

복합적층 회전원판의 진동 해석

Vibration Analysis of Rotating Laminated Composite Disks

구교남†

Kyo-Nam Koo

Key Words : Critical Speed(임계속도), Composite Laminate Disks(복합적층원판), Rotating Disk(회전 원판), Vibration(진동)

ABSTRACT

The centrifugal force acting on a rotating disk creates the in-plane loads in radial and circumferential directions. Application of fiber reinforced composite materials to the rotating disk can satisfy the demand for the increment of its rotating speed. However, the existing researches have been confined to lamina disks. This paper deals with the vibration analysis of rotating composite laminate disks. Dynamic equation is formulated in order to calculate the natural frequency and critical speed for rotating laminated disks. Galerkin's method is applied to obtain the series solution. The numerical results are given for the CFRP laminate disks with stacking sequence $[0/90]_s$ and $[90/0]_s$.

1. 서 론

환형판(annular disk) 또는 원판(circular disk)은 산업 기기에서 매우 다양한 형태로 사용되고 있다. 그 응용사례로는 원형 전기톱, 터빈, 브레이크 디스크 등 전통적인 산업기계뿐만 아니라 최근 하드 디스크, CD-ROM(compact disk), DVD-ROM(digital versatile disk) 등의 정보저장기기 등을 들 수 있다. 최근 들어 차세대 대용량 홀로그래프 저장장치인 HDDS(holographic digital data storage)의 실용화에 대한 연구가 활발하다. 일본기업 Optware는 HSSD의 일종인 HVD(holographic versatile disk)에 영상을 기록하고 재생하는데 성공했다고 발표했다⁽¹⁾. 일반적인 예측에 의하면 디스크 1장에 1 TB까지 저장 가능하다. HVD는 보다 많은 데이터를 저장하므로 회전에 의한 강도와 동적 안정성 등에 보다 우수한 특성을 갖는 원판을 요구한다.

회전하는 등방성 원판의 진동특성은 1920년대 이후 비교적 많이 연구되어 왔다. 그러나 복합재 회전원판에 대한 연구는 극히 미미한 실정이다.⁽²⁻⁴⁾ 최근 들어 구교남은⁽⁵⁾ 섬유 강화 복합재료를 회전하는 CD에 적용하여 반경강화 원판과 원주강화 원판의 정적강도에 대한 최대 허용회전수를 계산하였다. 또한 극직교 이방성 회전원판의 동적 방정식을 정식화하고 급수해를 이용하여 회전시의 고유진동수 변화를 살

펴보고 임계속도를 구하였다.^(6, 7) 극직교 이방성 회전원판의 동적 방정식을 회전하는 광학저장 디스크에 적용한 결과 임계속도를 크게 증가시킬 수 있음을 확인하였다.

현재까지의 연구의 결과에 의하면 복합재료를 회전원판에 적용하면 그 강도와 안정성 등과 같은 기계적 특성이 월등히 향상됨을 확인할 수 있었다. 또한 급수해 원판에 비해 구동에너지를 줄일 수 있다는 장점이 있다. 그러나 지금까지의 연구는 모두 단층으로 이루어진 원판에 대한 연구였다. 그러나 단층으로 이루어진 원판의 경우 기지(matrix)의 파손이 매우 낮은 응력에 발생할 수 있으므로 섬유는 높은 강도를 이용하지 못 할 수 있다. 따라서 일반 복합재료 구조물에서 사용되는 방법과 마찬가지로 회전원판도 적층판으로 구성하여 그 기계적 특성을 살펴볼 필요가 있다.

본 연구에서는 지금까지 연구된 바 없는 복합적층 회전원판의 진동해석을 수행하였다. 적층원판의 회전에 의해 발생하는 응력분포식을 극좌표계에서 유도하였다. 적층원판의 임계속도를 구하기 위해 지배방정식의 정식화를 수행하였으며 급수해를 구하기 위해 갤러킨 방법을 적용하였다. 해석에 사용된 원판은 대칭 직교적층판으로 $[0/90]_s$ 적층순서를 가지며 탄소섬유강화 복합재료(carbon fiber-reinforced plastic: CFRP)에 대한 해석결과를 제시하였다.

