

## 탄성충돌에 의한 외팔보의 동적 응답해석

### Dynamic Response Analysis of a Cantilever Beam due to Elastic Impact

한현희†·류봉조\*·이강수\*·신광복\*·안지연\*\*·이규섭\*\*\*

Hyun Hee Han, Bong Jo. Ryu, Kang Soo Lee, Kwang Bok Shin, Ji Youn Ahn, Gyu Seop Lee

**Key Words** : Dynamic response(동적응답), Elastic Impact(탄성충돌), Impact Force(충격력), Cantilever Beam(외팔보)

#### ABSTRACT

The beam structure models with an impactor or contact parts under impact forces have been applied to the design of mechanical and electronic accessories. Switches, hard-disk pick-ups and sensors are typical structural examples of the structure to be designed to colliding with other parts of structures. In this paper, in order to examine the relationships between the changes of the stiffness and damping of the impactor and vibrations of the dynamic characteristics of the impact model of a cantilevered beam with an impactor, impact force of the impactor and response characteristics of the cantilevered beam were analyzed by both numerical simulation and experiment. Since the stiffness and damping of the impactor have high nonlinear characteristics, the contact model using revised Herz-model was established by experiments. Also, the results of numerical analyses for dynamic response and impact force of a cantilevered beam with an impactor have a good agreement with experimental results.

#### 1. 서론

충돌부 혹은 접촉부가 부착된 보 구조물은 스위치, 센서류, 하드디스크 픽업 등 많은 기계-전자 부품설계에 적용되고 있는 부재이며, 향후 MEMS, 위성체 등의 구조에도 많은 활용이 될 것으로 예상되고 있다. 이러한 보 구조물에 대한 해석 및 제어 문제는 많은 연구가 이루어지고 있으나, 실제 충돌부에 의해 발생하는 충돌력과 보의 응답해석에 관한 연구는 오히려 미비한 실정이다. 충돌부의 강성 및 감쇠 특성은 보의 응답특성에 크게 영향을 주며, 반면에 보의 응답특성은 충돌력의 생성에 영향을 주기 때문에 이에 대한 이론적 정립이 필요한 실정이다. 보의 동적 특성을 고려한 충돌부의 설계는 충돌력의 감소 및 원하지 않는 보의 진동 모드제거 등에 응용될 수 있기 때문에 이에 대한 연구는 더욱 중요한 의미를 갖는다. Dubowsky<sup>(1)</sup>는 강체에 스프링이 부착된 충격-대우(impact-pair)모델을 개발하여 충돌면의 거동을 모델링하였는데 선형감쇠법칙과 Hertzian 스프링으로 가정하여 간

극이 있는 편 연결 구조물의 동특성을 해석하였다. Doyle<sup>(2)</sup>은 실험적으로 측정된 변형율 이력으로부터 충격 전후의 동적 접촉-충격력 이력을 계산하는 방법을 연구하였다. Lankarani<sup>(3)</sup>는 충격중에 반발계수를 도입하고 운동량 평형 조건을 이용하여 에너지 전달과정을 모델링 하였고, 박형순<sup>(4)</sup>등은 역동역학을 이용한 충격을 받는 보의 충격력 복원에 따른 충격모델의 변수를 규명하였다. 설계요소에도 적용되고 있는 외팔보는 단면형상, 재질, 집중질량의 존재 등으로 많은 불연속점을 가지는 것이 일반적이다. 따라서 이러한 불연속점이 있는 보의 해석 방법은 십수 년간 발전되어 오고 있으며, 현재 까지도 많은 연구가 진행되고 있다. Gürgöze<sup>(5)</sup>는 끝단에 질량과 스프링이 부착된 보에 대하여 주파수 해석방법으로 계의 고유진동수 해석을 하였으며, Chang<sup>(6)</sup>은 단순 지지된 보의 중앙에 집중질량이 있는 보의 자유진동 해석을 수행하였다. Banerjee와 Sobey<sup>(7)</sup>는 집중질량의 관성모멘트와 기하학적 형상을 고려하였으며, Chang<sup>(8)</sup>등은 집중 질량, 스프링 및 감쇠가 결합된 보의 해석 모델을 제시하였다. 본 논문에서는 충돌부에 의한 집중질량이 부착된 외팔보에 대하여, 충돌부의 질량, 강성 및 감쇠특성이 충돌력 생성 및 보의 응답특성에 미치는 영향을 이론적으로 정립하기 위하여 첫째, 충돌부의 강성 및 감쇠에 대한 수학적인 모델을 설정하고 실험적 방법으로 모델을 결정하고, 둘째, 집중질량에 의해 불연속점을 갖는 외팔보 해석을 위한 해석적 방법을 제시하

