeta_k (1 + i\eta_k) - \omega^2)^2}$$

식 (18, 19)의 진동응답에 대한 설계민감도는 고유값 및 고유벡터 설계민감도와 손실계수에 대한 설계민감도를 알면 계산 할 수 있다. 자세한 민감도 해석과정은 참고문헌 [9]에 기술되어 있다.

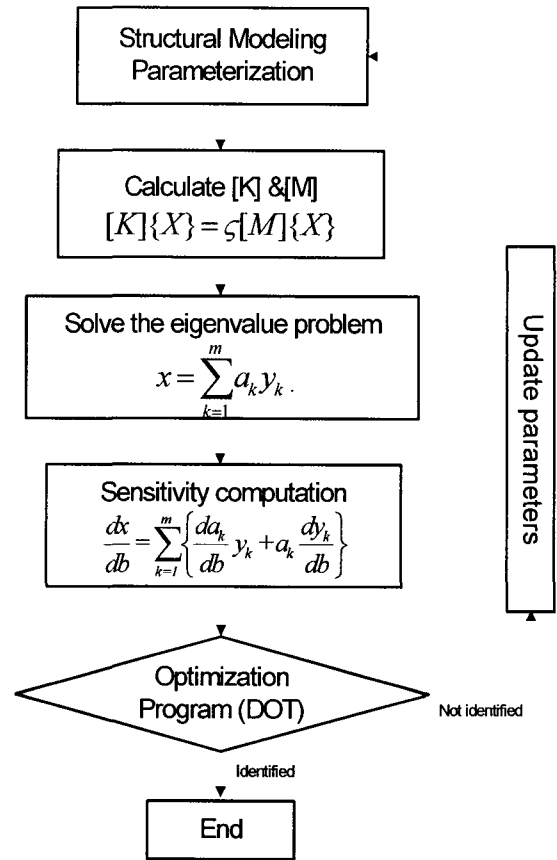


Fig. 4 The identification procedure

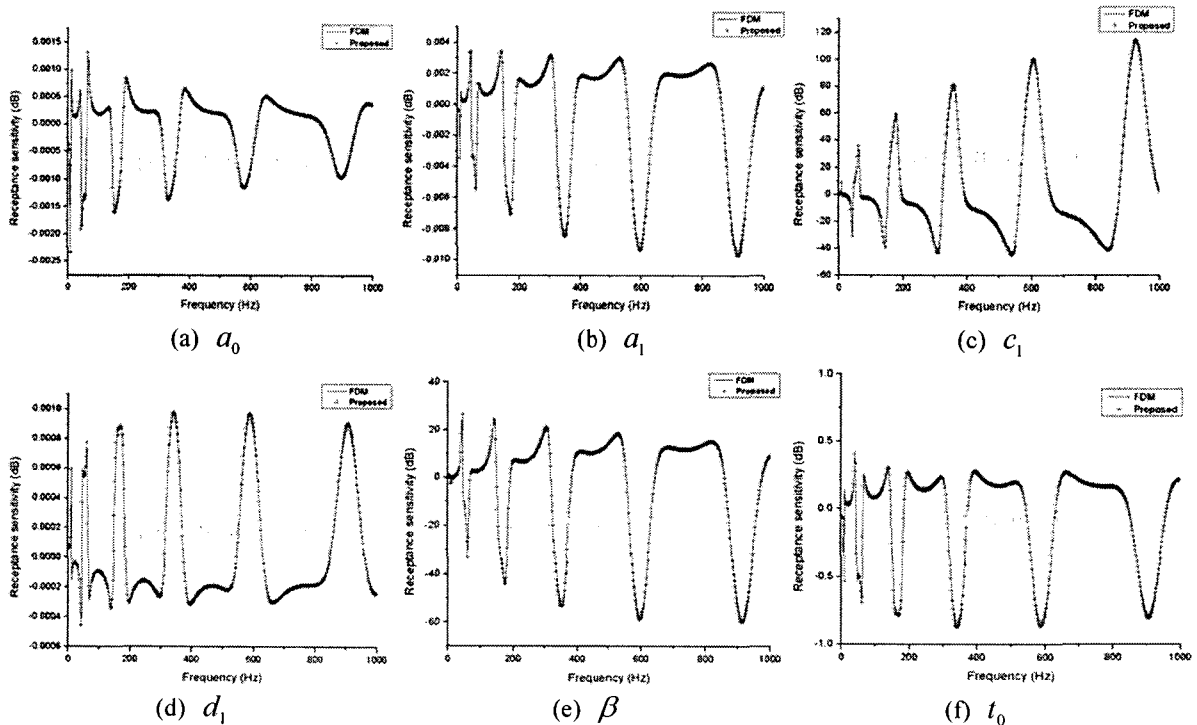


Fig. 5 Response sensitivities with respect to parameters compared with those of FDM