2. 지배방정식과 일반해

2.1 적층원판의 구성방정식

복합적층 원판은 Fig. 1과 같이 반경강화(radially-

† 책임저자, 울산대학교 항공우주공학과
E-mail : knkoo@mail.ulsan.ac.kr
Tel : (052) 259-1261, Fax : (052) 259-1682

reinforced) 원판과 원주강화(circumferentially-reinforced) 원판을 적층하여 구성할 수 있다.

복합적층판(laminate)을 이루고 있는 직교이방성 단층(lamina)의 응력-변형을 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 강성행렬 $[Q]_{1,2}$ 의 성분은 다음과 같다.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$$

섬유각 β 는 반경축으로부터 반시계 방향으로 측정되며 섬유각 β 를 갖는 단층에 대해 (r, θ) 극좌표계에서 응력-변형을 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{rr} & Q_{r\theta} & Q_{rs} \\ Q_{r\theta} & Q_{\theta\theta} & Q_{\theta s} \\ Q_{rs} & Q_{\theta s} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서 변환 강성행렬 $[Q]_{r,\theta}$ 의 성분은 참고문헌 [8]에서 찾을 수 있다. 고전적층판 이론을 이용하면 식 (3)의 변형율은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{r\theta}^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \kappa_r \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서 상첨자 0은 디스크 중립면에서의 변형율을 뜻하고 $\{\kappa\}$ 는 곡률을 의미한다.

식 (4)에 주어진 변형율을 이용하면 대칭적층 원판의 단위길이당 평면력 $\{M\}$ 과 모멘트 $\{N\}$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

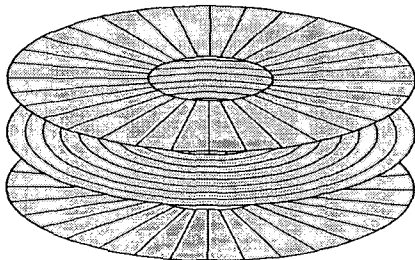


Fig. 1 Composite laminate disk

$$\begin{Bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ N_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r\theta} & A_{rs} \\ A_{r\theta} & A_{\theta\theta} & A_{\theta s} \\ A_{rs} & A_{\theta s} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{r\theta}^0 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{rr} & D_{r\theta} & D_{rs} \\ D_{r\theta} & D_{\theta\theta} & D_{\theta s} \\ D_{rs} & D_{\theta s} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_r \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

여기서 인장강성 행렬 $[A]$ 와 굽힘강성 행렬 $[D]$ 의 성분은 다음과 같이 정의된다.

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz \quad D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z^2 dz \quad (6)$$

2.2 회전예 의한 하중

본 연구에서는 0도 층과 90도 층으로 이루어진 직교적층 원판을 다루며 이 경우에 수직변형과 전단변형사이의 연성(coupling)이 없어지므로 회전에 의한 초기하중 $\{\bar{N}\}$ 와 변형율 $\{\bar{\varepsilon}\}$ 은 식 (5.1)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_r \\ \bar{N}_\theta \\ \bar{N}_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r\theta} & 0 \\ A_{r\theta} & A_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_r \\ \bar{\varepsilon}_\theta \\ \bar{\gamma}_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

축대칭 변형에 대한 면내 변형율을 고려하면 평면력은 다음과 같이 된다.

$$\bar{N}_r = A_{rr} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + A_{r\theta} \frac{\bar{u}_r}{r} \quad (8.1)$$

$$\bar{N}_\theta = A_{r\theta} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + A_{\theta\theta} \frac{\bar{u}_r}{r} \quad (8.2)$$

$$\bar{N}_{r\theta} = A_{ss} \left(\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{u}_\theta}{r} \right) \quad (8.3)$$

Fig. 2와 같이 일정한 회전수 Ω 로 회전하는 원판의 r 방향으로의 평형방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$-\frac{\partial(r\bar{N}_r)}{\partial r} - \frac{\partial \bar{N}_{r\theta}}{\partial \theta} + \bar{N}_\theta = \rho\Omega^2 r^2 \quad (9)$$

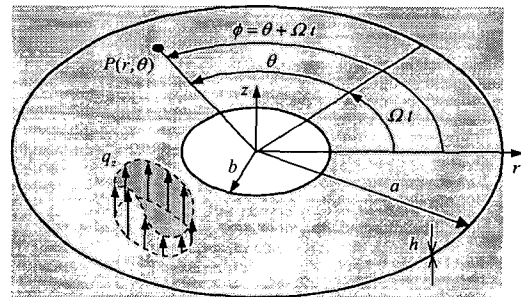


Fig. 2 Coordinates and geometry of rotating disk.