† (주)텍트리

E-mail : hhh@tektree.co.kr

Tel : (041) 522-7601, Fax : (041) 522-7602

\* 한밭대학교 기계공학과

\*\* 한밭대학교 대학원

\*\*\* (주)텍트리

고, 셋째, 충돌부를 갖는 외팔보와 바다 면과의 충돌에서 발생하는 충돌력과 보의 응답특성을 이론적 해석과 실험적 방법으로 비교 검증함으로써 기계-전자 부품 설계에 적용되고 있는 보 구조물의 설계해석에 요구되는 수학적 모델을 제시하는데 목적이 있다.

## 2. 이론 해석

### 2.1 집중질량을 갖는 보의 진동해석

Fig. 1은 집중질량을 갖는 보 구조물로, 집중질량을 중심으로 불연속면을 갖기 때문에 두개의 좌표를 사용하여 해석한다.

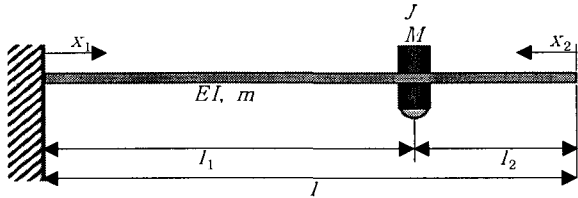


Fig. 1 Mathematical model of the beam with concentrated mass due to impact.

Fig. 1 모델에 대한 계의 지배방정식은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 y_1(x_1, t)}{\partial x_1^4} + m \frac{\partial^2 y_1(x_1, t)}{\partial t^2} = 0 \quad 0 \leq x_1 \leq l_1$$

$$EI \frac{\partial^4 y_2(x_2, t)}{\partial x_2^4} + m \frac{\partial^2 y_2(x_2, t)}{\partial t^2} = 0 \quad 0 \leq x_2 \leq l_2 \quad (1)$$

여기서,  $E$ 는 탄성계수,  $I$ 는 단면의 2차모멘트,  $m$ 은 보의 단위길이 당 질량,  $M$ 은 집중질량,  $J$ 는 집중질량의 회전관성모멘트이다. 무차원변수  $\xi_1 = x_1/l_1, \xi_2 = x_2/l_2$ 를 도입하면 식 (1)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 y_1(\xi_1, t)}{\partial \xi_1^4} + \frac{m l_1^4}{EI} \frac{\partial^2 y_1(\xi_1, t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq \xi_1 \leq 1$$

$$\frac{\partial^4 y_2(\xi_2, t)}{\partial \xi_2^4} + \frac{m l_2^4}{EI} \frac{\partial^2 y_2(\xi_2, t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq \xi_2 \leq 1 \quad (2)$$

Galerkin의 모드합 방법을 적용하여 식 (2)의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$y_1(\xi_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{n1}(\xi_1) q_n(t)$$

$$y_2(\xi_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{n2}(\xi_2) q_n(t) \quad (3)$$

식 (3)에서 시간함수  $q_n(t)$ 를 조화함수로 가정하여 다음과 같이 정의한다.

$$q_n(t) = e^{i\omega t} \quad (4)$$

식 (3)과 식 (4)를 식 (2)에 대입하여 정리하면 다음

과 같다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_{n1}'''' - \lambda_1^4 \Phi_{n1}) e^{i\omega t} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_{n2}'''' - \lambda_2^4 \Phi_{n2}) e^{i\omega t} = 0 \quad (5)$$

