

구조물의 자유진동모드로 유발되는 변형에너지 분포를 이용한 위상최적화기법

Topology Optimization Technique using Strain Energy Distributions induced by the Mode Shapes associated with Natural Frequencies

이상진†·배정은*·박경임**

Sang Jin Lee, Jung Eun Bae and Gyeong Im Park

Key Words : Topology Optimization(위상최적화), Mode Shape(모드형상), Strain Energy(변형에너지), Resizing Algorithm(크기 조절알고리즘), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

In this paper, new topology optimization technique is proposed. It mainly uses the strain energy distributions induced by the mode shapes associated with natural frequencies of the structure and so we can implicitly consider the dynamic characteristics of the structure in the topology optimization process. The strain energy to be minimized is employed as the objective function and the initial volume of structures is adopted as the constraint function. The resizing algorithm devised from the optimality criteria method is used to update the hole size of the cell existing in each finite element. The cantilever beam problem is adopted to test the proposed techniques. From numerical test, it is found to be that the optimum topology of the cantilever produced by the proposed technique has a high increase of natural frequency value and the technique is very effective to maximize the fundamental frequency of the structure.

1. 서 론

구조물의 설계최적화기법은 부재의 크기를 조절함으로써 건설재료를 최소화하는 크기최적화기법, 구조물의 형상을 조절하는 형상최적화 기법 그리고 구조물의 위상 자체를 도출하는 위상최적화기법으로 분류된다.

위상최적화기법은 그림 1에 도시된 바와 같이 구조물을 이루고 있는 재료를 외력에 효과적으로 저항할 할 수 있게 재분배함으로써 동일한 양의 재료를 이용하여 최선의 구조형태를 찾아내는 것이다.⁽¹⁾ 위상최적화기법은 등질화법과 최적정기준법을 바탕으로 판의 두께분포 최적설계⁽²⁾를 수행한 이래 이와 유사한 기법으로 1980년대 후반부터 그 연구⁽³⁾가 시작되었다. 초기에는 물질을 표현하는 재료모델과 물질을 재분배하기 위한 크기조절 알고리즘에 대한 연구가 심층적으로 이루어 졌으며 이후 다양한 분야에 위상최적화기법이 적용되어 왔다. 또한

실제 구조물의 위상최적화를 위하여 다하중 경우에 대한 위상최적화에 대한 연구결과가 보고되고 있으며 자중 및 설계 의존적 하중에 대한 연구결과 또한 발표된 바 있다.⁽⁴⁻⁶⁾

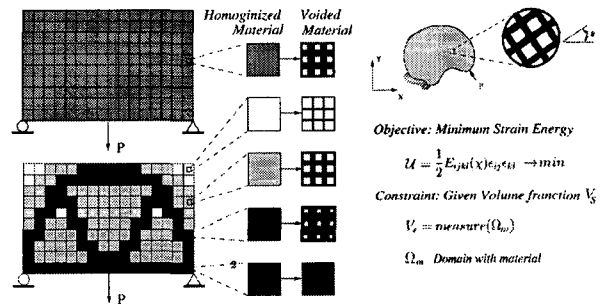


Fig. 1 Basic Concept of Topology Optimization⁽¹⁾

그러나 구조물의 고유진동수와 같은 동적특성의 변화를 고려하는 위상최적화기법에 대한 연구결과는 문헌상 매우 적다. 따라서 본 연구에서는 구조물의 자유진동모드에 의해서 유발되는 변형에너지분포를 이용하여 구조물의 동적특성을 고려하는 새로운 위상최적화기법을 제시하고 이를 이용한 최적위상을 계산하고 그 결과물

† 책임저자, 경상대학교, 건축공학과
E-mail : lee@gnu.ac.kr
Tel : (055) 751-6541, Fax : (055) 751-0165

* 경상대학교, 공학연구원, 특별연구원

** 경상대학교, 건축공학과, 석사과정

기술하고자 한다.