여기서 ρ 는 원판의 밀도이다. 회전수가 일정하면 $\overline{N}_{r\theta} = 0$ 고 축대칭 문제가 되므로 식 (8)을 식 (9)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 코시-오일러(Cauchy-Euler) 방정식 형태로 정리된다.

$$r^2 \frac{d^2 \overline{u}_r}{dr^2} + r \frac{d\overline{u}_r}{dr} - \mu^2 \overline{u}_r = - \frac{\rho k \Omega^2 r^3}{A_{rr}} \quad (10)$$

where $\mu^2 = A_{\theta\theta} / A_{rr}$

식 (10)의 해는 $\mu^2 = 9$ 와 $\mu^2 \neq 9$ 인 경우에 대해 경계조건을 적용하여 구한다. $r = b$ 에서 고정되고 $r = a$ 에서 자유인 경계조건은 다음과 같다.

$$\overline{u}_r(b) = 0, \quad \overline{N}_r(a) = 0 \quad (11)$$

식 (11)의 경계조건을 적용하면 식 (10)의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{u}_r(r) = \frac{\rho k \Omega^2}{k A_{rr}} \frac{C_1 r^\mu + C_2 r^{-\mu} - r^3 g(r)}{(\mu + \nu)(a/b)^\mu + (\mu - \nu)(b/a)^\mu} \quad (12)$$

where

$$\nu = A_{\theta\theta} / A_{rr}$$

$$C_1 = \{\delta_{\nu 3} + (3 + \nu)g(a)\} a^3 b^{-\mu} + (\mu - \nu)g(b) a^{-\mu} b^3$$

$$C_2 = \{\delta_{\nu 3} + (\mu + \nu)g(a)\} a^\mu b^3 - (3 + \nu)g(b) a^3 b^\mu$$

$$\begin{cases} k = 9 - \mu^2, & \delta_{\nu 3} = 0, & g(r) = 1 \text{ for } \mu^2 \neq 9 \\ k = 6, & \delta_{\nu 3} = 1, & g(r) = \ln(r) \text{ for } \mu^2 = 9 \end{cases}$$

식 (12)를 식 (8)에 대입하면 \overline{N}_r 과 \overline{N}_θ 를 구할 수 있다.

2.3 진동방정식 및 해법

적층원판이 Ω 의 속도로 회전할 때, 회전좌표계 (r, θ) 에 대해 x -방향으로의 동적 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} D_{rr} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^3 w}{r \partial r^3} \right) + D_{\theta\theta} \left(\frac{\partial^4 w}{r^4 \partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{r^4 \partial \theta^2} \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial r^2} + \frac{\partial w}{r^3 \partial r} \right) + 2(D_{r\theta} + 2D_{\omega}) \left(\frac{\partial^4 w}{r^2 \partial r^2 \partial \theta^2} \right) \\ - \frac{\partial^3 w}{r^3 \partial r \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{r^4 \partial \theta^2} \Big) - \frac{\partial}{r \partial r} \left(\overline{N}_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ - \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\overline{N}_\theta \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + \rho k \frac{\partial w^2}{\partial t^2} = q_z \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 q_z 는 단위면적당 작용하는 하중이다.

고정좌표계에 대한 자유진동 해는 식 (13)에서 분포하중 $q_z = 0$ 으로 하고 조화운동으로 가정하여 얻을 수 있다. 변형의 축 대칭성을 이용하여 다음과 같이 해를 가정한다.

$$w = R(r) e^{m\theta} e^{i\omega t} \quad (14)$$

식 (14)를 식 (13)에 대입하고 근사해를 $R(r) = \sum_{k=1}^N q_k f_k(r)$ 로 가정하여 갤러킨(Galerkin) 방법을 적용하면 다음과 같은 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$([K^b] + \Omega^2 [K^c] - \omega^2 [M]) \{q\} = \{0\} \quad (15)$$

여기서 $[K^b]$ 은 휨에 의한 강성행렬, $[K^c]$ 는 회전에 의한 강성행렬, $[M]$ 은 질량행렬이다. 반경방향으로의 함수 $f_k(r)$ 는 참고문헌 [7]에서와 같은 직교함수를 사용한다.