여기서,  $\lambda_1^4 = \frac{m l_1^4}{EI} \omega^2, \lambda_2^4 = \frac{m l_2^4}{EI} \omega^2$ 이고, 식 (5)의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi_{n1}(\xi_1) = C_1 \cos \lambda_1 \xi_1 + C_2 \sin \lambda_1 \xi_1 + C_3 \cosh \lambda_1 \xi_1 + C_4 \sinh \lambda_1 \xi_1$$

$$\Phi_{n2}(\xi_2) = C_5 \cos \lambda_2 \xi_2 + C_6 \sin \lambda_2 \xi_2 + C_7 \cosh \lambda_2 \xi_2 + C_8 \sinh \lambda_2 \xi_2 \quad (6)$$

한편, 경계조건은 다음과 같다.

$$\Phi_{n1}(0) = 0, \Phi_{n1}'(0) = 0, \Phi_{n2}''(0) = 0, \Phi_{n2}'''(0) = 0 \quad (7)$$

$$\Phi_{n1}(1) = \Phi_{n2}(1), \Phi_{n1}'(1) + \Phi_{n2}'(1) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{EI}{l_1^2} \Phi_{n1}''(1) - \frac{EI}{l_2^2} \Phi_{n2}''(1) = J \omega^2 \Phi_{n1}'(1) \quad (9)$$

$$\frac{EI}{l_1^3} \Phi_{n1}'''(1) + \frac{EI}{l_2^3} \Phi_{n2}'''(1) = -M \omega^2 \Phi_{n1}(1) \quad (10)$$

식 (7)부터 식 (10)까지 8개의 경계조건으로부터 다음과 같은 행렬형태의 특성 방정식을 얻게 된다.

$$[S] \{C\} = 0 \quad (11)$$

여기서,  $\{C\}^T = \{C_1 C_2 \dots C_8\}$ ,  $[S]$ 의 성분은 식 (12)와 같다.

$$S_{11} = 1, S_{13} = 1, S_{22} = 1, S_{24} = 1, S_{35} = 1, S_{37} = 1$$

$$S_{46} = 1, S_{48} = 1,$$

$$S_{51} = \cos \lambda_1, S_{52} = \sin \lambda_1, S_{53} = \cosh \lambda_1, S_{54} = \sinh \lambda_1$$

$$S_{55} = -\cos \lambda_2, S_{56} = -\sin \lambda_2, S_{57} = -\cosh \lambda_2, S_{58} = -\sinh \lambda_2$$

$$S_{61} = -\sin \lambda_1, S_{62} = -\cos \lambda_1, S_{63} = \sinh \lambda_1, S_{64} = \cosh \lambda_1$$

$$S_{65} = -\sin \lambda_2, S_{66} = -\cos \lambda_2, S_{67} = \sinh \lambda_2, S_{68} = \cosh \lambda_2$$

$$S_{81} = (l_2 \lambda_1)^3 (\sin \lambda_1 - \sinh \lambda_1) + \mu (l_2^3 \lambda_1^4 + l_1^3 \lambda_2^4) (\cos \lambda_1 - \cosh \lambda_1)$$

$$S_{82} = (l_2 \lambda_1)^3 (\cos \lambda_1 + \cosh \lambda_1) + \mu (l_2^3 \lambda_1^4 + l_1^3 \lambda_2^4) (\sin \lambda_1 - \sinh \lambda_1)$$

$$S_{85} = (l_1 \lambda_2)^3 (\sin \lambda_2 - \sinh \lambda_2)$$

$$S_{86} = -(l_1 \lambda_2)^3 (\cos \lambda_2 + \cosh \lambda_2)$$

$$S_{71} = (l_2 \lambda_1)^2 (\cos \lambda_1 + \cosh \lambda_1) - \frac{J}{m} \lambda_1^3 \lambda_2^3 (\sin \lambda_1 + \sinh \lambda_1)$$

$$S_{72} = (l_2 \lambda_1)^2 (\sin \lambda_1 + \sinh \lambda_1) + \frac{J}{m} \lambda_1^3 \lambda_2^3 (\cos \lambda_1 - \cosh \lambda_1)$$

$$S_{75} = -(l_1 \lambda_2)^2 (\cos \lambda_2 - \cosh \lambda_2)$$

$$S_{76} = -(l_1 \lambda_2)^2 (\sin \lambda_2 - \sinh \lambda_2) \quad (12)$$

이 이외의  $S_{ij}=0$ 이다. 여기서  $\mu = \frac{M}{ml}$ 이다.