2. 재료모델

위상최적화는 물질이 차 있는 부분과 비어있는 부분으로 이루어진 비 등질의 단위 셀이 구조물에 반복적으로 분포되어 있다는 가정을 전제로 한다.⁽¹⁾ 유한요소법을 도입하게 되면 설계영역이 이산화 되고 하나의 유한요소가 하나의 셀로 표현되는 것으로 가정할 수 있다. 따라서 구조물의 전체 설계영역 Ω 는 셀이 반복되어진 것으로 간주 할 수 있다. 그림 2에서와 같이 사각형 빈공간을 포함하고 있는 단위 셀을 도입하면 재료밀도함수 $\xi(x)$ 는 $\xi(x)=1-a(x)b(x)$ 로 나타낼 수 있으며 빈공간의 크기는 $0 \leq a(x) \leq 1, 0 \leq b(x) \leq 1$ 의 범위를 가진다.

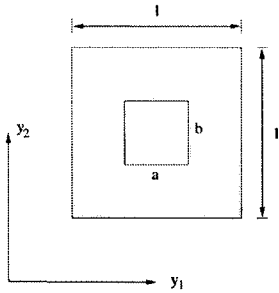


Fig. 2 Unit cell with rectangular hole in microscopic coordinates

단위셀의 미소구조체를 채우고 있는 부분을 동방성 물질이라고 가정하면 구조물의 강성행렬 D 는 a 와 b 의 함수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D := D^h(a, b) \tag{1}$$

여기서 a, b 는 요소 내에 존재하는 빈 공간의 크기를 결정하는 변수이며, 물성행렬 $D^h(a, b)$ 는 단위셀의 물질이 채워진 부분의 면적과 지수 ν 를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D^h(a, b) = (1-ab)^\nu D = \rho(a, b)^\nu D \tag{2}$$

본 연구에서는 그림 2의 사각형 구조체의 모양을 정사각형($a \times a$)으로 가정하여 평면응력상태에 있는 구조물의 물성행렬 D^h 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D^h = \frac{\rho(r)^\nu E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 \\ \nu & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

여기서 밀도함수는 $\rho(r) = 2r - r^2$ 이다. 그리고 재료밀도 매개변수 $r = 1 - a$ 로 단위 셀의 빈공간의 크기(a)를 정의하였다. 정의된 지수형태의 밀도함수 $\rho(r)^\nu$ 의 분포는 그림 3에 도시한 바와 같다.

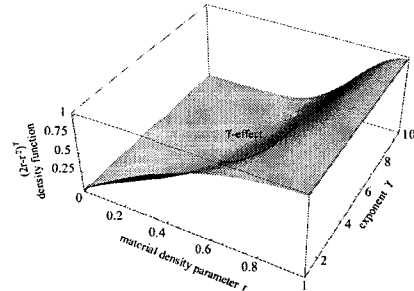


Fig. 3 Material density function with respect to the exponent ν

3. 크기조절 알고리즘

설계영역 Ω 내에 존재하는 다공성물질을 재분배하기 위하여 물질의 초기부피를 일정하게 유지하면서 변형에너지를 최소화하는 최적정기준을 사용하였다. 각 단위요소의 재료밀도 매개변수를 설계변수로 이용하였다. 유한요소법을 사용한 이산화 된 영역에서는 구조물이 재료밀도 매개변수 r_e 를 가지는 요소 e 의 조합으로 표현되며 설계변수의 수는 유한요소의 수와 동일하게 된다.