식 (15)의 고유치는 운동좌표계 (r, θ) 에 대한 고유진동수이며 고정좌표계 (r, ϕ) 에 대한 고유치는 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda_{nm} = \omega_{nm} \pm n\Omega \quad (16)$$

여기서 $\omega_{nm} + n\Omega$ 와 $\omega_{nm} - n\Omega$ 는 각각 전진파와 후진파의 진동수이며 m 과 n 은 각각 절원과 절선의 갯수를 나타낸다. 후행파의 진동수가 원판의 회전수와 같아질 때 즉 $\omega_{nm} = n\Omega$ 일 때 회전속도는 임계속도 Ω_{cr} 로 정의된다.

3. 계산결과 및 검토

앞서 유도된 결과를 광학 저장장치와 같은 제원을 갖는 원판에 적용하였으며 기하학적인 제원은 다음과 같다.

$$b = 15 \text{ mm}, \quad a = 60 \text{ mm}, \quad h = 1.2 \text{ mm}$$

본 연구에서 사용된 재료는 CFRP로 T300/N5208을 선택하였으며 물성치는 참고문헌 [5]에 제시되어 있다.

[0/90]_s 원판과 [90/0]_s 원판의 인장강성 $[A]$ 는 같지만 이들의 굽힘강성 $[D]$ 는 다르다. 적층원판의 진동특성은 굽힘강성에 큰 영향을 받으므로 두 적층순서에 따른 진동 해석을 수행하였다.

CFRP 적층원판의 속도에 따른 고유진동수를 Fig. 3과 Fig. 4에 나타내었다. 원판이 회전하지 않을 때 (0,0) (0,1) (0,2) 모드에서 [0/90]_s 원판이 [90/0]_s 원판보다 큰 고유진동수를 갖는 반면에 (0,3) (0,4) (0,5) 모드에서는 반대로 나타나고 있다. 이는 저차 모드는 D_{rr} , 고차 모드는 $D_{\theta\theta}$ 에 보다 큰 영향을 받기 때문이라고 판단된다. [0/90]_s 원판의 임계 모드는 (0,3) 모드이며 이때 임계속도는 27,528 rpm이다. 반면에 [90/0]_s 원판의 임계모드는 (0,2) 모드이며 임계속도는 약 26,520 rpm이다. [0/90]_s 원판의 임계속도가 크게 나타나고 있으나 [90/0]_s 원판보다 그다지 크게 나타나고 있지 않다. 그 이유는 앞서 설명한 바와 같이 (0,3) 모드는 $D_{\theta\theta}$ 의 크기에 영향 받으며 [0/90]_s 원판의 $D_{\theta\theta}$ 가 상대적으로 작기 때문이라고 판단된다.

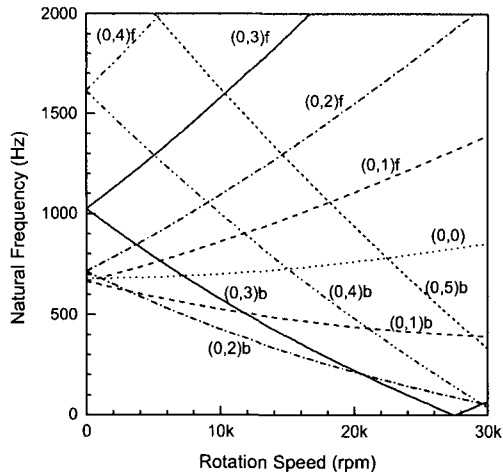


Fig. 3 Frequency-speed diagram for [0/90]_s CFRP disk.