### 2.2 보와 바닥의 충돌에 의한 보의 동적응답해석

보와 바닥 면과의 충돌에 의한 보의 동적응답해석의 수학적 모델은 Fig. 2와 같다. 해석의 매개변수를 줄이기 위하여 바닥 면과 충돌부는 최초 접촉한 상태를 유지하는 것으로 하였다.

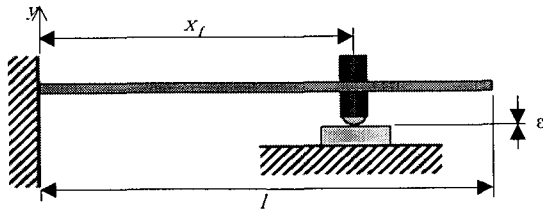


Fig. 2 Mathematical model of dynamic responses for the beam between the impactor and rigid surface

Fig. 2의 수학적 모델에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$EIy''''(x, t) + m\ddot{y}(x, t) = F(t)\delta(x - x_f) \quad (13)$$

여기서, 충돌력  $F(t)$ 는 충돌부의 위치인  $x_f$ 에서 보의 변위  $y(x_f, t)$ 가 양인 경우에는 영이며, 음인 경우에만 값을 갖는다. 한편, 충돌력  $F(t)$ 는 충돌부의 강성 및 감쇠를 고려하여 다음과 같이 표현된다.

$$F(t) = (k + \mu \dot{y}(x_f, t))y(x_f, t)^p \quad (14)$$

식 (13)의 해는 다음과 같이 정의된다.

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{j1}(x_1) q_j(t) \quad , \quad 0 \leq x_1 \leq l_1$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{j2}(x_2) q_j(t) \quad , \quad l_1 \leq x_2 \leq l \quad (15)$$

여기서, 형상함수  $\phi_{j1}(x_1)$ 과  $\phi_{j2}(x_2)$ 는 2.1절에서 정의한 바와 같다.

식 (15)에 변수  $\xi = x/l$ ,  $\xi_1 = x_1/l_1$ ,  $\xi_2 = x_2/l_2$ 를 도입하면 다음과 같다.

$$y(\xi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{j1}(\xi_1) q_j(t), \quad 0 \leq \xi_1 \leq 1$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{j2}(\xi_2) q_j(t), \quad 0 \leq \xi_2 \leq 1 \quad (16)$$

식 (16)을 식 (13)에 대입하고 식 (5)의 관계식을 이용하면 식 (17)이 된다.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_{j1}(\xi_1) \ddot{q}_j(t) + \omega_j^2 \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{j1}(\xi_1) q_j(t) = F(t) \delta(\xi_1 - 1), \quad 0 \leq \xi_1 \leq 1$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_{j2}(\xi_2) \ddot{q}_j(t) + \omega_j^2 \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{j2}(\xi_2) q_j(t) = F(t) \delta(\xi_2 - 1), \quad 0 \leq \xi_2 \leq 1 \quad (17)$$

식 (17)의 양변에  $\phi_{j1}(\xi_1)$ 과  $\phi_{j2}(\xi_2)$ 를 각각 내적하면 직교성의 원리에 의하여 다음과 같은 운동방정식을 얻게 된다.

$$\ddot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = F(t) \phi_{j1}(1) \quad (18)$$

### 2.3 탄성충돌 접촉에 의한 충돌부 강성 및 감쇠

일반적으로 두개의 탄성 충돌구가 충돌하여 발생하는 변형과 접촉력에 대한 관계는 식 (19)로 표현되는 Hertz의 접촉이론 적용이 가능하다.

$$F = kx^p \quad (19)$$

여기서,  $F$ 는 접촉력,  $x$ 는 변형량을 나타내며,  $k$ 는 스프링 상수,  $p$ 는 일반적으로 1보다 큰 상수이다. 그러나 Hertz의 모델은 변형의 기하학적 형상 변화만을 고려하여 접촉력을 구하였기 때문에 재료감쇠에 의한 에너지 손실에 대해서는 설명이 불가능하다. 재료감쇠에 의한 에너지 손실은 감쇠력이 속도에 비례하는 Kelvin-Voigt의 선형 감쇠모델로 단순화하여 가정할 수 있다. 감쇠계수  $D$ 를 적용하면 접촉력은 식 (20)이 된다.