구조물설계에 고려할 진동모드를 전부 n 개라고 가정하면 이들에 대한 구조물의 전체변형에너지는 다음과 같이 가중치 도입하여 표현할 수 있다.

$$U = \sum_{i=1}^n w_i U^i \tag{4}$$

여기서 U^i 는 i 번째 자유진동모드에 의해 유발되는 변형 에너지를 나타내며 w_i 는 상응하는 가중치를 나타낸다. 식 (4)에 정의된 변형에너지를 이용하면 다수의 진동모드를 고려하는 구조물의 위상최적화문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } U \\ &\text{subject to } V_s = \sum_{e=1}^{nel} (2r_e - r_e^2) V_e \end{aligned} \tag{5}$$

설계영역이 nel 개의 유한요소로 이산화되면 설계변수 벡터는 다음과 같다.

$$r = [r_1, r_2, \dots, r_{nel}]^T \tag{6}$$

식 (5)에 정의된 최적화문제는 라그랑지 승수를 이용하여 구속조건을 목적함수에 첨가함으로써 다음과 같이 라그랑지함수 L 로 정의된다.

$$L(r_e) = U - \Lambda \left(\sum_{e=1}^{nel} (2r_e - r_e^2) - V_s \right) - \sum_{e=1}^{nel} \lambda_{r_e}^+ (r_e - 1) + \sum_{e=1}^{nel} \lambda_{r_e}^- r_e \quad (7)$$

여기서 Λ , $\lambda_{r_e}^+ = [\lambda_{r_1}^+, \lambda_{r_2}^+, \dots, \lambda_{r_{nel}}^+]$, $\lambda_{r_e}^- = [\lambda_{r_1}^-, \lambda_{r_2}^-, \dots, \lambda_{r_{nel}}^-]$ 는 라그랑지 승수이며 r_e 는 설계변수를 나타낸다. 식 (7)에서 라그랑지 승수 $\lambda_{r_e}^+$, $\lambda_{r_e}^-$ 는 항상 만족 되므로 식 (7)에 정의된 라그랑지 함수 L 의 정상조건(stationary condition)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{2\Lambda(1-r_e)} \frac{\partial}{\partial r_e} \left(\sum_{e=1}^n U_e \right) = 1 \text{ 또는 } B_{r_e} = 1 \quad (8)$$

식 (8)은 재료밀도 매개변수와 변형에너지의 관계를 나타내는데 이를 이용하면 식 (9)와 같은 크기조절 알고리즘이 제시된다.

$$r_e^{k+1} = \begin{cases} MAX & \text{if } r_e^k (B_{r_e}^k)^{\eta} \leq MAX \\ = r_e^k (B_{r_e}^k)^{\eta} & \text{if } MAX \leq r_e^k (B_{r_e}^k)^{\eta} \leq MIN \\ = MIN & \text{if } MIN \leq r_e^k (B_{r_e}^k)^{\eta} \end{cases} \quad (9)$$

여기서 $MAX = \max\{(1-\zeta)r_e, 0\}$ 이고, $MIN = \min\{(1+\zeta)r_e, 1\}$ 이고, η 는 조절변수(turning parameter)이고, ζ 는 각 단계에서 설계변수 r_e 를 제어하는 이동변수(move limit)이다. 그리고 $B_{r_e}^k$ 는 k 번째 반복계산에서 $B_{r_e}^k$ 값을 나타낸다.

4. 자유진동모드에 의해 유발되는 변형에너지분포

본 연구에서는 구조물의 자유진동모드를 이용하여 변형에너지분포를 계산하기 위하여 자유진동해석을 수행하였다. 자유진동을 경험하는 구조물은 유한요소정식화를 거쳐 아래와 같은 고유치문제를 도출하게 된다.

$$K\Phi = \Lambda M\Phi \quad (10)$$

여기서 K 는 대칭을 이루는 정치의 전체강성행렬이고 M 은 전체 질량행렬을 나타낸다. Λ 는 고유벡터 Φ 의 고유벡터 성분과 관련한 고유치를 포함한 직교벡터이다. 본 연구에서 식(10)의 해는 부분공간반복법을 이용하여 구할 수 있는데 이 때 n 개의 고유치가 오름차순으로 다음과

같이 구해진다.