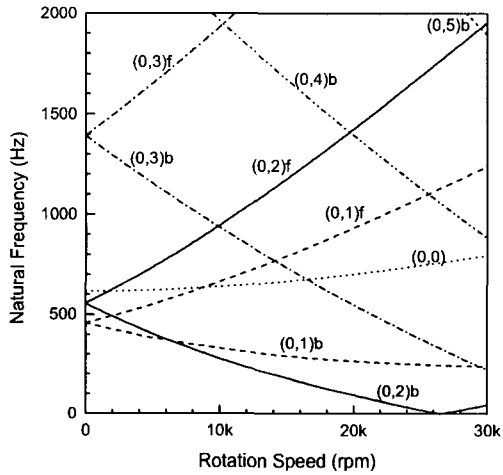


Fig. 4 Frequency-speed diagram for [90/0]_s CFRP disk.

Table 1 Critical speeds and modes.

Disk	Critical speed (rpm)	Critical mode	
Polycarbonate	7,060	(0,2)	
CFRP	[0]	19,106	(0,4)
	[90]	40,218	(0,2)
	[0/90] _s	33,783	(0,2)
		27,528	(0,3)
	[90/0] _s	26,520	(0,2)
30944		(0,3)	

적층순서에 따른 임계속도와 임계모드를 Table 1에 정리하였다. [0/90]_s와 [90/0]_s 적층원판의 경우는 최소 임계속도를 굵은체로 표시하였다. [0] 원판, [0/90]_s 원판과 같이 D_{90} 이 큰 경우에는 (0,3) 모드 이상에서 임계모드가 나타나고 있다. 반면에 [90] 원판, [90/0]_s 원판과 같이 D_{00} 가 큰 경우에는 (0,2) 모드가 임계모드가 되고 있음을 확인할 수 있다. 또한 복합재료 원판의 경우 [90] 원판이 가장 큰

임계속도를 갖는 것으로 나타났다. 그리고 [0/90]_s 원판과 [90/0]_s 원판은 비슷한 임계속도를 가지나 [0/90]_s 원판이 약간 큰 임계속도를 갖는다.

4. 결론

본 연구에서는 단층으로 구성된 복합재료 회전원판이 갖는 단점을 보완하기 위해 복합적층 회전원판의 진동해석을 수행하였다. 회전하는 적층원판의 응력분포식을 극좌표계에서 유도하였다. 응력분포식을 횡진동 해석에 이용하였으며 진동해석은 켈러킨 법을 적용하여 고유진동수와 임계속도를 구하였다.

해석에 사용된 원판은 대형 직교적층판으로 [0/90]_s CFRP에 대한 해석을 수행하였다. [0/90]_s 적층원판의 임계속도는 [90] 단층원판에 비해 감소하는 경향을 갖는 결과를 얻었다.

참고 문헌

- (1) http://www.optware.co.jp/english/index_tech.htm
- (2) Ghosh, N. C., 1985, "Thermal Effect on the Transverse Vibration of High Speed Rotating Anisotropic Disk," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 543-548.
- (3) Son, H., Kikuchi, N., Ulsoy A. G., and Yigit A. S., 2000, "Dynamics of Prestressed Rotating Anisotropic Plates Subject to Transverse Loads and Heat Sources, Part I: Modelling and Solution Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 236, No. 3, pp. 457-485.
- (4) Son, H., Kikuchi, N., Ulsoy A. G., and Yigit A. S., 2000, "Dynamics of Prestressed Rotating Anisotropic Plates Subject to Transverse Loads and Heat Sources, Part II: Application to a Specially Orthotropic Disk," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 236, No. 3, pp. 457-485.
- (5) 구교남, "복합재료 회전원판의 면내응력 해석," 한국복합재료학회, 제18권, 제4호, 2005. 8, pp. 8-13.
- (6) 구교남, "극직교 이방성 회전원판의 진동해석 및 임계속도, I: 정식화 및 해법," 한국소음진동공학회 논문집, 제16권, 제2호, 2006. 2, pp. 169-175.
- (7) 구교남, "극직교 이방성 회전원판의 진동해석 및 임계속도, II: 해석결과," 한국소음진동공학회 논문집, 제16권, 제3호, 2006. 3, pp. 247-254.
- (8) Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill, New York, 1975.