$$F = kx^p + D\dot{x} \quad (20)$$

이 모델은 압입 순간부터 압축력이 작용하며 분리 순간에는 인장력이 작용하므로 물리적으로 모순된 현상을 보여주고 있다. Hunt는  $x=0$ 에서 감쇠력  $F=0$ 이 되게 하기 위하여 식 (21)의 모델을 제시하였다.

$$F = kx^p + \mu x^p \dot{x} \quad (21)$$

접촉현상에 대한 이제까지의 실험결과는 이러한 이론적 해석의 노력에도 불구하고 상수 파라미터  $k$ ,  $p$  및  $\mu$ 가 초기 충돌속도에 따라 변화한다는 것을 나타내주고 있어, 구조감쇠계수  $\mu$ 는 반발계수  $e$ , 반발속도  $v_0$ , 강성  $k$ 에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\mu = \frac{3(1-e^2)k}{4v_0} \quad (22)$$

## 3. 실험

### 3.1 충돌부의 강성 및 감쇠 측정 실험

충돌부의 강성 및 감쇠를 측정하기 위하여, Fig. 3과 같이 낙하 충돌실험을 수행하였다.

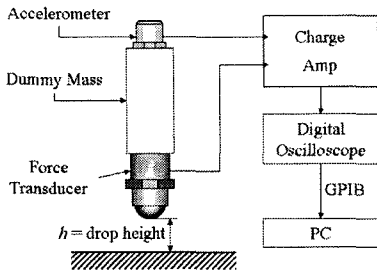


Fig. 3 Schematic diagram for the drop impact test

### 3.2 바닥면과 외팔보의 탄성충돌 실험

바닥 면과 외팔보가 탄성 충돌하는 경우, 충돌력과 보의 응답의 상관관계를 확인하기 위하여 Fig. 4와 같이 실험 장치를 구성하였다.

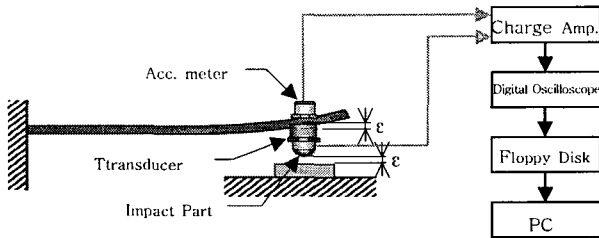


Fig. 4 Experimental setup for elastic collisions of the cantilevered beam with concentrated mass

실험은 초기변위를 주어 보가 바닥 면과 충돌하도록 하였으며, 보의 운동은 가속도계로 측정하였으며, 충돌력은 힘센서(force transducer)로 측정되었다. 실험결과의 일관성을 위하여 초기변위  $\epsilon$  은 1 mm 로 유지되도록 하였다.

## 4. 결과 및 고찰

### 4.1 집중질량을 갖는 보의 구조해석 결과

외팔보 충돌실험 전에 집중질량의 크기와 위치가 운동계에 미치는 영향을 확인하기 위하여 수치 해석을 수행하였다. Fig. 5는 집중질량의 크기 변화가 계의 고유진동수 변화에 미치는 영향을 수치 해석한 결과이다. 수치해석 결과 집중질량이 작은 경우 계의 고유진동수변화에 미치는 영향이 큰 것으로 나타나고 있다. 집중질량의 크기가 증가함에 따라 1차 고유진동수의 변화가 2차 혹은 3차 고유진동수 변화보다 크게 나타나고 있다. Fig. 6은 집중질량의 위치 변화에 따른 계의 고유진동수 변화를 수치 해석한 결과이다. 집중질량의 크기는 보의 질량에 0.3배로 고정 시켰다. 1차 고유진동수인 경우 형상함수에 노드점이 없으므로 집

중질량이 고정단에서 자유단으로 이동함에 따라, 고유진동수는 감소함을 알 수 있다. 그러나 노드점이 존재하는 2차나 3차 고유진동수의 경우 집중질량이 노드점에 놓인 경우에는 고유진동수의 변화가 크지 않으며, 반면에 피크점에 놓이는 경우 고유진동수의 변화에 큰 영향을 주고 있다.