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \quad (11)$$

참고로 이때 전체강성행렬과 전체질량행렬은 고유벡터에 대해 다음과 같이 M-직교성과 K-직교성의 특성을 가진다.

$$\Phi_i^T M \Phi_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (12a)$$

$$\Phi_i^T K \Phi_j = \lambda_j \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (12b)$$

평면응력상태에 있는 구조물의 i 번째 자유진동모드에 대한 변형에너지 분포는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$U^i = \left[\sum_{e=1}^{nel} \frac{1}{2} \int \Phi_e^T K_e \Phi_e dV \right]^i \quad (13)$$

여기서 Φ_e 는 요소 e 와 관련한 자유진동모드벡터를 나타낸다.

5. 최적화알고리즘

최적정기준을 이용하여 구조물의 위상최적화 알고리즘을 형성하면 다음과 같다.

- ① 주어진 재료의 양을 이용하여 초기 설계변수값을 계산한다. 설계변수값은 재료밀도벡터로 주어진다.
- ② 초기(또는 갱신된) 재료밀도벡터로 형성한 등질화된 물질을 사용하여 구조물의 변위값을 구한다.
- ③ 계산된 변위값을 사용하여 목적함수 값 U_e 를 구하고 식(15)에서 필요한 설계변수에 대한 목적함수의 민감도 $\sum_{e=1}^n \partial U_e / \partial r_e$ 를 계산한다.
- ④ 식(8)을 이용하여 라그랑지승수 Λ 를 구한다.
- ⑤ 설계변수값을 갱신한다.
- ⑥ 갱신된 설계변수값을 여과한다.⁽⁷⁾
- ⑦ 갱신된 설계변수값이 주어진 정지조건을 만족하면 최적화를 멈추고 그렇지 않으면 ②-⑥을 반복한다.

6. 수치예제

자유진동모드에 의해서 유발되는 변형에너지의 영향을 고려한 평면구조물의 최적위상을 조사하기 위하여 크기가 $10m \times 5m$ 인 직사각형 영역의 보를 이용하였다. 보의 재료특성치는 탄성계수가 $E=10 \times 10^6 N/m^2$ 이고 프와송비가 $\nu=0.3$ 이다. 위상최적화에 필요한 변형에너지를 계산하기 위해 보를 5051개의 결점과 5000개의 4결점 유한요소로 이산화하였다. 이때 보의 재료는 가등질

화된 물질로 표현하였고 지수값은 $\gamma=5$ 를 택하였다. 최적기준을 바탕으로 유도한 크기조절 알고리즘의 조절 변수와 이동변수값은 각각 $\eta=1.0$, $\zeta=0.015$ 를 사용하였다. 본 예제에서는 한쪽 단이 고정 지지된 캔틸레버 보에 대한 위상최적화를 실시하고 그 결과를 기술하였다. 최적화에는 40%의 초기부피를 구속조건으로 이용하였다. 이때 나타나는 최적위상과 진동수의 변화는 그림 4와 그림 5에 각각 도시하였다.

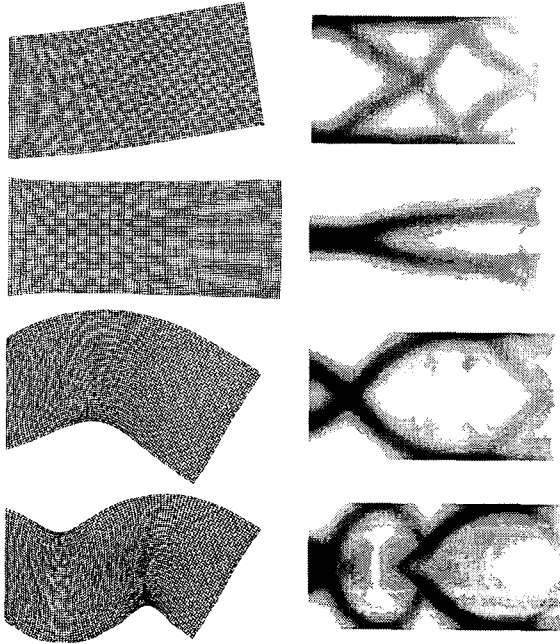


Fig. 4 Mode shapes and optimum topology: (row1) 1st mode, (row2) 2nd mode, (row3) 3rd mode, (row4) 4th mode