#### 4. 수치예제

본 장에서는 최적화 기법을 이용한 점탄성 물질의 유리미분모델 물성값을 추정방법을 수치예제를 통하여 검증한다. 이를 위하여 물성값을 알고 있는 점탄성 물질을 선정하고, 유한요소 모델을 사용하여 주파수 응답함수를 계산하여 이를 측정값으로 가정한 후 임의의 초기값으로부터 점탄성 물질의 물성값을 추정하여 제안된 방법의 가능성을 검증한다. 점탄성 물질은 LD-400<sup>(2)</sup>이란 물질을 선정하였다. 물성값은 참고문헌[1]에 나타나 있으며, 길이는 400mm로 가정하였다.

민감도 계산방법을 검증하기 위하여 [Fig 1]의 보 문제에 대하여 민감도 해석을 수행하였다. 주파수응답함수는 1 개의 온도정보에 대한 추정지수함수를 미분하였다. 외력 작용점의 리셉턴스값에 대한 유리미분 모델 물성값의 민감도값을 [Fig. 5]에 그렸다. 비교를 위하여 0.1%의 설계변수를 변화시켜 계산한 전방 유한차분법의 결과와 비교하였다. 그림을 보면 두 결과는 잘 일치하고 있어 민감도 값의 계산 절차가 정확함을 증명하고 있다. 그림을 살펴보면 계수  $c_1$  과  $\beta$  는 추정지수함수에 크게 영향을 미치는 것을 알 수 있으나,  $a_0, a_1, d_1, t_0$  은 상대적으로 작은 민감도값을 갖는 것을 알 수 있다.

점탄성 물질의 상수  $a_0, a_1, c_1, d_1, \beta, t_0$  의 값을 추정하기 위하여 첫 번째 주파수응답함수의 고유진동수를 일치시키고, 두 번째는 주파수응답함수의 크기를 일치시키는 두 단계의 추정지수함수를 최소화하는 문제를 풀었다. 측정을 가정한 응답의 주파수응답함수의 수(N)은 2 로 고정하였고, 30°C 와 80°C 에서 계산한 리셉턴스 값을 사용하였다. 가진의 위치는 보의 자유단 끝부분을 가진 하였으며, 응답의 위치도 가진위치와 동일한 곳으로 하였다. 최적화 소프트웨어로는 준뉴턴 방법 (quasi-Newton method)를 이용하는 DOT(Design Optimization Tools)를 사용하였으며, 비구속형문제 (Unconstrained Optimization)로 하였다. N=1 인 경우, 즉 온도의 정보가 1 개인 경우 추정지수함수와 기울기를 이용하여 초기값을 실제 물성값에 비하여 승수 1 만큼 줄여 물성값을 추정하여 보았다. 그 결과는 부분적으로  $d_1$  과  $t_0$  의 값을 정확하게 추정하지 못하였고, 축차횟수(iteration) 또한 몇 백 번에 달하였다.  $d_1$  과  $t_0$  의 값을 정확하게 추정 못하는 것은 온도에 영향을 크게 받는 점탄성 물질의 특성으로 미루어 보면 당연한 결과라고 볼 수 있다. 그래서 또 다른 온도의 정보를 주어서 같은 조건으로 물성값을 추정 하여 본 결과 모든 물성값에서 거의 정확한 값을 추정하는 것을 알 수 있다. 그러나 축차횟수가 너무 많아 시간적인 효율성이 떨어진다. [Table 1]