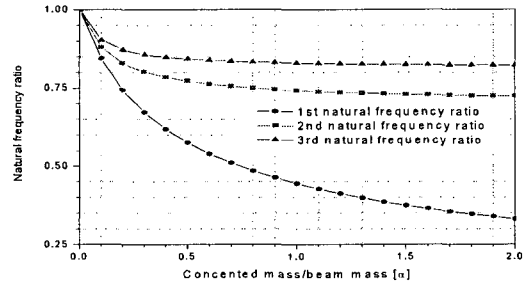


Fig. 5 Variation of natural frequency ratios depending on concentrated mass ratios

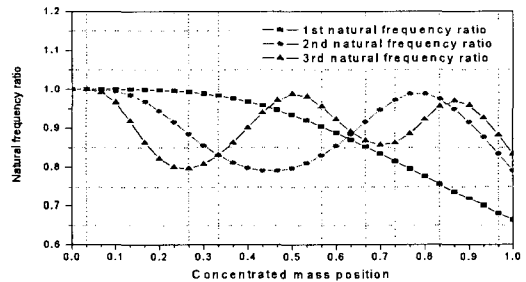


Fig. 6 Variation of natural frequency ratios depending on concentrated mass position

### 4.2 충돌부의 강성 및 감쇠 실험결과

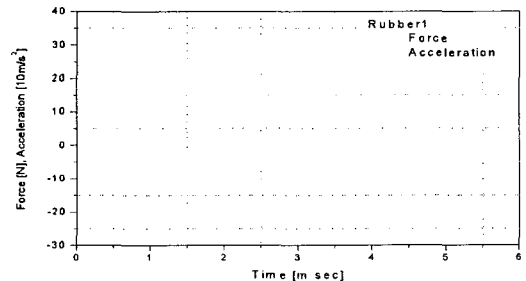


Fig. 7 Impact force and acceleration of impactor with rubber head at the drop height,  $h=1.5mm$

충돌부의 강성 및 감쇠를 측정하기 위하여 충돌부에 힘센서와 가속도계를 사용하여 실험을 수행하였다.

가속도계로 측정된 값을 적분하여 속도 및 변위 값을 얻었다. Fig. 7 및 8은 고무 충돌부를 이용하여 실험한 결과로 충돌시 측정된 힘과 가속도를 도시하고 있다. 충돌구조는 매우 강성이 크기 때문에 실험결과 가속도와 힘은 유사한 형태를 유지하고 있다. Fig. 7은 낙하높이 1.5mm인 경우이며 Fig. 8은 낙하높이가 5mm인 경우이다. 충돌력의 크기가 커질수록 충돌력의 주기(duration time)는 짧아진다. 이것은 충돌부의 스프링상수가 일정한 값이 아니라 강화 스프링 형태의 비선형 스프링임을 말해주며 Hertz의 이론과도 같은 경향을 말해준다.

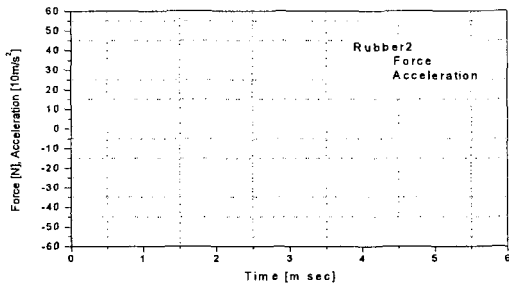
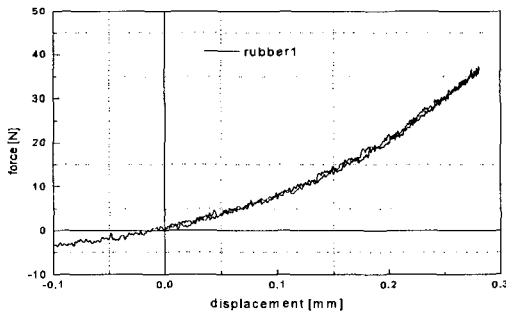
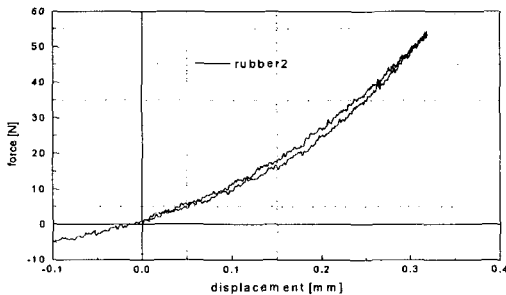