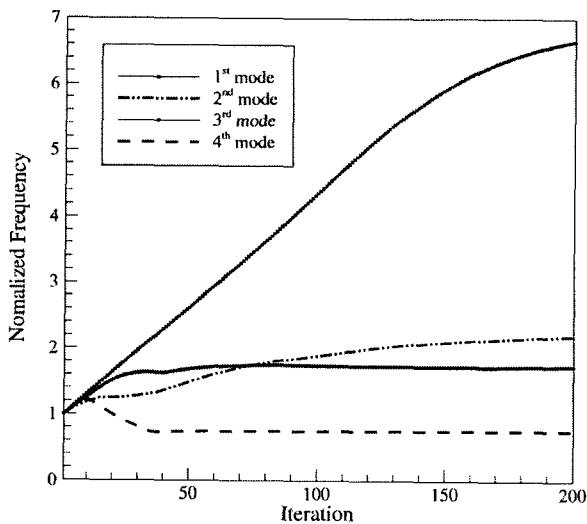


Fig. 5 Natural Frequency History

그림 4에는 1번째 진동모드부터 4번째 진동모드에 의해서 유발되는 변형에너지를 최소화하여 도출한 최적위상을 나타내며 그림 5는 그림 4의 최적위상을 도출하기

위해 반복계산과정에서 나타난 캔틸레버 보의 진동수 변화과정을 나타낸다. 기본진동수와 연관한 자유진동모드에 의해서 유발되는 변형에너지를 최소화한 결과, 보의 기본진동수가 초기구조물의 약 6.7배 증가하는 것으로 나타났다. 그러나 2차, 3차, 4차 진동모드에 의해 유발되는 변형에너지를 최소화한 결과 캔틸레버 보의 2차, 3차, 4차 고유진동수가 각각 2.2배, 1.7배, 0.77배 증가하였다.

7. 결론

본 연구에서는 자유진동모드에 의해서 유발되는 변형에너지분포를 이용한 최적화기법을 제시하고 이를 보의 위상최적화에 적용하였다. 최적화결과를 통하여 제시된 기법이 구조물의 기본진동수를 최대화하는데 매우 효과적인 것으로 나타났다. 본 연구를 통하여 제시된 기법은 변형에너지를 기저로 하는 위상최적화기법에 구조물의 동특성을 효과적으로 고려할 수 있었으며 앞으로 구조물의 응력특성을 개선하는 최적화기법과 함께 이용될 수 있을 것으로 판단된다.

후 기

본 연구는 영국 EPSRC와 건설교통부 건설기술연구개발사업비로 수행되었음(과제번호: C105A1020001-05A0502-00112).

참 고 문 헌

- (1) Lee, S.J., Bae, J.E. and Hinton, E., "Shell topology optimization using layered artificial material model", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 47, 2000. pp. 843-867
- (2) Cheng, G. and Olhoff, N., "Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates", *Int. J. of Solid & Structures*, 18, 1982. pp153-169
- (3) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., "Generating optimal topologies in structural design using homogenization method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, 1988, pp. 197-224
- (4) 이상진, "저차유한요소를 이용한 다항중경우를 가지는 평면구조물의 위상최적화", *한국전산구조공학회 논문집*, 제16권 제1호, 2003, pp. 59-67
- (5) 이상진, 박경임, "다하중 경우를 가지는 단순 지지된 길은 보의 위상최적화에 대한 경험", *한국철공간구조학회 논문집*, Vol. 5, 2005, pp. 83-89
- (6) 이상진, 박경임, "자중 및 설계 의존적 하중의 영향을 고려한 다하중을 받는 평면구조물의 최적위상에 대한연구", *대한건축학회논문집 논문집*, (심사진행중)
- (7) Youn, S. K and Park, S. H., "A study on the shape extraction process in the structural topology optimization using homogenization material", *Computers & Structures*, Vol. 62, 1997, pp. 527-538