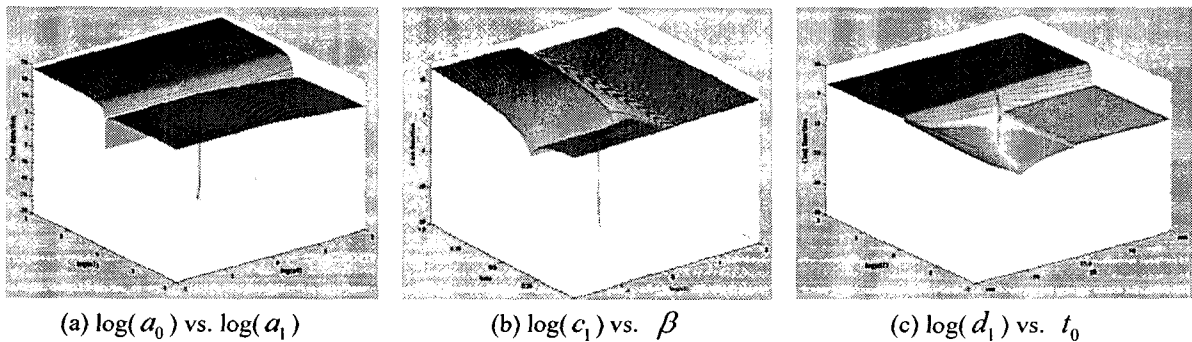


Fig. 6 Mesh lines of the first-step identification index

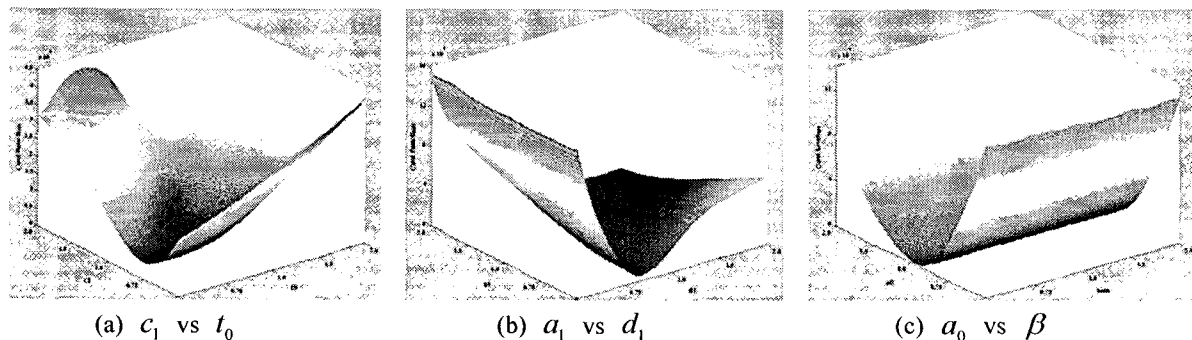


Fig. 7 Mesh lines of the second-step identification index

Table 1. Result of identifications

	Parameter method	No. of iter	Ratio [%, Identified value/True value X 100]					
			$a_0$	$a_1$	$c_1$	$\beta$	$d_1$	$t_0$
One step	N=1	211	100	100	98	99	30	12
	N=2	152	100	100	100	98	100	100
Two step	N=2 1 <sup>st</sup> step	23	99	100	89	98	100	97
	N=2 2 <sup>nd</sup> step	41	100	100	100	99	100	100

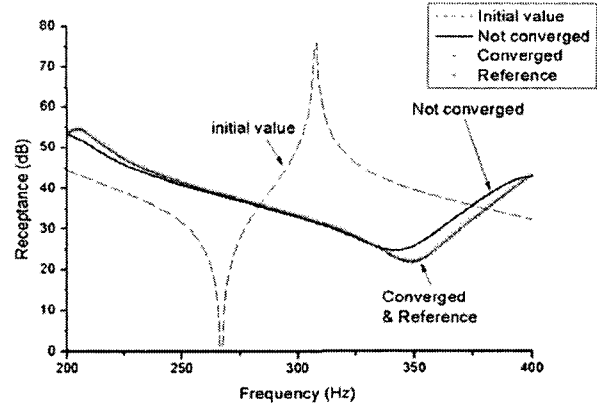


Fig. 8 An example of response of not-converged case

Table 2. Identification results for LD-400 (Started from P-multiple of the true values except  $\beta$ )

Parameters	Initial Value (P=0.01)	Identified First step	Identified Second step	Ratio (%)
$a_0$	0.33820E+01	0.33798E+03	0.33811E+03	100.03
$a_1$	0.24850E+02	0.24859E+04	0.24850E+04	100.00
$c_1$	0.12000E-02	0.12419E+00	0.12000E+00	100.00
$d_1$	0.12222E+03	0.12297E+05	0.12240E+05	99.85
$\beta$	0.50000E+00	0.46999E+00	0.47000E+00	100.00
$T_0$	0.15600E+00	0.15512E+02	0.15592E+02	100.05