Fig. 8 Impact force and acceleration of impactor with rubber head at the drop height, h=5mm



(a) Rubber 1

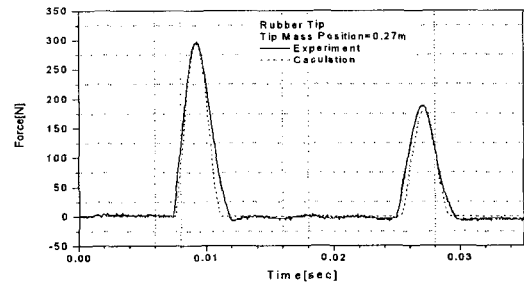


(b) Rubber 2

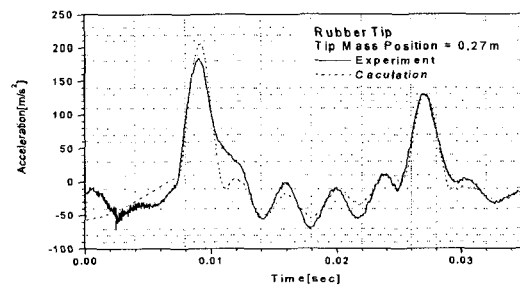
Fig. 9 Force and displacement curve for the rubber head

측정된 충돌력과 가속도 값은 충돌 모델을 산출하기 위하여 충돌력 대 변위의 관계로 표현한다. Fig. 9는 충돌부의 힘 대 변위곡선을 보여주고 있으며, 고무 충돌부를 사용한 결과이다. Fig. 9에서 알 수 있는 바와 같이 구조감쇠는 매우 작은 것으로 나타나고 있다. 구조감쇠량은 이 그래프를 이용하여 압입단계와 압출단계를 변위에 대해 적분하여 에너지 손실을 이용하여 결정할 수 있으며, 다른 한편으로는 탄성계수  $e = -v_i/v_o$ 를 결정하여 구할 수 있다. 여기서  $v_i$ 는 충돌속도이며  $v_o$ 는 반발속도이다. 구조 감쇠  $\mu$ 는 식 (22)를 이용하여 결정한다.

#### 4.3 충돌부를 갖는 외팔보와 바닥 면과의 충돌에 의한 보의 동적응답



(a) Impact force



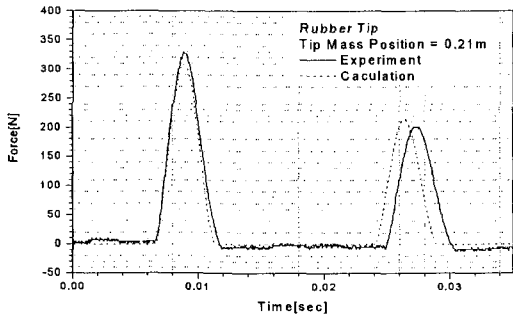
(b) Acceleration of the cantilevered beam

Fig. 10 Impact force and acceleration curves with rubber tip (Concentrated mass position,  $x_r = 0.27m$ )

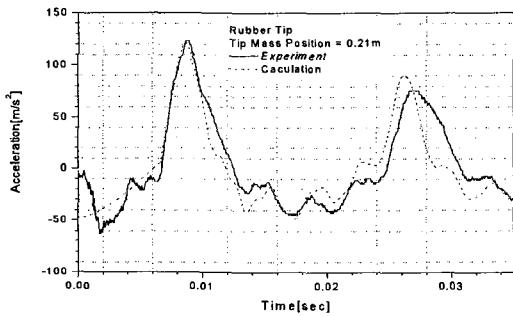
외팔보의 충격력 및 응답해석은 5개의 모드를 사용하여 수행하였으며, 4th order Runge-Kutta의 적분방법을 사용하였다. Fig. 10부터 Fig. 11은 고무충돌부를 사용한 경우로 실험치와 해석결과를 비교하여 도시한 것이다. 1차 충돌력과 2차 충돌력 사이의 시간 간격은 약 0.018초로 55(Hz) 근방이 되며, 계의 1차 고유진동수보다 높은 값을 보이고 있다. 이것은 충돌상태에서는 경계조건이 강성을 증가 시키는 방향으로 작용하

기 때문에 보인다. 오히려 이 시간 간격은 충돌부 강성의 크기와 관련되고 있다. 외팔보의 가속도응답은 1차 모드와 2차 모드가 주를 이루고 있으며, 2차 모드가 확연하게 나타나고 있다. 이것은 충돌력의 가진주파수가 계의 1차 고유진동수보다 높기 때문에 판단된다. 집중질량의 위치가 0.21(m)인 경우에는 2차 모드의 노드점 부근이므로 2차 모드의 크기가 감소되어 나타나고 있다.

근사한 해석결과를 얻었다. 셋째, 충돌부의 강성 및 감쇠 모델과 집중질량을 갖는 보의 수학적 모델을 이용하여 충돌부를 갖는 외팔보가 바닥면과 충돌하는 경우 충돌력과 보의 동적응답 해석을 수행하여 실험결과와 유사한 결과를 얻었다. 넷째, 이러한 수학적 모델과 해석방법은 보 형태의 스위치, 픽업장치 등의 성능 개량 및 설계해석에 활용할 수 있을 것으로 판단된다.



(a) Impact force



(b) Acceleration of the cantilevered beam

Fig. 11 Impact force and acceleration curves with rubber tip (Concentrated mass position  $x_f = 0.21m$ )

## 5. 결론

충돌부를 갖는 외팔보가 바닥면과 충돌하여 발생하는 충돌력 및 보의 응답해석을 위하여 충돌부의 강성과 감쇠, 집중질량이 있는 보의 구조 해석 등의 수학적 모델을 통하여 이론 해석을 수행하고 이를 실험적인 방법으로 확인한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 구형형상을 갖는 충돌부의 강성 및 감쇠는  $F = k(1 + \mu \dot{x})x^n$ 의 수학적 형태로 표현되며, 매개변수  $k$ ,  $\mu$  및  $n$ 는 실험적 방법으로 결정하는 것이 타당하다. 둘째, 집중질량과 같이 보의 불연속점이 있는 경우 두개의 좌표와 형상함수를 이용하여 실험결과와

## 참고 문헌

- (1) Dubowsky, S. and Freudenstein, F., 1971, "Dynamic Analysis of Mechanical Systems with Clearances. Part I : Formulation and Dynamic Model", *Journal of Engineering for Industry*, ASME, Vol.93, pp.305-316.
- (2) Doyle, J. F., 1984, "An Experimental Method for Determining the Dynamic Contact Law", *Experimental Mechanics*, Vol.24, pp.10-16.
- (3) Lankarani, H. M. and Nikravesh, P. E., 1990, "A Contact Force Model with Hysteresis Damping for Impact Analysis of Multibody Systems", *J. of Mech. Design*, ASME, Vol.112, September, pp.369-376.
- (4) Park, H. S. and Park, Y. S., 1994, "Transient Response of an Impacted Beam and Indirect Impact Force Identification using Strain Measurements", *Shock and Vibration*, Vol.1, No.3, pp.267-278.
- (5) Gürgöze, M., 1996, "On The Eigenfrequencies of a Cantilever Beam with Attached Tip Mass and a Spring-Mass System", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.190, No.2, pp.149-162.
- (6) Chang, C. H., 2000, "Free Vibration of a Simply Supported Beam Carrying a Rigid Mass at the Middle", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.237, No.4, pp.733-744.
- (7) Chang, T. P., Chang, F. I. and Liu, F. I., 2001, "On the Eigenvalues of a Viscously Damped Simple Beam Carrying Point Massed", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, No.4, pp.769-778.
- (8) Banerjee, J. R. and Sobey, A. J., 2003, "Further Investigation into Eigen-frequencies of a Two-Part Beam-Mass System " *Journal of Sound and Vibration*, Vol.265, pp.899-908.