(a) P = 0.01

Parameters	Initial Value (P=10)	Identified First step	Identified Second step	Ratio (%)
$a_0$	0.33820E+04	0.34414E+03	0.33822E+03	99.99
$a_1$	0.24850E+05	0.24649E+04	0.24850E+04	100.00
$c_1$	0.12000E+01	0.69000E+00	0.11900E+00	100.84
$d_1$	0.12222E+06	0.12218E+05	0.12222E+05	100.00
$\beta$	0.50000E+00	0.46886E+00	0.47001E+00	99.99
$T_0$	0.15600E+03	0.15707E+02	0.15592E+02	100.05

(c) P = 10

Parameters	Initial Value random	Identified First step	Identified Second step	Ratio (%)
$a_0$	1.00E+01	0.34414E+03	0.33822E+03	99.99
$a_1$	1.00E+01	0.24649E+04	0.24850E+04	100.00
$c_1$	1.00E+00	0.15393E+00	0.11900E+00	100.84
$d_1$	1.00E+01	0.12218E+05	0.12222E+05	100.00
$\beta$	0.50E+00	0.46886E+00	0.47001E+00	99.99
$T_0$	1.00E+01	0.15707E+02	0.15592E+02	100.05

(e) P = random value

Parameters	Initial Value (P=0.1)	Identified First step	Identified Second step	Ratio (%)
$a_0$	0.33820E+02	0.33840E+03	0.33804E+03	100.05
$a_1$	0.24850E+03	0.24888E+04	0.24848E+04	100.00
$c_1$	0.12000E-01	0.13499E+00	0.11999E+00	100.00
$d_1$	0.12222E+04	0.12397E+05	0.12197E+05	99.79
$\beta$	0.50000E+00	0.47000E+00	0.47000E+00	100.00
$T_0$	0.15600E+01	0.16093E+02	0.15521E+02	100.51

(b) P = 0.1

Parameters	Initial Value (P=100)	Identified First step	Identified Second step	Ratio (%)
$a_0$	0.33820E+05	0.33820E+02	0.33822E+03	100.00
$a_1$	0.24850E+06	0.25332E+04	0.25277E+04	98.31
$c_1$	0.12000E+02	0.11948E+02	0.34684E+02	0.34
$d_1$	0.12222E+07	0.12218E+06	0.12222E+06	10.00
$\beta$	0.50000E+00	0.50000E+00	0.50000E+00	94.00
$T_0$	0.15600E+04	0.15512E+04	0.15543E+04	1.00

(d) P = 100

Parameters	Initial Value (P=+10 or -10)	Identified First step	Identified Second step	Ratio (%)
$a_0$	0.33820E+02	0.33798E+03	0.33811E+03	100.03
$a_1$	0.24850E+05	0.24649E+04	0.24850E+04	100.00
$c_1$	0.12000E-01	0.13499E+00	0.11999E+00	100.00
$d_1$	0.12222E+06	0.12218E+06	0.12197E+05	99.79
$\beta$	0.50000E+00	0.46886E+00	0.47001E+00	99.99
$T_0$	0.15600E+01	0.15512E+02	0.15592E+02	100.05

(f) P = ±10

시간적 효율성 및 추정값의 정확성을 높이기 위해서 본 논문에서 제안한 추정과정을 두 단계로 (N=2) 나누어 실행한 결과를 [Table 1]에 나타내었다. 두 단계로 나누어서 추정을 수행한 경우가 더 안정적으로 물성값을 추정하고 계산효율도 크게 높아진 것을 볼 수 있다. 추정과정의 안정성을 확인하기 위하여 초기값을 넓은 범위에서 변화시켜가면서 추정을 반복한 결과를 [Table 2]에 정리하였고, 모든  $\beta$ 의 값은 0.5 에서 시작을 하였다. 제시된 추정과정은 넓은 영역에서 안정적으로 수렴함을 알 수 있다. 그러나 승수를 2 만큼 올린 경우 (P=100)는 국부적인 최소점에 수렴을 하여 실제값과는 잘 일치하지 않아 참고문헌[14]에서와 유사하게 참값보다 낮은 영역에서 초기값을 주는 경우가 높은 영역에서 출발하는 경우보다 잘 수렴함을 알 수 있다. [Table 2]를 보면 참값에 수렴하는 경우 추정값은 참값과 거의 동일하고 국부적인 최소점에 수렴을 하면 그 오차가 매우 커짐을 알 수 있다. 이 경우 초기 추정값을 바꾸어 재수행하는 것이 필요하고 국부적인 최소점에서의 수렴 여부는 기준응답과 계산된 응답을 비교해보면 주파수 응답 형태가 달라지므로 [Fig. 8]에서 보는 바와 같이 쉽게 판단 할 수 있다.

제시된 역문제의 수렴 특성을 알아보기 위하여 추정함수의 등고선 그래프를 [Fig. 6-7]에 그렸다. 점탄성 물질에 대한 유리미분모델의 물성값 인자는 모두 6 개가 있으므로 그래프상 두 개의 변수만을 변화시켜가면서 그렸다. [Fig. 6]은 첫 번째 단계의 추정지수함수로 넓은 범위에서 부드러운 함수형태를 보이고 있고, [Fig.7]은 두 번째 단계의 추정지수함수로 관심 범위에서 충분히 부드러워서 제안된 추정과정이 안정적임을 예측할 수 있다.

## 5. 결론

주파수 응답함수의 특성을 이용한 최적화 기법으로 점탄성 유리미분모델의 물성값을 효율적인 방법으로 추정하는 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 Oberst beam 의 한 점에서의 리셉턴스를 측정하고, 동일한 계에 대하여 유리미분모델을 사용한 유한요소모델을 이용하여 계산된 주파수응답함수와의 차이를 기울기를 사용하는 수학적계획법 알고리즘을 이용하여 최소화하여 점탄성 물질의 유리미분모델 물성계수를 추정하는 방법이다. 추정과정은 피크의 일치과정과 진폭의 일치과정을 순차적으로 진행되도록 구성하였으며, 각 단계의 최소화문제를 풀기 위한 기울기 계산은 이산화된 유한요소 행렬에 대한 해석적인 민감도해석식을 사용하여 계산효율을 높였다.

수치예제로 이미 물성값을 알고 있는 점탄성 물질을 대상으로 하는 수치 모사 실험을 통하여 제안된 방법의 유용성을 입증하였다.

향후의 과제로 실험을 통한 점탄성 물질의 물성값을 추정하는 과정이 필요하며 현재 수행 중에 있다.

## 참고문헌

- (1) 이두호, 2005, “진동응답을 최소화하는 비구속형 제진보의 제진 부위 최적설계.” 한국소음진동공학회 논문집, 제 15 권, 7 호, pp.829~835.
- (2) Jones. D. I. G., 2001, *Handbook of Viscoelastic Vibration Damping*, John Wiley & Sons Ltd, New York.
- (3) Lee, D. H. and Hwang, W. S., 2004, “Layout Optimization of an Unconstrained Viscoelastic Layer on Beams Using Fractional Derivative Model.” *AIAA journal*, Vol. 42, No.10, pp.2167~2170.
- (4) Wang. S. M., and Choi. K. K., 1993 “Continuum Sizing Design Sensitivity Analysis of Eigenvectors Using Ritz Vectors.” *Journal of Aircraft*, Vol. 31, No.2, pp.457~459.
- (5) Tritz, T., 1996, “Analysis of Four-Parameter Fractional Derivative Model of Real Solid Materials.” *Journal of Sound and Vibration*. 1996, Vol. 195, No.3, pp.103~115.
- (6) Vanderplaats R&D, 2001, *DOT user's manual Version 5.4*.
- (7) Chandrupatla, Tirupathi R. and Belegundu, Ashok D., 1997 *Introduction to Finite Elements in Engineering 2nd*, Prentice Hall, Inc., New Jersey.
- (8) Mohan D. Rao., 2003, “Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes.” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 262, No.3, pp.457~474
- (9) 이두호, 황우석, 2003, “비구속형 점탄성 제진층을 갖는 보의 제진층 길이 최적화,” 한국소음진동공학회 논문집, 제 13 권, 제 12 호, pp.938~946.
- (10) C. T. Sun, Y. P. Lu., 1995, *Vibration Damping of Structural Elements*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey.
- (11) A.D. Nashif, D.I.G. Jones, J.P. Henderson, 1985, *Vibration Damping*, Willey, New York.
- (12) Lee, D. H. and Hwang, W. S., 2003, “Parametric Optimization of Complex Systems Using a Multi-Domain FRF-based Substructuring Method,” Vol. 18, No. 22~23, pp. 2249~2257, *Computers & Structures*.
- (13) Semyung Wang., 1999, “Design Sensitivity Analysis of Noise, Vibration, and Harshness of Vehicle Body Structure,” Vol. 27, No. 3, pp.317~335.
- (14) 이두호, 황우석, 2004. “전달함수 다중합성법을 이용한 진동시스템의 결합부 특성값 추정”, 한국소음진동공학회 논문집, 제 14 권, 제 6 호, pp. 534~545.